ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 226 1976

# О КАНАЛОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ КОМПЛЕКСОВ ОКРУЖНОСТЕЙ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. Р. ВАЙНТРУБ

(Представлена кафедрой высшей математики)

1. В [1] доказано, что комплексы окружностей в трехмерном конформном пространстве обладают тремя, в общем случае различными, семействами каналовых поверхностей.

Ниже рассматривается вопрос о существовании семейств каналовых поверхностей, проходящих через окружности комплексов в трехмерном евклидовом пространстве.

2. Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве $E_3$ трехпараметрическое многообразие окружностей, плоскости которых образуют $h$-параметрическое, $h=1, 2, 3$, семейство (комплекс $\{h, 3\}$). Присоединим к каждой окружности этого комплекса локальный ортонормированный репер $(\bar{A}, \bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3)$, начало $\bar{A}$ и векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ которого поместим в плоскости окружности. Инфинитезимальное перемещение репера определяется уравнениями:

$$d\bar{A}=\omega^a\bar{e}_a,\ d\bar{e}_a=\omega_a^b\bar{e}_b,\ a,\ b,\ c=1,\ 2,\ 3. \tag{1}$$

где

$$\omega_a^b=-\omega_b^a \tag{2}$$

и формы Пфаффа $\omega^a$, $\omega_a^b$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана [2]:

$$D\omega^a=[\omega^c\,\omega_c^a],\ D\omega_a^b=[\omega_a^c\,\omega_c^b]. \tag{3}$$

Поместим начало $\bar{A}$ репера в центр текущей окружности комплекса. Тогда уравнения этой окружности относительно таким образом выбранного репера запишутся в виде:

$$(x^1)^2+(x^2)^2+2a_0=0, \qquad x^3=0. \tag{4}$$

Система уравнений окружности, смежной к (4) относительно репера $(\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, записывается в виде:

$$(x^1+dx^1)^2+(x^2+dx^2)^2+2(a_0+da_0)=0, \tag{5}$$
$$x^3+dx^3=0.$$

Требуя, чтобы уравнения (4) и (5) определяли одну и ту же окружность и определяя при этом дифференциалы $dx^a$ из условий стационарности [3]

$$dx^a=-x^b\,\omega_b^a-\omega^a \tag{6}$$

точки евклидова пространства, убеждаемся, что шесть форм Пфаффа $\omega^i$, $\omega_i^3$, $\omega^3$, $\Theta^\circ\equiv da_0$, $i$, $j=1$, 2, являются первичными формами окружности в $E_3$. Три формы Пфаффа $\omega_i^3$, $\omega^3$ определяют положение плоскости окружности в пространстве.

3. В дальнейшем будем считать, что $\omega^i \equiv \Theta^i$, $-R\Theta^\circ \equiv \Theta^3$, $\omega_3^i \equiv \omega^i$ индексы $\alpha$, $\beta$ принимают $h$ определенных значений из чисел 1, 2, 3; индексы $\alpha'$, $\beta'$ принимают все оставшиеся значения из этой совокупности чисел.

Так как рассматривается комплекс окружностей $\{h, 3\}$, то среди шести первичных форм Пфаффа $\omega^a$, $\Theta^a$ имеется $h$ линейно независимых форм, определяющих положение плоскости окружности комплекса. Пусть это будут формы $\omega^\alpha$. В качестве остальных (3-$h$) линейно-независимых форм комплекса примем формы $\Theta^{\alpha'}$. Тогда система дифференциальных уравнений комплекса $\{h, 3\}$ запишется в виде:

$$\omega^{\alpha'} = A_\beta^{\alpha'} \omega^\beta, \quad \Theta^\alpha = B_\beta^\alpha \omega^\beta + C_{\beta'}^\alpha \Theta^{\beta'}. \tag{7}$$

4. Имеет место следующая теорема.

*Теорема.* Комплекс окружностей $\{h, 3\}$ в трехмерном евклидовом пространстве $E^3$ обладает $h$, в общем случае различными, семействами каналовых поверхностей.

*Доказательство.* Пусть комплекс $\{h, 3\}$ отнесен к своему каноническому реперу [4]. Задавая два соотношения между независимыми формами $\omega^\alpha$, $\Theta^{\alpha'}$, мы выделяем некоторое однопараметрическое подмногообразие, проходящее через окружность комплекса. Если это подмногообразие является семейством каналовых поверхностей, то две бесконечно близкие точки $M$ и $M'$ окружности лежат (при смещении окружности в каналовой поверхности) на одной и той же сфере с центром в некоторой точке

$$\bar{F} = \bar{A} + \rho \bar{e}_3, \tag{8}$$

то есть

$$(\bar{M} - \bar{F}, \, d\bar{M}) = 0. \tag{9}$$

Положение произвольной точки $\bar{\mathbf{M}}$ окружности комплекса будем определять с помощью угла $\varphi$, который образует радиус-вектор $\overline{AM}$ с осью $\bar{e}_1$:

$$\bar{M} = \bar{A} + R\,(\bar{e}_1 \cos\varphi + \bar{e}_2 \sin\varphi). \tag{10}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} dM = \bar{e}_1 \{\Theta^1 + dR\cos\varphi - R\sin\varphi d\varphi - R\omega_1^2 \sin\varphi\} + \\ + \bar{e}_2 \{\Theta^2 + dR\sin\varphi + R\cos\varphi d\varphi + R\omega_1^2\cos\varphi\} + \\ + \bar{e}_3 \{\omega^3 - R\omega^1\cos\varphi - R\omega^2\sin\varphi\} \end{aligned} \tag{11}$$

условие (9) можно записать в виде:

$$R(\Theta^2 - \rho\omega^2)\sin\varphi + R(\Theta^1 - \rho\omega^1)\cos\varphi + \rho\omega^3 - \Theta^3 = 0. \tag{12}$$

Уравнения (12) должны удовлетворяться тождественно относительно $\varphi$. Следовательно, коэффициенты при $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ и свободный член должны равняться нулю:

$$\Theta^a - \rho\omega^a = 0. \tag{13}$$

Подставляя значения $\omega^{\alpha'}$ и $\Theta^\alpha$ из (7), будем иметь:

$$\Theta^{\alpha'} - \rho A_\beta^{\alpha'} \omega^\beta = 0.$$

$$C_{\beta'}^\alpha \Theta^{\beta'} + B_\beta^\alpha \omega^\beta - \rho\omega^\alpha = 0. \tag{14}$$

Исключая из уравнений (14) отношение линейно-независимых форм Пфаффа, получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} B_1^1-\rho & \dots & B_h^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ B_1^h & \dots & B_h^h-\rho \end{vmatrix} = 0 \qquad (15)$$

степень $h$ относительно $\rho$.

Теорема доказана.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Р. М. Гейдельман. К теории трехпараметрического комплекса окружностей. ДАН СССР, № 2, 201—204, 1954.
2. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. М.—Л., 1948.
3. Г. Ф. Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Тр. Моск. мат. об-ва, т. 2, 275—382, 1953.
4. М. Р. Вайнтруб. Дифференциальная геометрия $m$-параметрических многообразий окружностей в евклидовом пространстве. Материалы III межвузовской конференции по проблемам геометрии, Казань, 27, 1967.


---

6. Заказ 3595.