

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ ПРИ АНАЛИЗЕ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

Е. И. ГОЛЬДШТЕЙН

(Представлена научным семинаром кафедры автоматик и телемеханики)

В последние годы усилился интерес к энергетическому рассмотрению задач из различных областей техники. В настоящей работе продолжено критическое рассмотрение известных из литературы энергетических соотношений [1, 2] в плане выбора путей построения и разработки достаточно универсальных и разумно инженерных методов анализа и синтеза нелинейных цепей и устройств на их основе. При этом уделено внимание и энергетическим соотношениям, используемым при анализе линейных цепей, так как «усиление» энергетического подхода к расчету линейных цепей позволяет наглядно увязать законы Кирхгофа с более общими законами сохранения энергии, обеспечивает преемственность при переходе от линейных задач к нелинейным.

1. Линейные цепи

В [3, 4, 5, 6] показана возможность получения законов Кирхгофа на основе принципа наименьшего действия и вытекающего из него уравнения Эйлера-Лагранжа. Особо надо отметить результаты С. Сили [3], подробно рассмотревшего соотношения между силовыми функциями и электромеханическими аналогами и успешно применившего их к исследованию электромеханических преобразователей. Однако даже в практике научных исследований, не говоря уже об учебном процессе, уравнения движения в обобщенных координатах используются совершенно недостаточно, что в известной степени объясняется исторически сложившейся традицией считать законы Кирхгофа основными, а условия баланса мощностей лишь вспомогательными, проверочными.

Чтобы формализовать порядок получения уравнений по II закону Кирхгофа и лучше увязать их с общими законами сохранения энергии, нам представляется полезным использовать уравнения движения в несколько измененной форме записи.

Общепринятая форма записи уравнения движения имеет вид [3]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial q} + \frac{\partial F_R}{\partial \dot{q}} = N, \quad (1)$$

где $\mathcal{E}_k$ и $\mathcal{E}_n$ — силовые функции, соответствующие кинетической и потенциальной энергии, запасаемой в индуктивности L при токе i и емкости C при заряде q ;

$$\mathcal{E}_k = \sum \frac{1}{2} L_k \dot{i}_k^2; \quad \mathcal{E}_n = \sum \frac{1}{2} \frac{q_k^2}{C}; \quad (2)$$

F_R — функция рассеяния Релея, учитывающая тепловые потери в сопротивлении R ;

$$F_R = \sum \frac{1}{2} R_k \dot{i}_k^2; \quad (3)$$

$\dot{q}$ — производная от обобщенной координаты по времени, в нашем случае — ток i ;

N — обобщенная составляющая приложенной силы (в нашем случае — напряжение).

Если учесть, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial q} &= 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial i} \right) = L \frac{di}{dt} = U_L, \\ \frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial q} &= \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt = U_C; \quad \frac{\partial F_R}{\partial i} = Ri, \end{aligned} \quad (4)$$

и использовать выражения для реактивных и активных мощностей

$$Q_{Lk} = I_k^2 \omega L_k = U_{Lk} I_k; \quad Q_{Ck} = I_k^2 \frac{1}{\omega C_k} = U_{Ck} I_k,$$

$$\sum Q_H = \sum Q_{Lk} - \sum Q_{Ck}; \quad \sum P_H = \sum I_k^2 R_k,$$

то уравнение (1) можно заменить другим (6), непосредственно связанным с традиционно хорошо известным каждому студенту, а значит и инженеру, условием баланса активных и реактивных мощностей источника (индекс „И“) и нагрузки (индекс „Н“):

$$\frac{\partial S_{И}}{\partial I_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial S_H}{\partial I_k}, \quad (6)$$

где

$$S_{И} = \sum E_k I_k \cos \varphi_k + j \sum E_k I_k \sin \varphi_k;$$

$$S_H = \sum P_H + j \sum Q_H;$$

E_k и I_k — действующие значения напряжения и тока источников питания;

φ — угол между соответствующими э.д.с. и токами источников. Таким образом, записав уравнения баланса мощностей

$$P_{И} = \sum E_k I_k \cos \varphi_k = \sum P_H;$$

$$Q_{И} = \sum E_k I_k \sin \varphi_k = \sum Q_H, \quad (7)$$

и уменьшив число неизвестных при помощи I закона Кирхгофа, легко по (6) получить уравнения по II закону Кирхгофа для всех контуров схемы.

Предлагаемая методика применима при решении задач по расчету линейных цепей постоянного и переменного тока и позволяет упростить переход к расчету нелинейных цепей с помощью энергетических соотношений.

II. Цепи с нелинейными реактивными сопротивлениями

В [7, 8] для расчета индуктивного параметрического генератора (параметрона) использовано условие энергетического баланса для магнитной энергии $W_M(t)$ в системе без потерь:

$$\frac{d}{dt} [W_M(t)] = 0, \quad (8)$$

где $W_M(t) = 0,5 B(t) \cdot H(t)$,

$B(t)$ и $H(t)$ — мгновенные значения индукции и напряженности. Для общего случая, т. е. при наличии потерь в системе, уравнение, аналогичное (8), получено в [9] как равенство скорости уменьшения общей энергии системы скорости теплового рассеяния

$$-\frac{dW}{dt} = \sum R_k i_k^2. \quad (9)$$

Учитывая единственность разложения функций в ряд Фурье, из (8) и (9) можно получить столько уравнений, сколько гармоник мощности учитывается при анализе

$$-\frac{dW}{dt} (k\omega t) = \sum R_k i_k^2 (k\omega t). \quad (10)$$

Подобный подход был использован автором и его сотрудниками при анализе режимов повторения и удвоения частоты в параметронах, а также при исследовании активных компенсационных сглаживающих фильтров, и позволил получить удобные для инженерных расчетов связи между индукциями, напряженностями и углами между ними.

III. Цепи с нелинейными активными сопротивлениями

При анализе цепей с нелинейными активными сопротивлениями, в частности — вентилями, некоторые авторы в том или ином виде используют энергетические соотношения для мгновенных мощностей [12, 10, 11 и др.]. Однако в указанных и ряде подобных работ недоиспользуются возможности разложения мгновенной мощности на отдельные гармоники и на их синусные и косинусные составляющие, что позволяет существенно увеличить число уравнений и проводить часть расчетных преобразований безотносительно к виду нелинейной характеристики и ее аппроксимации. В работах [14, 13] рассмотрены некоторые вопросы расчета цепей с вентилями при предлагаемом подходе, а последние исследования [15] подтверждают его универсальность и плодотворность, особенно при идеальных вентилях. Для таких условий удобно использовать уравнение баланса синусных и косинусных составляющих одинаковых по частоте гармоник мощности на «входе» и «выходе» схемы с идеальными вентилями:

$$\begin{aligned} p_{с.вх} (k\omega t) &= p_{с.вых} (k\omega t), \\ p_{к.вх} (k\omega t) &= p_{к.вых} (k\omega t). \end{aligned} \quad (11)$$

Интересно отметить, что для реактивных систем без потерь, в частности — для параметрона в режиме повторения частоты, справедливо аналогичное по форме с (11) равенство реактивных мощностей, однако

в общем случае, особенно при появлении постоянной составляющей индукции (режим удвоения частоты), вопрос о возможности применения такого подхода остается открытым и требует проведения дополнительных исследований.

IV. Закон сохранения мгновенной мощности

Анализ рассмотренных выше вопросов показывает особую перспективность широкого применения закона сохранения мгновенной мощности, принципиально давно известного, но незаслуженно неиспользуемого в научных исследованиях. Особое внимание этому вопросу посвящено в монографии «Теорема Телегена и электрические цепи» [16], где показано, что сумма мгновенных мощностей во всех элементах любой схемы равна нулю, независимо от природы элементов и возбуждений. Отсюда следует, что уравнения вида (8), (10), (11) можно трактовать как частные случаи более общего уравнения (12) для суммы гармоник мгновенных мощностей одинаковой частоты на всех элементах цепи

$$\sum p_n(k\omega t) = 0. \quad (12)$$

При этом частным случаем уравнения (12) при $k = 0$ будет и широко используемое на практике условие баланса средних за период активных (или реактивных) мощностей.

Выводы

1. Наиболее универсальными являются соотношения, вытекающие из законов сохранения энергии.
2. В практике расчета нелинейных и линейных цепей следует шире использовать расчетные соотношения, вытекающие из условий баланса мгновенных мощностей.
3. Можно полагать, что принципиально возможно создание единой методики расчета линейных и нелинейных цепей, базирующейся на соотношениях для энергий и мощностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. И. Гольдштейн, Н. И. Кузбных, В. Н. Станевко. Исследование энергетических соотношений для мгновенной мощности в нелинейных электрических цепях. Сб. «Доклады VI НТК по вопросам автоматизации производства», том. 2, изд. ТГУ, Томск, 1969.
2. Е. И. Гольдштейн. Энергетические соотношения в нелинейных цепях с высшими гармониками. Доклады II Всесоюзного семинара по высшим гармоникам. Томск, 1967.
3. С. Сили. Электромеханическое преобразование энергии. М., «Энергия», 1968.
4. И. В. Пентегов, И. В. Волков. Лагранжиан электрической цепи с сосредоточенными параметрами. «Электричество», № 5, 1969.
5. Л. В. Сафрис, В. Ф. Попова. Принцип наименьшего действия в теории электрических цепей. Сб. теоретическая электротехника, вып. 10, изд-во Львов. Госуниверситета, 1970.
6. А. Н. Милых, А. К. Шидловский. Принцип взаимности и обратимость явлений в электротехнике. Киев, Изд. «Наукова думка», 1967.
7. Е. И. Гольдштейн. Использование условий энергетического баланса при расчете установившегося режима в параметрической цепи с изменяющейся индуктив-

ностью. Тезисы докладов III Всесоюзной межвузовской конференции по теории и методам расчета нелинейных электрических цепей и систем. Изд. «ФАН», Ташкент, 1967.

8. Е. И. Гольдштейн. Использование низкочастотных индуктивных параметров в качестве управляемых генераторов систем телемеханики. Тезисы докладов XII Всесоюзного совещания по магнитным элементам автоматики и вычислительной техники. Изд. «ФАН», Ташкент, 1968.

9. В. С майт. Электротехника и электродинамика. М., ИЛ, 1954.

10. Дж. Б. Деннис. Математическое программирование и электрические цепи. М., ИЛ, 1961.

11. Л. Р. Нейман. Обобщенный метод анализа переходных и установившихся процессов в цепях с преобразователями с учетом активных сопротивлений. «Энергетика и транспорт», № 2, 1972.

12. М. А. Слоним. Уравнения переходных и установившихся процессов в вентильных схемах. «Энергетика и транспорт», № 5, 1971.

13. Е. И. Гольдштейн, Н. И. Кузевных. К исследованию энергетических соотношений в цепях с мостовыми выпрямителями. Доклады II Всесоюзного семинара по высшим гармоникам. Томск, Изд-во ТГУ, 1971.

14. Е. И. Гольдштейн, А. Ф. Терпугова. Инварианты мгновенной мощности для цепей с идеальными активными нелинейными сопротивлениями. Тезисы докладов IV Всесоюзной конференции по нелинейным цепям. Вып. 1, Ташкент, 1971.

15. Е. И. Гольдштейн, Н. И. Кузевных, Н. И. Кузьменко. Использование энергетических соотношений при расчете цепей с идеальными вентилями. Тезисы докладов IV Всесоюзной конференции по нелинейным цепям. Вып. 1, Ташкент, 1971.

16. P. Penfield, R. Spance, S. Duinker. «Tellegens theorem and Electrical Networks», Research Monograph № 58, «M. I. T. Press», 1970.
