

УДК 621.3.014.32.001.2

РАСЧЕТ СОПРОТИВЛЕНИЙ СООСНЫХ ТРУБЧАТЫХ ПРОВОДНИКОВ С УЧЕТОМ ПОВЕРХНОСТНОГО ЭФФЕКТА

В. С. СОКОЛОВ

(Представлена научным семинаром кафедры ТОЭ)

Поверхностный эффект в цилиндрических сплошных и трубчатых проводниках весьма подробно рассмотрен в литературе по ТОЭ [1, 2, 3 и др.]. Но в известной автору литературе конечные формулы, пригодные для непосредственных инженерных расчетов, приведены только для сопротивлений сплошного одиночного цилиндра и коаксиального кабеля с непрозрачной оболочкой.

В то же время при практических расчетах возможны случаи, когда толщина труб соизмерима с глубиной проникновения, и полного затухания волны в толще трубы не происходит.

В настоящей статье дается расчет сопротивлений соосных трубчатых проводников с учетом поверхностного эффекта для общего случая, когда толщина труб соизмерима с глубиной проникновения, то есть трубы являются прозрачными или полупрозрачными для электромагнитной волны.

Рассмотрим систему соосных труб (рис. 1), служащих прямым и обратным проводом для синусоидального тока I с угловой частотой ω . По внутренней трубе ток идет «от нас», а по внешней — «к нам». Радиусы внутренней трубы r_1 и r_2 , а внешней — r_3 и r_4 .

Удельное сопротивление материала труб γ , относительная проницаемость μ . При расчете полагаем, что μ постоянна и не зависит от напряженности магнитного поля, а явлением гистерезиса можно пренебречь. Не учитываем также и токи смещения между цилиндрами, то есть считаем, что ток во внутренней и внешней трубе в любом сечении один и тот же.

В силу симметрии системы векторы напряженности электрического поля $\vec{E}$ и плотности тока $\vec{j}$ в трубах имеют только осевую составляющую, а вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}$ всюду направлен по касательной к окружностям, concentрическим с поперечными сечениями поверхностей цилиндров.

$$\vec{E} = \vec{E}_z \text{ при } r_1 < r < r_2 \text{ и } r_3 < r < r_4, \vec{H} = \vec{H}_\alpha.$$

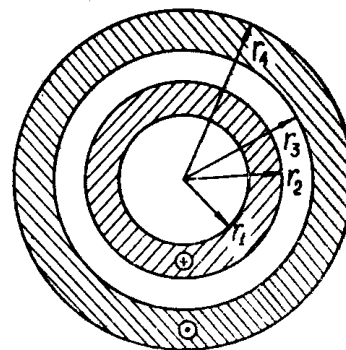


Рис. 1

Дифференциальное уравнение для электрического поля в проводящей среде в комплексной форме имеет вид

$$\nabla^2 \vec{E} = j\omega\mu\mu_0\gamma \vec{E}. \quad (1)$$

Раскрывая оператор ∇^2 в цилиндрической системе координат с учетом того, что $\vec{E}$ зависит только от координаты r , получим:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vec{E}}{\partial r} \right) = j\omega\mu\mu_0\gamma \vec{E},$$

$$\frac{d^2 \vec{E}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vec{E}}{dr} - j\omega\mu\mu_0\gamma \vec{E} = 0. \quad (2)$$

Заменяя в уравнении (2) переменную r переменной $y = r\sqrt{-j\omega\mu\mu_0\gamma}$, получим уравнение Бесселя нулевого порядка

$$\frac{d^2 \vec{E}}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d\vec{E}}{dy} + \vec{E} = 0, \quad (3)$$

решение которого может быть записано в виде

$$\vec{E} = \dot{A}H_0^{(2)}(y) + \dot{B}J_0(y). \quad (4)$$

Здесь $J_0(y)$ — функция Бесселя нулевого порядка первого рода, $H_0^{(2)}(y)$ — функция Ганкеля нулевого порядка второго вида (функция Бесселя третьего рода), $\dot{A}$ и $\dot{B}$ — постоянные интегрирования.

Таким образом, напряженность электрического поля для внутренней трубы равна

$$\vec{E}_1 = \dot{A}_1 H_0^{(2)}(y) + \dot{B}_1 J_0(y) \quad (5)$$

и соответственно для внешней трубы

$$\vec{E}_2 = \dot{A}_2 H_0^{(2)}(y) + \dot{B}_2 J_0(y). \quad (6)$$

Напряженности электрического и магнитного полей связаны между собой вторым уравнением Максвелла:

$$r_0 \text{rot} \vec{E} = -j\omega\mu\mu_0 \vec{H}.$$

Представляя ротор в цилиндрических координатах и учитывая, что в данном случае $\vec{E}$ и $\vec{H}$ зависят только от координаты r (переменной y), получим

$$\dot{H} = \frac{1}{jz_c} \frac{d\vec{E}}{dy}, \quad (7)$$

где $z_c = \sqrt{\frac{j\omega\mu\mu_0}{\gamma}}$ — волновое сопротивление среды.

Выполняя дифференцирование в уравнении (7), получим для внутренней трубы:

$$\dot{H}_1 = \frac{1}{jz_c} [\dot{A}_1 H_1^{(2)}(y) + \dot{B}_1 J_1(y)] \quad (8)$$

и для внешней:

$$\dot{H}_2 = \frac{1}{jz_c} [\dot{A}_2 H_1^{(2)}(y) + \dot{B}_2 J_1(y)], \quad (9)$$

где $H_1^{(2)}(y)$ — функция Ганкеля второго вида первого порядка, а $J_1(y)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка.

Использованы формулы приведения

$$\frac{d}{dy} J_0(y) = -J_1(y) \text{ и } \frac{d}{dy} H_0^{(2)}(y) \simeq -H_1^{(2)}(y).$$

Постоянные интегрирования $\dot{A}_1, \dot{B}_1, \dot{A}_2, \dot{B}_2$ определяем из уравнений (8) и (9), используя граничные условия:

- 1) $\dot{H} = 0$ при $r = r_1$,
- 2) $\dot{H}_1 = \dot{I}/2\pi r_2$ при $r = r_2$,
- 3) $\dot{H}_2 = \dot{I}/2\pi r_3$ при $r = r_3$,
- 4) $\dot{H}_2 = 0$ при $r = r_4$.

В результате решения системы уравнений (10), получим

$$\dot{A}_1 = -\frac{jz_c \dot{I} J_1(y_1)}{2\pi r_2 \cdot D_1}, \quad \dot{B}_1 = \frac{jz_c \dot{I} H_1^{(2)}(y_1)}{2\pi r_2 D_1}, \quad (11)$$

$$\dot{A}_2 = -\frac{jz_c \dot{I} J_1(y_4)}{2\pi r_3 D_2}, \quad \dot{B}_2 = \frac{jz_c \dot{I} H_1^{(2)}(y_4)}{2\pi r_3 D_2}, \quad (12)$$

где

$$D_1 = \begin{vmatrix} J_1(y_1) H_1^{(2)}(y_1) \\ J_1(y_2) H_1^{(2)}(y_2) \end{vmatrix} \text{ и } D_2 = \begin{vmatrix} J_1(y_4) H_1^{(2)}(y_4) \\ J_1(y_3) H_1^{(2)}(y_3) \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Для определения полного сопротивления проводника нужно определить поток вектора Пойтинга, проникающий через его поверхность на длине в 1 м и разделить его квадрат тока, проходящего по проводнику

$$Z = R + jx = \frac{-\oint [\vec{E}_{\text{пов}} \cdot \vec{H}_{\text{пов}}^*] d\vec{s}}{I^2}. \quad (14)$$

Энергия проникает во внутренний проводник только с наружной поверхности ($r = r_2$), а во внешний — только с внутренней ($r = r_3$), так как $H = 0$ при $r = r_1$ и $r = r_4$.

Так как в рассматриваемом случае напряженность магнитного поля на поверхности внутреннего проводника $\dot{H} = \dot{I}/2\pi r_2$, а элемент поверхности $ds = 2\pi r_2 l$, то

$$Z_{\text{вн}} = R + jx = \frac{\dot{E}_{\text{пов}} \cdot \dot{I}^* \cdot 2\pi r_2}{\dot{I} \cdot 2\pi r_2} = \frac{\dot{E}_{\text{пов}}}{\dot{I}}. \quad (15)$$

Аналогично определяется и $Z_{\text{вн}}$

Используя (4), а также (11) и (12), по формуле (15) определяем сопротивления труб, внутренней

$$Z_{\text{вн}} = \frac{jz_c}{2\pi r_2} \left[\frac{J_1(y_1) H_0^{(2)}(y_2) - H_1^{(2)}(y_1) J_0(y_2)}{J_1(y_2) H_1^{(2)}(y_1) - H_1^{(2)}(y_2) J_1(y_1)} \right] \quad (16)$$

и внешней

$$Z_{\text{вн}} = \frac{jz_c}{2\pi r_3} \left[\frac{J_1(y_4) H_0^{(2)}(y_3) - H_1^{(2)}(y_4) J_0(y_3)}{J_1(y_3) H_1^{(2)}(y_4) - H_1^{(2)}(y_3) J_1(y_4)} \right]. \quad (17)$$

Из формул (16) и (17) легко получить формулы для сопротивлений жилы и непрозрачной оболочки коаксиального кабеля [1]. Сопротивле-

ние жилы получим, если в формуле (15) примем $r = 0$. Так как $J_1(0) = 0$, то

$$Z_{\text{вн}} = -\frac{jz_c}{2\pi r_2} \cdot \frac{J_0(y_2)}{J_1(y_2)}. \quad (18)$$

Для случая непрозрачной оболочки коаксиального кабеля в формуле (17) следует принять $r_4 \rightarrow \infty$ ($y_4 \rightarrow \infty$), так как если волна полностью затухает в толще трубы, то распределение плотности тока в ней не зависит от наружного радиуса и, в частности, должно остаться тем же самым и при $r \rightarrow \infty$.

Так как $H_1^{(2)}(y) = 0$ при $y \rightarrow \infty$, то получим

$$Z_{\text{вн}} = -\frac{jz_c}{2\pi r_2} \frac{H_0^{(2)}(y_2)}{H_1^{(2)}(y_2)}. \quad (19)$$

Формулы (18) и (19) полностью идентичны при несколько других обозначениях формулам (6—90б) и (6—97) [1].

Формулу (16) для внутренней трубы можно непосредственно использовать для расчета сопротивления одиночной трубы, так как магнитное поле тока внешней трубы во внутреннюю трубу не проникает.

Формула (17) учитывает эффект близости, который проявляется в том, что под влиянием магнитного поля тока внутренней трубы плотность тока во внешней трубе с ростом радиуса уменьшается, а не увеличивается, как в случае одиночной трубы.

Таблицы функций Бесселя и Ганкеля от комплексного аргумента, а также формулы для их приближенного определения даны в [1, 2, 5, 6].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Нетушил, К. М. Поливанов. Основы электротехники. Ч. 3, Госэнергоиздат, 1956.
2. К. М. Поливанов. Теоретические основы электротехники. Ч. 3, «Энергия», 1969.
3. Л. А. Бессонов. Теоретические основы электротехники. «Высшая школа», 1967.
4. Л. Р. Нейман и К. С. Демирчян. Теоретические основы электротехники. Т. 2, «Энергия», 1967.
5. Е. Янке, Ф. Эмде. Таблицы функций с формулами и кривыми. Физматгиз, 1959.
6. Г. Б. Двайт. Таблицы интегралов и другие математические формулы. «Наука», 1964.