

ПРОВОДЯЩИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ЦИЛИНДР В ЩЕЛЕВОМ ВИХРЕТОКОВОМ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕ

Р. М. ЗАКИРОВ, В. К. ЖУКОВ

(Представлена научно-техническим семинаром кафедры информационно-
измерительной техники)

В [1] приводится решение задачи об эллиптическом проводящем цилиндре, помещенном в поперечное однородное переменное магнитное поле. При выводе аналитического выражения для векторного потенциала результирующего магнитного поля были сделаны упрощения, которые понизили его точность.

В данной работе дается более строгое решение указанной задачи. Волновое уравнение для векторного потенциала $\dot{A}$ магнитного поля в ортогональной системе эллиптических цилиндрических координат имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \dot{A}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}}{\partial \varphi^2} + 2q (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\varphi) \dot{A} = 0. \quad (1)$$

Здесь

$$q = \frac{1}{4} \kappa^2 h^2 = \frac{1}{4} \omega^2 \left(\varepsilon_a - i \frac{\sigma}{\omega} \right) \mu_a (a^2 - b^2), \quad (2)$$

где ω — угловая частота возбуждающего поля;

$\varepsilon_a = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon$ — диэлектрическая проницаемость среды;

$\mu_a = \mu_0 \mu$ — магнитная проницаемость среды;

σ — удельная электропроводность среды;

a — большая и b — малая полуоси эллипса, образуемого нормальным сечением цилиндра;

$h = \sqrt{a^2 - b^2}$ — половина расстояния между фокусами эллипса.

Для проводящей среды цилиндра

$$q = q' = -\frac{1}{4} i \omega \sigma \mu_a h^2, \quad (3)$$

а для непроводящего пространства, окружающего цилиндр,

$$q = q'' = \frac{1}{4} \omega^2 \varepsilon_a \mu_a h^2. \quad (4)$$

Обозначим векторный потенциал поля в сердечнике $\dot{A}'$, а в пространстве — $\dot{A}''$. Тогда волновые уравнения поля в сердечнике и в пространстве будут иметь вид:

$$\frac{\partial^2 \dot{A}'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}'}{\partial \varphi^2} + 2q' (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\varphi) \dot{A}' = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{A}''}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}''}{\partial \varphi^2} + 2q'' (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\varphi) \dot{A}'' = 0. \quad (6)$$

Решение уравнения (5), как это следует из физической картины поля, должно быть симметричным относительно малой оси эллипса

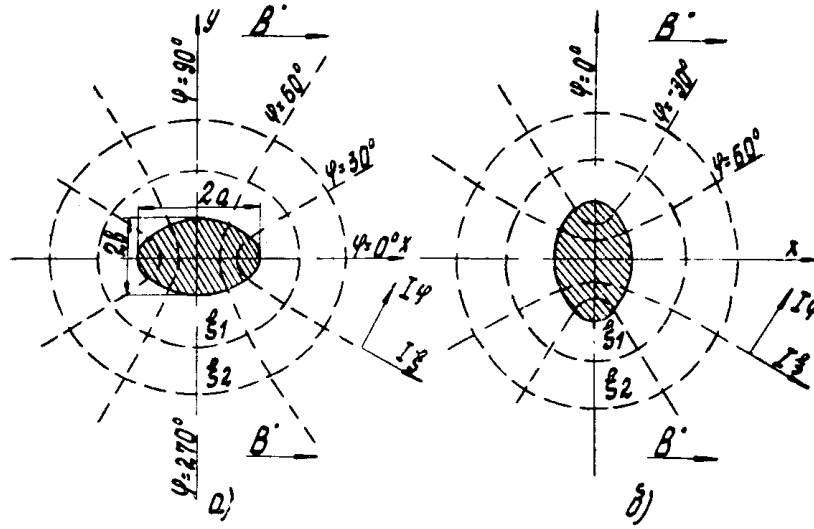


Рис. 1. Эллиптический цилиндр в поперечном магнитном поле

и несимметричным относительно большой (рис. 1 а). Удовлетворяющее этому условию решение выражается через функции Матье [2]:

$$\dot{A}' = \sum_{n=0}^{\infty} [\dot{C}_{2n+1} \text{Se}_{2n+1}(\xi, q') \text{se}_{2n+1}(\varphi, q') + \dot{D}_{2n+1} \text{Fey}_{2n+1}(\xi, q') \text{se}_{2n+1}(\varphi, q')], \quad (7)$$

где $\dot{C}_{2n+1}$ и $\dot{D}_{2n+1}$ — постоянные интегрирования, а $\text{Se}_{2n+1}(\xi, q')$, $\text{se}_{2n+1}(\varphi, q')$ и $\text{Fey}_{2n+1}(\xi, q')$ — функции Матье. Учитывая, что из физических соображений $\dot{D}_{2n+1} = 0$, получим

$$\dot{A}' = \sum_{n=0}^{\infty} \dot{C}_{2n+1} \text{Se}_{2n+1}(\xi, q') \text{se}_{2n+1}(\varphi, q'). \quad (8)$$

Векторный потенциал $\dot{A}''$ в пространстве представляет собой сумму векторного потенциала возбуждающего поля $\dot{A}_0$ и векторного потенциала $\dot{A}_1''$ поля вихревых токов в сердечнике:

$$\dot{A}'' = \dot{A}_0 + \dot{A}_1''. \quad (9)$$

Вектор $\bar{\dot{A}}_0$ связан с вектором магнитной индукции $\bar{\dot{B}}_0$ возбуждающего поля уравнением $\text{rot } \bar{\dot{A}}_0 = \bar{\dot{B}}_0$, из которого для данной системы координат с учетом того, что $\bar{\dot{B}}_0 = T_{\xi} \dot{B}_{\xi} + T_{\varphi} \dot{B}_{\varphi}$, $\bar{\dot{A}}_0 = T_z \dot{A}_0$ следует

$$\dot{A}_0 = \dot{B}_0 h \text{sh } \xi \sin \varphi. \quad (10)$$

Перейдем к решению уравнения (6). Если пренебречь токами смещения в пространстве, окружающем цилиндр, то есть положить $q'' = 0$ и заменить A'' согласно (9) и (10), то (6) преобразуется в выражение

$$\frac{\partial^2 \dot{A}_1''}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}_1''}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) решается методом разделения переменных. Вектор $\dot{A}_0$ внешнего поля — функция нечетная относительно угла φ , сле-

довательно, и функция $\dot{A}_1''$ также должна быть нечетной. Кроме того, при $\xi \rightarrow \infty$ должно быть $\dot{A}_1'' \rightarrow 0$. Таким образом, искомое решение уравнения (11) в виде суперпозиции всех возможных решений будет иметь вид

$$\dot{A}_1'' = \sum_{m=0}^{\infty} \dot{N}_{2m+1} e^{-(2m+1)\xi} \sin(2m+1)\varphi, \quad (12)$$

где $\dot{N}_{2m+1}$ — постоянная интегрирования.

После подстановки (10) и (12) в (9) векторный потенциал поля в пространстве будет определяться выражением

$$\dot{A}'' = \dot{B}_0 h \operatorname{sh} \xi \sin \varphi + \sum_{m=0}^{\infty} \dot{N}_{2m+1} e^{-(2m+1)\xi} \sin(2m+1)\varphi. \quad (13)$$

Постоянные интегрирования $\dot{C}_{2n+1}$ в (8) и $\dot{N}_{2m+1}$ в (13) для случая немагнитного цилиндра $\mu = \mu_0$ найдем из граничных условий при $\varepsilon = \varepsilon_0$

$$\dot{A}' = \dot{A}''; \quad \frac{\partial \dot{A}'}{\partial \xi} = \frac{\partial \dot{A}''}{\partial \xi}. \quad (14)$$

Подставляя в (14) из (8) и (13) значения $\dot{A}'$ и $\dot{A}''$, получим два уравнения:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \dot{C}_{2n+1} \operatorname{Se}_{2n+1}(\xi_0, q') \operatorname{se}_{2n+1}(\varphi, q') = \\ = \dot{B}_0 h \operatorname{sh} \xi_0 \sin \varphi + \sum_{m=0}^{\infty} \dot{N}_{2m+1} e^{-(2m+1)\xi_0} \sin(2m+1)\varphi; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \dot{C}_{2n+1} \frac{\partial}{\partial \xi} [\operatorname{Se}_{2n+1}(\xi_0, q')] \operatorname{se}_{2n+1}(\varphi, q') = \\ = \dot{B}_0 h \operatorname{ch} \xi_0 \sin \varphi - \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \dot{N}_{2m+1} e^{-(2m+1)\xi_0} \sin(2m+1)\varphi. \end{aligned} \quad (16)$$

Воспользуемся свойством ортогональности и условиями нормирования функций Матье [2]:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{se}_m(\varphi, q) \operatorname{se}_p(\varphi, q) d\varphi = \begin{cases} 0, & m \neq p; \\ \pi, & m = p \text{ — для действительных } q; \\ L_{2n+1}, & m = p \text{ — для мнимых } q. \end{cases} \quad (17)$$

Кроме того, выразим в правой части (15) функции $\sin$ через функции Матье

$$\sin(2m+1)\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} P_{2m+1}^{(2n+1)} \operatorname{se}_{2n+1}(\varphi). \quad (18)$$

После этого умножим обе части выражения (15) на $\operatorname{se}_{2n+1}(\gamma, g')$ и проинтегрируем на промежутке от 0 до 2π . Учитывая, что в нашем случае q мнимая величина, получим

$$\begin{aligned} \dot{C}_{2n+1} \operatorname{Se}_{2n+1}(\xi_0, q') L_{2n+1} = \\ = \left[\dot{B}_0 h \operatorname{sh} \xi_0 P_1^{(2n+1)} + \sum_{m=0}^{\infty} \dot{N}_{2m+1} e^{-(2m+1)\xi_0} P_{2m+1}^{(2n+1)} \right] \cdot L_{2n+1}, \end{aligned} \quad (19)$$

Остальные интегралы равны нулю.

Из (19) находим

$$C_{2n+1} = \frac{1}{\text{Se}_{2n+1}(\xi_0, q')} [\dot{B}_0 h \text{sh } \xi_0 P_1^{2n+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \dot{N}_{2m+1} e^{-(2m+1)\xi_0} P_{2m+1}^{(2n+1)}], \quad (20)$$

которое подставляем в выражение (16)

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} [\text{Se}_{2n+1}(\xi_0, q')]}{\text{Se}_{2n+1}(\xi_0, q')} \left[\dot{B}_0 h \text{sh } \xi_0 P_1^{2n+1} + \right. \\ & \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \dot{N}_{2m+1} e^{-(2m+1)\xi_0} P_{2m+1}^{(2n+1)} \right] \text{se}_{2n+1}(\varphi, q') = \dot{B}_0 h \text{ch } \xi_0 \sin \varphi - \\ & - \sum_{m=0}^{\infty} \dot{N}_{2m+1} (2m+1) e^{-(2m+1)\xi_0} \sin(2m+1)\varphi. \end{aligned} \quad (21)$$

Подставим в (21) $\text{se}_{2n+1}(\varphi, q')$ в виде [2]

$$\text{se}_{2n+1}(\varphi, q') = \sum_{m=0}^{\infty} P_{2m+1}^{(2n+1)} \sin(2m+1)\varphi \quad (22)$$

и приравняем коэффициенты при синусах с одинаковыми аргументами, стоящими в левой и правой частях выражения (21). После чего получаем систему $(m+1)$ уравнений с $(m+1)$ неизвестными постоянными коэффициентами $\dot{N}_1, \dot{N}_3, \dots, \dot{N}_{2m+1}$.

Сгруппируем члены, содержащие неизвестные коэффициенты в левых частях, а свободные члены перенесем в правые части уравнений. После указанных преобразований получим систему уравнений, которую можно представить в матричных обозначениях в виде

$$\alpha \cdot K = \beta, \quad (23)$$

где α — матрица коэффициентов при неизвестных;

K — матрица-столбец неизвестных, элементы которой имеют вид

$$K_{2m+1} = \dot{N}_{2m+1} e^{-(2m+1)\xi_0}; \quad (24)$$

β — матрица-столбец свободных членов.

Матрица α квадратная, симметричная. Общий элемент ее определяется из выражения

$$\alpha_{2i+1, 2\kappa+1} = \alpha_{2\kappa+1, 2i+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} [\text{Se}_{2n+1}(\xi_0, q')]}{\text{Se}_{2n+1}(\xi_0, q')} P_{2i+1}^{(2n+1)} P_{2\kappa+1}^{(2n+1)}, \quad (25)$$

при $i \neq \kappa$ и $i = 0, 1, 2, \dots, m; \kappa = 0, 1, 2, \dots, m$.

Элементы главной диагонали находим по формуле:

$$\alpha_{2i+1, 2i+1} = (2i+1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} [\text{Se}_{2n+1}(\xi_0, q')]}{\text{Se}_{2n+1}(\xi_0, q')} P_{2i+1}^{(2n+1)} P_{2i+1}^{(2n+1)}, \quad (26)$$

при $i = 0, 1, 2, \dots, m$.

Элементы матрицы β находятся в виде

$$\beta_1 = \dot{B}_0 h \left\{ \text{ch } \xi_0 - \text{sh } \xi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} [\text{Se}_{2n+1}(\xi_0, q')]}{\text{Se}_{2n+1}(\xi_0, q')} P_1^{(2n+1)} P_1^{(2n+1)} \right\}, \quad (27)$$

$$\beta_{2i+1} = -\dot{B}_0 h \operatorname{sh} \xi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} [\operatorname{Se}_{2n+1}(\xi_0, q')]}{\operatorname{Se}_{2n+1}(\xi_0, q')} P_1^{(2n+1)} P_{2i+1}^{(2n+1)}, \quad (28)$$

при $i = 1, 2, 3, \dots, m$.

Решение системы уравнений (23) в матричных обозначениях будет следующим:

$$K = \alpha^{-1} \cdot \beta, \quad (29)$$

где α^{-1} — матрица, обратная по отношению к матрице α .

Постоянные $\dot{N}_1, \dot{N}_3, \dots, \dot{N}_{2m+1}$ определяются из выражения

$$\dot{N}_{2i+1} = \dot{K}_{2i+1} e^{(2i+1)\xi_0}. \quad (30)$$

Определим выражение для магнитного потока, пронизывающего прямоугольную измерительную обмотку щелевого преобразователя, размеры которой соответственно равны поперечным размерам магнитопровода. При этом не учитывается влияние магнитопровода на характер распределения магнитного потока в щели.

$$\Phi = \int_S \bar{B} d\bar{S} = \int_S \operatorname{rot} \bar{A} d\bar{S} = \oint \bar{A} d\bar{l}, \quad (31)$$

где $d\bar{l}$ — элемент длины контура интегрирования, совпадающего с контуром измерительной обмотки.

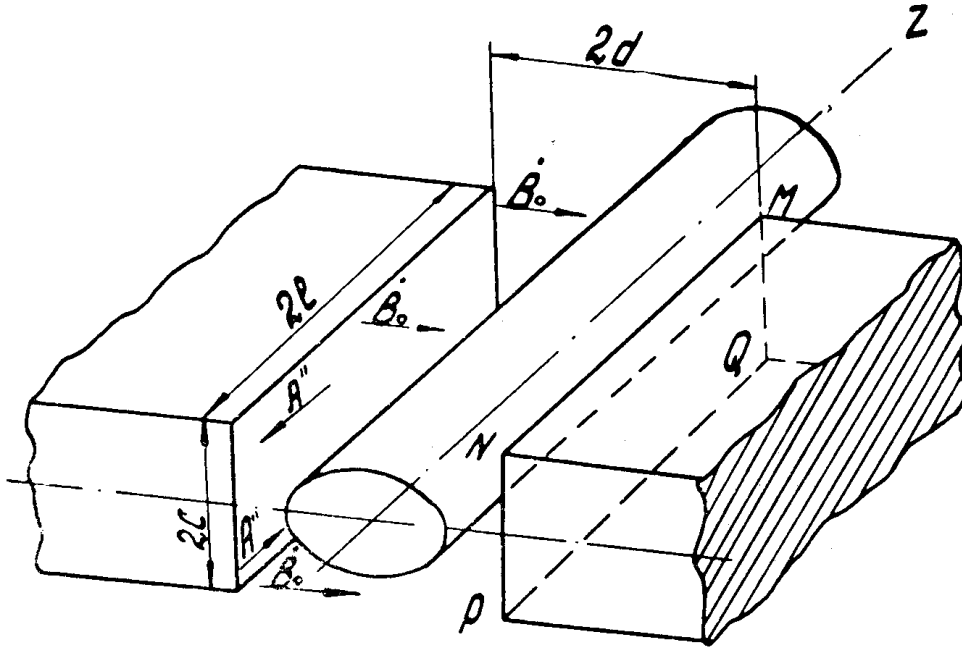


Рис. 2. Эллиптический цилиндр в щелевом датчике

Векторный потенциал $\bar{A}$ совпадает по направлению с осью z и не зависит от координаты последней. Следовательно, при интегрировании выражения (31) вдоль сторон, параллельных оси z , $\bar{A}$ можно вынести за знак интеграла, а интегралы вдоль сторон, перпендикулярных оси z , равны нулю. Подставив в (31) выражение (13), получим

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint \bar{A} d\bar{l} = \dot{A} \int_{(MN)} dl + \dot{A} \int_{(PQ)} dl = 4\dot{A}l = 4\dot{B}_0lh \operatorname{sh} \xi \sin \varphi + \\ &+ 4l \sum_{m=0}^{\infty} \dot{N}_{2m+1} e^{-(2m+1)\xi} \sin (2m+1) \varphi = \dot{\Phi}_0 + \Delta\dot{\Phi},\end{aligned}\quad (32)$$

где $\dot{\Phi}_0 = 4\dot{B}_0lh \operatorname{sh} \xi \sin \varphi = 4\dot{B}_0lc = \dot{B}_0S$ — магнитный поток возбуждающего поля, пронизывающий измерительную обмотку;

$\Delta\dot{\Phi} = 4l \sum_{m=0}^{\infty} \dot{N}_{2m+1} e^{-(2m+1)\xi} \sin (2m+1) \varphi$ — приращение магнитного потока, обусловленное внесением эллиптического цилиндра в зазор датчика.

Повернем сердечник на 90° (рис. 1б) и найдем для этого случая векторный потенциал в пространстве, окружающем цилиндр.

В результате поворота системы координат решения уравнений (5) и (6) должны быть симметричными относительно большей оси эллипса:

$$\dot{A}' = \sum_{n=0}^{\infty} \dot{C}_{2n+1} \operatorname{Ce}_{2n+1}(\xi, q') \operatorname{se}_{2n+1}(\varphi, q'), \quad (33)$$

$$\dot{A}'' = \dot{B}_0h \operatorname{ch} \xi \cos \varphi + \sum_{m=0}^{\infty} \dot{N}_{2m+1} e^{-(2m+1)\xi} \cos (2m+1) \varphi. \quad (34)$$

Постоянные интегрирования, как и в предыдущем случае, находим из граничных условий. Выражение для $\dot{C}_{2n+1}$ находим из первого граничного условия (14)

$$\dot{C}_{2n+1} = \frac{1}{\dot{\operatorname{Ce}}_{2n+1}(\xi, q')} \left[\dot{B}_0h \operatorname{ch} \xi_0 L_1^{(2n+1)} + \sum_{m=0}^{\infty} \dot{N}'_{2m+1} e^{-(2m+1)\xi_0} L_{2m+1}^{(2n+1)} \right]. \quad (35)$$

Подставляя (35) во второе граничное условие (14) и приравнявая коэффициенты при косинусах с одинаковыми аргументами, стоящими в левой и правой частях, получаем систему $(m+1)$ уравнений с $(m+1)$ неизвестными коэффициентами $N'_1, N'_3, \dots, N'_{2m+1}$, которую можно представить в матричном изображении

$$x \cdot K' = \lambda, \quad (36)$$

где x — квадратная симметричная матрица коэффициентов при неизвестных $\dot{N}'_{2i+1} e^{-(2i+1)\xi_0}$;

K' — матрица-столбец неизвестных, общий член которой $\dot{N}'_{2i+1} e^{-(2i+1)\xi_0}$;

λ — матрица-столбец свободных членов.

Общий член матрицы x определяется выражением

$$x_{2i+1, 2\kappa+1} = x_{2\kappa+1, 2i+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} [\operatorname{Ce}_{2n+1}(\xi_0, q')]}{\operatorname{Ce}_{2n+1}(\xi_0, q')} L_{2i+1}^{(2n+1)} L_{2\kappa+1}^{(2n+1)}, \quad (37)$$

при $i \neq \kappa$ и $i = 0, 1, 2, \dots, m, \kappa = 0, 1, 2, \dots, m$. Элементы главной диагонали определяются выражением

$$x_{2i+1, 2i+1} = (2i+1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} [\operatorname{Ce}_{2n+1}(\xi_0, q')]}{\operatorname{Ce}_{2n+1}(\xi_0, q')} L_{2i+1}^{(2n+1)} L_{2i+1}^{(2n+1)}, \quad (38)$$

при $i = \kappa = 0, 1, 2, \dots, m$, а элементы матрицы λ —

$$\lambda_1 = \dot{B}_0 h \left\{ \operatorname{sh} \xi_0 - \operatorname{ch} \xi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} [\operatorname{Ce}_{2n+1}(\xi_0, q')]}{\operatorname{Ce}_{2n+1}(\xi_0, q')} L_1^{(2n+1)} L_1^{(2n+1)} \right\}, \quad (39)$$

$$\lambda_{2i+1} = -\dot{B}_0 h \operatorname{ch} \xi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} [\operatorname{Ce}_{2n+1}(\xi_0, q')]}{\operatorname{Ce}_{2n+1}(\xi_0, q')} L_1^{(2n+1)} L_{2i+1}^{(2n+1)}, \quad (40)$$

где $i = 1, 2, \dots, m$.

В выражениях (38 ÷ 40) $L_{2i+1}^{(2n+1)}$ — коэффициент разложения функции Маттье $\operatorname{ce}_{2n+1}(\varphi, q') = \sum_{m=0}^{\infty} L_{2m+1}^{(2n+1)} \cos(2m+1)\varphi$.

Решение системы уравнений (36) в матричных обозначениях будет следующим:

$$K' = x^{-1} \lambda, \quad (41)$$

где x^{-1} — матрица, обратная по отношению к матрице x .

Используя выражение аналогичное (30), можно определить постоянные $\dot{N}_1, \dot{N}_3, \dots, \dot{N}_{2m+1}$.

Подставив (34) в (31), найдем выражение для магнитного потока

$$\dot{\Phi} = \dot{\Phi}_0 + \Delta\dot{\Phi}, \quad (42)$$

где $\dot{\Phi}_0 = 4\dot{B}l \operatorname{ch} \xi \cos \varphi$ — магнитный поток возбуждающего поля,

$\Delta\dot{\Phi} = 4l \sum_{m=0}^{\infty} \dot{N}_{2m+1} e^{-(2m+1)} \cos \varphi$ — приращение магнитного потока, обусловленное внесением цилиндра в зазор датчика.

Относительное изменение э.д.с. измерительной обмотки, вызванное вставлением в преобразователь цилиндра, равно относительному изменению магнитного потока

$$\frac{\Delta \dot{E}}{|\dot{E}_0|} = \frac{\Delta \dot{\Phi}}{\Phi_0}. \quad (43)$$

Результаты расчетов по полученным выражениям, позволяющие произвести количественную оценку влияния некруглости цилиндра на параметры преобразователя, будут опубликованы позднее.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Жуков и Р. М. Закиров. «Дефектоскопия», 1970, № 5, стр. 102.
2. Мак-Лахлан. Теория и приложение функций Маттье. М., ИЛ., 1953.
3. Андре Анго. Математика для электро- и радиотехников. М., «Наука», 1965.
4. Н. С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., Физматгиз, 1962.