ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 226 1976

О КОНГРУЭНЦИЯХ ОКРУЖНОСТЕЙ {1.2} С КРАТНЫМИ ФОКАЛЬНЫМИ ТОЧКАМИ

М. Р. ВАЙНТРУБ

(Представлена кафедрой высшей математики)

Общие конгруэнции окружностей в трехмерном евклидовом пространстве принадлежат двухпараметрическому семейству плоскостей. Такие конгруэнции окружностей, обладающие кратными фокальными точками, изучались в [1] и [2].

Представляет интерес рассмотрение конгруэнции, у которой плоскости окружностей образуют однопараметрическое семейство (конгруэнции {1.2}). В [3] рассмотрены фокальные свойства такой конгруэнции.

В данной работе изучаются конгруэнции {1. 2} с кратными фокальными точками.

I. Основные геометрические образы, ассоциированные с конгруэнцией {1.2}

В трехмерном евклидовом пространстве E_3 рассмотрим конгруэнцию окружностей, плоскости которых образуют однопараметрическое семейство (конгруэнцию {1. 2}). Выбирая в качестве независимых формы Пфаффа ω^1 и Θ^0 [4], систему дифференциальных уравнений этой конгруэнции относительно канонизированного репера [5] запишем в виде:

$$\begin{gathered}\omega_1 = \Gamma_{11}\,\omega_3^1 + \Gamma_{10}\,\Theta^\circ,\quad \omega_2 = \Gamma_{21}\,\omega_3^1,\quad \omega_3^2 = \Lambda_{31}\,\omega_3^1,\\ \omega^3 = \Lambda_{01}\,\omega_3^1,\quad \omega_1^2 = \Gamma_1\,\omega_3^1 + \Gamma_0\,\Theta^\circ.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь: $\Gamma_{10} > 0$, в силу ориентации вектора $\bar{e}_1$ репера.

Замыкание системы (1) имеет вид:

$$\begin{gathered}[d\Gamma_{11}\omega_3^1] + [d\Gamma_{10}\Theta^\circ] = (\Gamma_0\Gamma_{11} - \Gamma_{21}\Gamma_0)\,[\omega_3^1\,\Theta^\circ],\\ [d\Gamma_{21}\omega_3^1] = (\Gamma_0\Gamma_{21} + \Gamma_0\Gamma_{11} - \Gamma_{10}\Gamma_1)\,[\omega_3^1\,\Theta^\circ],\\ [d\Lambda_{31}\omega_3^1] = (\Gamma_0 + \Gamma_0\Lambda_{31}^2)\,[\omega_3^1\,\Theta^\circ],\\ [d\Lambda_{01}\omega_3^1] = (\Gamma_{10} + \Gamma_0\Lambda_{01}\Lambda_{31})\,[\omega_3^1\,\Theta^\circ],\\ [d\Gamma_1\omega_3^1] + [d\Gamma_0\Theta^\circ] = \Gamma_0\Gamma_1\Lambda_{31}\,[\omega_3^1\,\Theta^\circ].\end{gathered} \tag{2}$$

Анализ системы (2) с помощью критерия Бахвалова [6] показывает, что конгруэнции {1. 2} существуют и определяются с произволом 2 функций 2 аргументов.

Координатное подмногообразие $\omega_3^1 = 0$ является однопараметрическим семейством окружностей, инцидентных одной плоскости. Характеристические точки окружности в каноническом репере определяются в виде:

$$\bar{A}_1 = \bar{A} + \frac{1}{\Gamma_{10}}\bar{e}_1 + \frac{\sqrt{R^2\Gamma_{10}^2 - 1}}{\Gamma_{10}}\bar{e}_2,$$

$$\bar{A}_2 = \bar{A} + \frac{1}{\Gamma_{10}}\bar{e}_1 - \frac{\sqrt{R^2\Gamma_{10}^2 - 1}}{\Gamma_{10}}\bar{e}_2. \tag{3}$$

Из (3) следует геометрический смысл инварианта Γ_{10} как величины, обратной абсциссе характеристических точек окружности.

Обозначая через $ds = (\Gamma_{10}\Theta^\circ)|_{\omega_3^1=0}$ элемент дуги линии центров окружностей подмногообразия $\omega_3^1 = 0$, получим:

$$\kappa = \frac{\Gamma_0}{\Gamma_{10}}, \tag{4}$$

где k — кривизна этой кривой.

Подмногообразие $\Theta^0 = 0$ является однопараметрическим семейством окружностей постоянного радиуса, так как $dR = -\frac{1}{R}\Theta^0$.

Рассмотрим некоторые геометрические образы, инвариантно присоединенные к конгруэнции $\{1.2\}$.

1. Конгруэнция осей $(\bar{A}\bar{e}_1)$ репера. Один фокус этой конгруэнции совпадает с центром окружности и ему соответствует фокальное направление

$$\omega_3^1 = 0. \tag{5}$$

Второй фокус совпадает с точкой

$$\bar{F} = \bar{A} + \Lambda_{01}\bar{e}_1. \tag{6}$$

Этому фокусу соответствует фокальное направление

$$(\Gamma_{21} + \Gamma_1\Lambda_{01})\,\omega_3^1 + \Gamma_0\Lambda_{01}\Theta^\circ = 0. \tag{7}$$

Обозначая через $\rho_ц$ абсциссу центра луча конгруэнции $(\bar{A}\bar{e}_1)$, в силу формулы (6), получаем геометрическую характеристику инварианта Λ_{01}:

$$\Lambda_{01} = 2\rho_ц \tag{8}$$

2. Конгруэнция осей $(\bar{A}\bar{e}_2)$ репера. Один фокус этой конгруэнции совпадает с точкой

$$\bar{Ц} = \bar{A} + \frac{\Gamma_{10}}{\Gamma_0}\bar{e}_2 \tag{9}$$

и ему соответствует фокальное направление (5). Второй фокус определяется формулой

$$\bar{F} = \bar{A} + \frac{\Lambda_{01}}{\Lambda_{31}}\bar{e}_2. \tag{10}$$

Фокусу (10) соответствует фокальное направление

$$(\Gamma_{11}\Lambda_{31} - \Lambda_{01}\Gamma_1)\,\omega_3^1 + (\Gamma_{10}\Lambda_{31} - \Lambda_{01}\Gamma_0)\,\Theta^\circ = 0. \tag{11}$$

3. Конгруэнция осей $(\bar{A}\bar{e}_3)$. Эта конгруэнция является цилиндрической с собственным фокусом в точке

$$\bar{F} = \bar{A} - \frac{\Gamma_{21}}{\Lambda_{31}}\bar{e}_3, \tag{12}$$

которому соответствует фокальное направление

$$\left(\Gamma_{11} - \frac{\Gamma_{21}}{\Lambda_{31}}\right)\omega_3^1 + \Gamma_{10}\Theta^\circ = 0. \tag{13}$$

Обозначая через φ угол между осью $\bar{e}_1$ и касательным вектором к сферическому изображению конгруэнции $(\overline{A}\overline{e}_3)$, получим:

$$\Lambda_{31} = \mathrm{tg}\varphi. \tag{14}$$

4. Характеристика однопараметрического семейства плоскостей $x^3 = 0$, содержащих окружности конгруэнции, определяется уравнениями:

$$x^1 + \Lambda_{31}x^2 - \Lambda_{01} = 0, \qquad x^3 = 0. \tag{15}$$

5. Огибающая (M_{13}) плоскостей $x^2 = 0$ совпадает с фокальной поверхностью, описываемой собственным фокусом (12) конгруэнции $(\overline{A}\overline{e}_3)$.

6. Радиус-вектор текущей точки огибающей (M_{23}) плоскостей $x^1 = 0$ определяется в виде:

$$\overline{M}_{23} = \overline{A} + \frac{\Gamma_{10}}{\Gamma_0}\bar{e}_2 + \left(\Gamma_{11} - \frac{\Gamma_1\Gamma_{10}}{\Gamma_0}\right)\bar{e}_3. \tag{16}$$

Конгруэнции {1. 2.} с кратными фокальными точками.

Напомним [3], что два фокуса F_1 и F_2 конгруэнции {1. 2} являются характеристическими точками (3) окружностей, инцидентных одной плоскости. Этим двум фокусам соответствует одно фокальное направление (5). Два оставшихся фокуса

$$\overline{F}_3 = \overline{A} + \frac{1}{1 + \Lambda_{31}^2}\left[(\Lambda_{01} - \Lambda_{31}\Lambda)\bar{e}_1 + (\Lambda_{01}\Lambda_{31} + \Lambda)\bar{e}_2\right] \tag{17}$$

и

$$\overline{F}_4 = \overline{A} + \frac{1}{1 + \Lambda_{31}^2}\left[(\Lambda_{01} + \Lambda_{31}\Lambda)\bar{e}_1 + (\Lambda_{01}\Lambda_{31} - \Lambda)\bar{e}_2\right], \tag{18}$$

где

$$\Lambda = \sqrt{R^2(\Lambda_{31}^2 + 1) - \Lambda_{01}^2} \tag{19}$$

являются точками пересечения характеристики (15) с окружностью конгруэнции. Фокусу (17) соответствует фокальное направление

$$[\Gamma_{11}(\Lambda_{01} + \Lambda) + \Gamma_{21}(\Lambda_{01}\Lambda_{31} + \Lambda)]\,\omega_3^1 + \Gamma_{10}(\Lambda_{01} + \Lambda)\,\Theta^\circ = 0, \tag{20}$$

а фокусу (18) — направление

$$[\Gamma_{11}(\Lambda_{01} - \Lambda) + \Gamma_{21}(\Lambda_{01}\Lambda_{31} - \Lambda)]\,\omega_3^1 + \Gamma_{10}(\Lambda_{01} - \Lambda)\,\Theta^\circ = 0. \tag{21}$$

Рассмотрим некоторые классы конгруэнции окружностей {1. 2} с кратными фокальными точками.

1. Класс $\Gamma_{10} = \frac{1}{R}$ существует, определяется с произволом 1 функции 2 аргументов и характеризуется совпадением фокусов F_1 и F_2.

2. Класс $\Gamma_{10} = \frac{1}{R}$, $\Gamma_0 = 0$ существует, определяется с произволом 5 функций 1 аргумента и характеризуется тем, что фокусы F_1 и F_2 совпадают, а поверхность, описываемая этим сдвоенным фокусом, вырождается в кривую. Так как $\Gamma^0 = 0$, то: а) конгруэнция осей $(\overline{A}\overline{e}_2)$ является цилиндрической (следует из (9); б) огибающая семейства плоскостей $x^1 = 0$ является развертывающейся поверхностью (следует из

(16); в) плоскости $x^2 = 0$ образуют однопараметрическое семейство, характеристикой которого является прямая

$$x^1 \Gamma_1 + \Gamma_{21} = 0, \qquad x^2 = 0. \tag{22}$$

Последнее утверждение следует из того, что формы ω , ω_3^2, ω^2, определяющие положение плоскости $x_2 = 0$ в пространстве, становятся функциями одного параметра.

3. Класс $R^2 (1 + \Lambda_{31}^2) - \Lambda_{01}^2 = 0$ существует, определяется с произволом 1 функции 2 аргументов и характеризуется совпадением фокусов F_3 и F_4. В силу (8) и (14) следует, что радиус окружности такой конгруэнции равен удвоенной длине проекции отрезка $АЦ$ оси e_1 на касательную к сферическому изображению конгруэнции $(\bar{A}\bar{e}_3)$.

4. Класс $\Lambda_{01} = R$, $\Lambda_{31} = 0$ характеризуется тем, что характеристика (15) касается окружности конгруэнции в точке

$$\bar{M}_1 = \bar{A} + R\bar{e}_1. \tag{23}$$

Из системы (2) следует два конечных соотношения: $\Gamma_0 = 0$ и $\Gamma_{10} = \frac{1}{R}$. Следовательно, точка (23) является счетверенным фокусом конгруэнции {1. 2}. Конгруэнция осей $(\bar{A}\bar{e}_3)$ — бицилиндрическая. Этот класс существует и определяется с произволом 3 функции 1 аргумента.

5. Класс $\Gamma_{10} = \frac{1}{R}$, $\Lambda_{01} = R$ характеризуется тем, что фокусы F_1, F_2, F_4 совпадают. Из четвертого уравнения системы (2) следует: $\Gamma_0 \Lambda_{31} = 0$. Если $\Gamma_0 = 0$, то точка (23) является счетверенным фокусом. Если $\Lambda_{31} = 0$, то рассматриваемый класс существует и определяется с произволом 4 функций 1 аргумента. Касательная к фокальной кривой, описываемой строенным фокусом этой конгруэнции, располагается в плоскости окружности конгруэнции.

Отметим, что если фокусы F_1, F_2 и F_3 совпадают, то точка (23) всегда является счетверенным фокусом конгруэнции {1.2}.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gambier B. Congruence de cercles: points focaux et curfaces focales. C. R. Acad., Sci., Paris, 195, 928—390, 1932.
2. Vincensini, P. Points focaux des cercles d'une congruence. C. R. Acad. Sci., Paris, 195, 1359—1361, 1932.
3. М. Р. Вайнтруб. О конгруэнциях окружностей в евклидовом пространстве. Тр. Томского ун-та, сер. механико-математическая, т. 191, 1432—149, 1967.
4. М. Р. Вайнтруб. О каналовых поверхностях комплексов окружностей в трехмерном евклидовом пространстве (настоящий сборник).
5. М. Р. Вайнтруб. Дифференциальная геометрия m-параметрических многообразий окружностей в евклидовом пространстве. Материалы III межвузовской конференции по проблемам геометрии, Казань, 27, 1967.
6. С. В. Бахвалов. Замечания к методу подвижного трехгранника. Мат. сб., 7 (49):2 321—326, 1940.