ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 114 1964

ОБЩИЙ ЗАКОН СВЯЗИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ[1])

Г. А. ДОЩИНСКИЙ

(Представлено научным семинаром кафедры сопротивления материалов)

Сопротивление материалов при решении технических задач базируется на комплексе закономерностей, устанавливающих связь между напряженным и деформированным состоянием материального тела. К числу этих основополагающих закономерностей относятся такие, как закон Гука для растяжения — сжатия, закон Гука для сдвига, объемный закон Гука, зависимость между интенсивностью напряжений и деформаций при пластическом деформировании. Каждая их этих зависимостей считается нередко самостоятельным законом, определяющим поведение материала в различных условиях деформирования. Ниже показано, что все эти закономерности могут быть обобщены для практических расчетов единым выражением, определяющим связь между напряженным и деформированным состоянием в изотропном теле.

Напряженное состояние в окрестности любой точки нагруженного тела является полностью определенным, если известны (по величине и направлению) 3 главных напряжения: σ_1; σ_2; σ_3. Знание этих напряжений позволяет по известным зависимостям теории напряженного состояния определить напряжения в любой площадке, проходящей через эту точку.

Деформированное состояние аналогично может быть охарактеризовано 3 главными линейными деформациями: e_1; e_2; e_3, по которым определяются на основе зависимостей теории деформаций линейные и угловые изменения в любом направлении.

Главные деформации при упругом поведении материала совпадают по направлениям с главными напряжениями. Подобное положение обычно предполагается справедливым и при пластической деформации. Поэтому физическая зависимость между напряженным и деформированным состоянием может быть определена уравнением, связывающим величину 3 главных напряжений с 3 главными деформациями.

---

[1]) Сообщение на заседании Научного Совета АН СССР по проблеме «Научные основы прочности и пластичности», проведенном совместно с Московским Государственным университетом и Институтом механики АН СССР 15—16 июня 1961 г. в г. Москве.

Связь между напряжениями и деформациями в пределах упругости устанавливается в элементарной форме известными зависимостями обобщенного закона Гука, которые для главных направлений имеют вид

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\,[\sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3]; \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}\,[\sigma_2 - \nu\sigma_3 - \nu\sigma_1];$$
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\,[\sigma_3 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_1], \tag{1}$$

здесь E — модуль нормальной упругости, ν — коэффициент Пуассона. Каждое из этих выражений само по себе определяет значение отдельного компонента деформации для заданного напряженного состояния по одному из главных направлений.

Наиболее общим уравнением связи между напряженным и деформированным состоянием в целом может быть предложена зависимость

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{4\nu - 2\nu^2}{1 + 2\nu^2}\,(\sigma_1\cdot\sigma_2 + \sigma_2\cdot\sigma_3 + \sigma_3\cdot\sigma_1)} =$$
$$= E\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}{1 + 2\nu^2}}. \tag{2}$$

Из этого выражения вытекают зависимости между напряжением и упругой деформацией, являющейся характерной при любом конкретном типе деформации.

Например, для растяжения

$$\sigma_1 = \sigma;\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0;\ \varepsilon_1 = \varepsilon;\ \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu\varepsilon.$$

Подставляя эти значения в (2), получим выражение закона Гука для растяжения

$$\sigma = E\cdot\varepsilon,$$

для сдвига $\sigma_1 = \tau;\ \sigma_2 = 0;\ \sigma_3 = -\tau;\ \varepsilon_1 = \frac{\gamma}{2};\quad \varepsilon_2 = 0;\quad \varepsilon_3 = -\frac{\gamma}{2}$

и из (2) получим выражение закона Гука для сдвига

$$\tau = \frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\gamma, \quad (\tau = G\cdot\gamma)$$

Для чисто объемной деформации под гидростатическим давлением

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p;\ \ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_{ср} = \frac{\Theta}{3}.$$

Уравнение (2) дает

$$p = \frac{E}{3(1-2\nu)}\cdot\Theta, \text{ или } p = K\cdot\Theta.$$

Следовательно, упругая деформация любого вида характеризуется зависимостью (2), а ее отдельные компоненты определяются выражениями (1), и при характеристике упругого поведения материала в практических расчетах отпадает необходимость исходить из самостоятельного раздельного существования законов упругой сдвиговой, линейной и объемной деформации.

Зависимость (2), которая может быть названа обобщенной формулой закона Гука, не представляется лишь простым построением, тождественным системе уравнений (1), а есть закономерность, устанавливающая соответствие характеристик материала (E, G, K и т. п.) при различных типах деформаций. Это более явственно обнаруживается при упруго-пластической деформации, когда соответствующие характеристики зависят от состояния материала и могут рассматриваться как функции степени деформации.

Если принять за пределами упругости связь между бесконечно малыми приращениями напряжений и деформаций в форме линеанизированной зависимости, свойственной упругой деформации, то интегрирование по параметру нагружения (при простом нагружении) показывает, что полные (состоящие из упругой и пластической части) компоненты главных деформаций могут быть определены по выражениям, аналогичным уравнениям (1)[4].

$$e_1 = \frac{1}{E(\lambda)}\left[\sigma_1 - \nu(\lambda)(\sigma_2 + \sigma_3)\right]; \quad e_2 \frac{1}{E(\lambda)}\left[\sigma_2 - \nu(\lambda)(\sigma_3 + \sigma_1)\right];$$

$$e_3 = \frac{1}{E(\lambda)}\left[\sigma_3 - \nu(\lambda)(\sigma_1 + \sigma_2)\right], \tag{3}$$

где $E(\lambda) = \frac{\sigma}{e}$ — секущий модуль в исходной диаграмме растяжения, а $\nu(\lambda) = \frac{e_{\text{попер.}}}{e_{\text{прод.}}}$ — коэффициент поперечной упруго-пластической деформации — характеристики материала, изменяющиеся с ростом степени деформирования при изотропном его упрочнении.

Следует подчеркнуть то обстоятельство, что простым нагружением мы называем здесь такое нагружение, при котором все полные компоненты напряжений: σ_1; σ_2; σ_3 меняются пропорционально одному параметру, сохраняя неизменным свое направление. Заметим, что обычно под простым нагружением в теории пластичности подразумевают нагружение с изменяющимися пропорционально одному параметру компонентами девиатора напряжений, хотя в практических условиях нагружения обычно пропорционально этому параметру изменяются и компоненты шаровой части тензора напряжений (это видно на примере хотя бы деформации растяжения). Подобный обычный подход связан в теории пластичности с некоторой приближенностью, игнорирующей ряд особенностей упругого поведения материала за пределами упругости и принятием исходной гипотезы об упругой объемной деформируемости материалов. Однако последнее, как отмечено ниже, может и не являться непременно необходимым положением.

Отметим заодно, что упруго-пластическим здесь называется состояние материала, при котором каждый элементарный объем тела характеризуется при деформации искажениями, частично исчезающими после разгрузки, частично необратимыми (например, стержень, растянутый за пределы упругости в неразгруженном виде). Частными видами подобной упруго-пластической деформируемости, как общего свойства реальных материалов, в пренебрежении одной из сторон, могут быть выведены «чисто упругое» и «чисто пластическое» состояния.

Иногда в практических задачах «упруго-пластическим» называют такое состояние, когда в нагруженной детали существует две зоны: «упругая» и «пластическая». Такое разделение может носить лишь условный характер, заранее предполагая приближенность, ибо при снятии нагрузки и в «пластической» зоне будут иметь место исчезающие («упругие») деформации. Более соответствующим характеру происходящих в детали деформаций будет подразделение на зону «упругой» и зону «упруго-пластической» деформаций (если у материала обнаруживается явно выраженный предел упругости).

Для указанного выше вида простого нагружения связь между напряженным состоянием и деформацией при упруго-пластическом деформировании может быть определена зависимостью по форме, сходной с выражением (2).

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{4\nu(\lambda) - 2\nu(\lambda)^2}{1 + 2\nu(\lambda)^2}(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)} =$$

$$= E(\lambda) \cdot \sqrt{\frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}{1 + 2\nu(\lambda)^2}}. \qquad (4)$$

Так как $\nu(\lambda)$ — относительная безразмерная характеристика, то зависимость (4) можно рассматривать как связь между обобщенным напряжением и обобщенной деформацией

$$\sigma_{\text{обобщ.}} = E(\lambda) \cdot e_{\text{обобщ.}} \qquad (5)$$

Допустимость использования этой закономерности в практических расчетах может быть обоснована тем, что кривые деформирования при различных напряженных состояниях, построенные по данным многих исследователей, а также опытов автора со сталью, в координатах $\sigma_{\text{обобщ.}} - e_{\text{обобщ.}}$ почти сливаются в единую кривую, характеризующую упруго-пластическое поведение материалов. С количественной стороны к тому же выражение (4) дает результаты, близкие с практически используемой зависимостью между интенсивностями напряжений и деформаций.

Аналогично приведенному выше из одной и той же зависимости (4) можем получить для растяжения $\sigma = E(\lambda) \cdot e$,

для сдвига $\tau = G(\lambda) \cdot \gamma$,

для гидростатического давления $p = K(\lambda) \cdot \Theta$.

Зависимость (4) полностью совпадает с диаграммой растяжения; что позволяет установить из этого опыта характеристики материала, $E(\lambda)$ и $\nu(\lambda)$ для любой степени деформации.

Из перехода зависимости (4) в выражение $p = K(\lambda) \cdot \Theta$ при гидростатическом сжатии вытекает возможность и иного истолкования поведения материалов в условиях всестороннего равномерного давления. Этот вид загружения может и не рассматриваться как какой-то особый, для которого материалы, обладающие упруго-пластической деформируемостью при различных напряженных состояниях, с поведением, характеризуемым переменными с ростом деформации характеристиками $E(\lambda)$ и $\nu(\lambda)$, как бы перерождаются и становятся только упругими при частном виде загружения — гидростатическом давлении. Из опытного факта приблизительного равенства $K(\lambda)$ значению модуля объемной упругости K

$$K(\lambda) = \frac{E(\lambda)}{3[1 - 2\nu(\lambda)]} \approx K$$

не следует только однозначное, обычно используемое решение, характерное для упругой деформации

$$E(\lambda) = E; \ \nu(\lambda) = \nu,$$

$E(\lambda)$ и $\nu(\lambda)$ могут меняться и так, что отношение $\dfrac{E(\lambda)}{3[1 - 2\nu(\lambda)]}$ может оставаться слабо изменяющимся и даже постоянным. Поэтому упруго-пластическая деформация, одинаковая по характеру для всех напряженных состояний, в условиях гидростатического давления, будет лишь наблюдаться кажуще упругой, вследствие равенства этого отношения при нагрузке и разгрузке. В опыте с всесторонним равномерным давлением измеряемыми величинами являются давление и объем. Поэтому достоверным экспериментальным фактом может считаться лишь то, что

$$K(\lambda) = \frac{p}{\Theta} \approx K,$$

но постоянства $\nu(\lambda) = \nu$ в этом случае опыт определенно не утверждает, так как измерения $\nu(\lambda)$ возможны лишь при наличии разности между компонентами деформации e_1; e_2; e_3 (это видно и из (3)), однако этой разницы в данных условиях не наблюдается. Подобное решение, когда $K(\lambda)$ определяется независимым изменением $E(\lambda)$ и $\nu(\lambda)$, допускает и нелинейность связи между гидростатическим давлением и объемной деформацией, что соответствует данным Бриджмена П. для высоких давлений [3].

Равенство $E(\lambda) = E$ и $\nu(\lambda) = \nu$ при $K(\lambda) = K$, очевидно, может быть принято для всех напряженных состояний, в том числе и для гидростатического давления, при разгрузке.

Компоненты пластической деформации могут быть определены как разность между полной (упруго-пластической) и упругой деформацией в форме

$$\delta_1 = \frac{1}{D(\lambda)}\left[\sigma_1 - \nu_0(\sigma_2 + \sigma_3)\right]; \quad \delta_2 = \frac{1}{D(\lambda)}\left[\sigma_2 - \nu_0(\sigma_3 + \sigma_1)\right];$$

$$\delta_3 = \frac{1}{D(\lambda)}\left[\sigma_3 - \nu_0(\sigma_1 + \sigma_2)\right], \tag{6}$$

где $D(\lambda) = \dfrac{E(\lambda)\cdot E}{E - E(\lambda)}$ — секущий модуль пластичности,

а $\nu_0 = \dfrac{E\cdot\nu(\lambda) - E(\lambda)\cdot\nu}{E - E(\lambda)}$ — коэффициент поперечной пластической деформации. При допущении о неизменности объема для пластической деформации

$$\nu_0 = 0{,}5 \text{ и } \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0.$$

Так как $\quad \delta_n = \delta_n - \dfrac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}{3} \quad (n = 1,\ 2,\ 3),$

то обобщенная зависимость между напряжениями и деформацией в форме (4) при пластическом деформировании переходит в известную в теории пластичности зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\cdot\sigma_2 - \sigma_2\cdot\sigma_3 - \sigma_3\cdot\sigma_1} = D(\lambda)\cdot\sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}{1 + 2\nu_0^2}} =$$

$$= \frac{2}{3}D(\lambda)\cdot\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 - \delta_1\cdot\delta_2 - \delta_2\cdot\delta_3 - \delta_3\cdot\delta_1}\ . \tag{7}$$

Таким образом, зависимость (4) может рассматриваться как единое обобщенное выражение связи между напряженным и деформированным состоянием при упругой, пластической и упруго-пластической деформациях.

Взятие из исходного опыта (например, растяжения) дополнительной характеристики материала $\mu(\lambda)$ позволяет учесть ряд особенностей объемной деформируемости материалов, как, например, отмеченную выше нелинейность, остаточную деформацию объема у материалов с дефектностью сплошности (реальных металлов, пеноматериалов и т. п.). Если пренебречь этими особенностями, то в практических расчетах можно и ограничиваться лишь одной экспериментальной функцией

$$E(\lambda) = \frac{\sigma}{e}$$

с дополнительным определением $\mu(\lambda)$ по выражению

$$\mu(\lambda) \approx 0{,}5 - \frac{1-2\mu}{2E} \cdot \frac{\delta}{e},$$

дающему по опытам А. М. Жукова [2] и других значения $\mu(\lambda)$, довольно близкие с действительными характеристиками материала.

Зависимость (4) за счет учета изменения характеристик материала в процессе развития деформации постепенно автоматически преобразуется из общей формулы закона Гука (2) в закономерность (7), соответствующую главной закономерности пластического поведения. Подобная универсальность бесспорно может быть удобной для практических расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
2. Жуков А. М. О коэффициенте Пуассона в пластической области. Известия АН СССР, ОТН, № 12, 1954.
3. Бриджмен П. Новейшие работы в области высоких давлений. ГИИЛ, 1948.
4. Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. Москва, 1954.