

О ПАРЕ m -ПОВЕРХНОСТЕЙ С ЗАДАННОЙ СЕТЬЮ В МНОГОМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.А. Лучинин

Томский политехнический университет
E-mail: svr@hm.tpu.ru

Изучается две m -мерные поверхности в n -мерном проективном пространстве, между точками которых установлено точечное соответствие. На поверхностях задается сеть линий. Рассматриваются некоторые геометрические образы, связанные с сетью. Рассмотрение всюду имеет локальный характер. Все рассматриваемые в данной работе функции предполагаются аналитическими.

Многомерная дифференциальная геометрия различных многообразий давно привлекает внимание математиков в связи с различными её приложениями. В частности, изучаются многомерные поверхности и сети линий на них [1, 2]. В середине двадцатого века стали изучать пары поверхностей и различные соответствия между ними [3]. Данная работа принадлежит этому направлению и посвящена паре m -мерных поверхностей в n -мерном проективном пространстве.

1. Пусть S_m^1 и S_m^2 – две поверхности в проективном пространстве P_n и $\Pi: S_m^1 \rightarrow S_m^2$ – гладкое взаимнооднозначное соответствие между ними.

Присоединим к рассматриваемой паре m -поверхностей некоторый проективный репер $R = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ с деривационными формулами $dA_i = \omega_j^i A_j$ ($i, j, \dots = 0, 1, \dots, n$) и структурными уравнениями $D\omega_j^i = \omega_k^i \wedge \omega_k^j$, причём $\omega_j^j = 0$.

Проведём следующую частичную канонизацию репера: точки A_0 и $A_n = \Pi(A_0)$ поместим в соответствующие точки поверхностей S_m^1 и S_m^2 пары; точки A_1, \dots, A_m – в касательную m -плоскость $L_m^1 = (A_0, \dots, A_m)$ к m -поверхности S_m^1 в точке A_0 , а точки A_{n-m}, \dots, A_{n-1} – в касательную m -плоскость $L_m^2 = (A_{n-m}, \dots, A_{n-1})$ к m -поверхности S_m^2 в точке A_n .

Точечное соответствие Π индуцирует проективное соответствие между связками касательных направлений, ассоциированных двум соответствующим точкам A_0 и A_n .

Выберем репер пары так, чтобы направления $A_0 A_i$ соответствовали в этом проективитете направлениям $A_n A_{n-i}$. Тогда основные уравнения нашей задачи принимают вид

$$\omega_0^\alpha = 0, \quad \omega_0^n = 0, \quad \omega_0^{n-i} = 0, \quad (1)$$

$$\omega_n^\alpha = 0, \quad \omega_n^0 = 0, \quad \omega_n^i = 0, \quad (2)$$

$$\omega_0^i = \omega_n^{n-i}.$$

$$(i, j, \dots = 1, 2, \dots, m; a, b, c, \dots = 2, 3, \dots, m; \alpha, \beta, \dots = m+1, m+2, \dots, n-m-1).$$

Для краткости будем обозначать в дальнейшем $\omega_0^i = \omega_n^{n-i}$.

Продолжая уравнения (1, 2), получаем

$$\omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega^j, \quad \omega_i^n = \Lambda_{ij}^n \omega^j, \quad \omega_k^{n-i} = \Lambda_{kj}^{n-i} \omega^j,$$

$$\omega_{n-i}^0 = \Lambda_{n-i,j}^0 \omega^j, \quad \omega_{n-k}^i = \Lambda_{n-k,j}^i \omega^j, \quad \omega_{n-i}^\alpha = \Lambda_{n-i,j}^\alpha \omega^j,$$

$$\omega_{n-j}^{n-i} - \omega_j^i + \delta_j^i (\omega_0^0 - \omega_n^n) = A_{jk}^i \omega^k,$$

$$\nabla \Lambda_{ij}^\alpha = \Lambda_{ijk}^\alpha \omega^k, \quad \nabla \Lambda_{ij}^n + \Lambda_{ij}^\alpha \omega_\alpha^n + \Lambda_{ij}^{n-k} \omega_{n-k}^n = \Lambda_{ijk}^n \omega^k,$$

$$\nabla \Lambda_{kj}^{n-i} + \Lambda_{kj}^\alpha \omega_\alpha^{n-i} + \Lambda_{kj}^{n-l} \omega_{n-l}^{n-i} = \Lambda_{kjl}^{n-i} \omega^l,$$

$$\nabla \Lambda_{n-i,j}^\alpha = \Lambda_{n-i,jk}^\alpha \omega^k, \quad (3)$$

$$\nabla \Lambda_{n-i,j}^0 + \Lambda_{n-i,j}^k \omega_k^0 + \Lambda_{n-i,j}^\alpha \omega_\alpha^0 = \Lambda_{n-i,jk}^0 \omega^k,$$

$$\nabla \Lambda_{n-k,j}^i + \Lambda_{n-k,j}^\alpha \omega_\alpha^i - \Lambda_{n-l,j}^i \omega_{n-k}^{n-l} = \Lambda_{n-k,jl}^i \omega^l,$$

$$\nabla A_{jk}^i + \delta_j^i (\omega_k^0 - \omega_{n-k}^n) - \delta_k^i (\omega_{n-j}^n - \omega_j^0) -$$

$$-\Lambda_{jk}^\alpha \omega_\alpha^i + \Lambda_{n-j,k}^\alpha \omega_\alpha^{n-i} = A_{jkl}^i \omega^l. \quad (4)$$

Здесь символ ∇ обозначает оператор ковариантного дифференцирования.

Из уравнений (3) следует, что системы функций Λ_{ij}^α и $\Lambda_{n-i,j}^\alpha$ являются тензорами в смысле Г.Ф. Лаптева [4, 5].

Продолжая уравнения (3, 4), получаем систему дифференциальных уравнений последовательности фундаментальных объектов: $\Lambda_{ij}^\alpha, \Lambda_{ij}^n, \Lambda_{ij}^{n-k}, \Lambda_{n-i,j}^\alpha, \Lambda_{n-i,j}^0, \Lambda_{n-i,j}^i, \Lambda_{ijk}^\alpha, \Lambda_{ijk}^n, \Lambda_{ijk}^{n-i}, \Lambda_{n-i,jk}^\alpha, \Lambda_{n-i,jk}^0, \Lambda_{n-i,jk}^i, A_{jkl}^i, \Lambda_{ijkl}^\alpha, \Lambda_{ijkl}^n, \dots$

2. Пусть определены первые и вторые нормали поверхностей S_m^1 и S_m^2 [1, 3], которые определяются точками

$$L_{n-m}^1 = (A_0, A_n, A_{n-i}, A_\alpha), \quad L_{m-1}^1 = (A_1, A_2, \dots, A_m)$$

и

$$L_{n-m}^2 = (A_n, A_0, A_i, A_\alpha), \quad L_m^2 = (A_{n-m}, A_{n-m+1}, \dots, A_{n-1}),$$

соответственно.

Пусть на поверхности S_m^1 задано одномерное распределение Δ_1 и дополнительное к нему распределение Δ_{m-1} , тогда, если фиксированы главные параметры, вершина A_1 может перемещаться по прямой $\Delta_1(A_0)$, а вершины A_a – в плоскости $\Delta_{m-1}(A_0)$.

Следовательно, формы ω_1^a и ω_a^1 являются главными

$$\omega_1^a = \Lambda_{1i}^a \omega^i, \quad \omega_a^1 = \Lambda_{ai}^1 \omega^i. \quad (5)$$

Продолжая уравнения (5), получаем

$$\nabla \Lambda_{ai}^1 - \delta_i^1 \omega_a^0 = \Lambda_{aj}^1 \omega^j,$$

$$\nabla \Lambda_{1i}^a - \delta_i^a \omega_1^0 = \Lambda_{1j}^a \omega^j.$$

Следовательно, каждая из систем функций Λ_{1ij}^a и Λ_{aj}^1 образует квазитензор [4].

На прямой $\Delta_1(A_0)$ найдём точку $F=\lambda A_0+A_1$ такую, чтобы при смещении точки A_0 в направлении $\Delta_{m-1}(A)$ смещение точки F не выходило из $(n-m+1)$ -плоскости $L_{n-m+1}=(A_0, A_1, A_{m+1}, \dots, A_n)$. Соотношение

$$dF \in L_{n-m+1}(A) \quad (6)$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\lambda \omega^a + \omega_1^a = 0.$$

Так как соотношение (6) должно выполняться при $\omega^1=0$, то, используя уравнения (5), получаем

$$(\Lambda_{1a}^b + \lambda \delta_a^b) \omega^a = 0. \quad (7)$$

Поскольку не все формы ω^a одновременно равны нулю, то λ должно удовлетворять уравнению

$$\det \|\Lambda_{1a}^b + \lambda \delta_a^b\| = 0. \quad (8)$$

Будем предполагать, что все корни уравнения (8) простые, вещественные. Тогда система уравнений (7) определяет $m-1$ линейно независимых одномерных распределений Δ_1^a , принадлежащих распределению Δ_m . Интегральные кривые распределений Δ_1, Δ_1^a образуют на поверхности S_m^1 сеть линий, которую обозначим Σ_m . Располагая каждую из вершин A_a репера на соответствующей прямой $\Delta_1^a(A_0)$, мы получаем $\Lambda_a^a=0, a \neq b$. На прямой $\Delta_1(A_0)$ мы получим $m-1$ точку

$$F_1^a = \Lambda_{1a}^a A_0 + A_1.$$

(по a не суммировать)

3. Точка $F_i^j (i \neq j)$ называется псевдофокусом [7] прямой A_0A_j , если при смещении точки A_0 в направлении A_0A_j касательная к линии, описываемой точкой F_i^j принадлежит гиперплоскости

$$L_{n-1}^j = (A_0 A_1 \dots A_{j-1} A_{j+1} \dots A_m \dots A_n).$$

Пусть точка

$$F_i^j = x_i^j A_0 + A_i \quad (i \neq j)$$

является псевдофокусом прямой A_0A_i . Тогда из

$$(dF_i^j, L_{n-1}^j)_{|\omega^1=\omega^2=\dots=\omega^{j-1}=\omega^{j+1}=\dots=\omega^m=0} = 0$$

получаем

$$[x_i^j \omega^j + \omega_i^j, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{j-1}, \omega^{j+1}, \dots, \omega^m] = 0.$$

Отсюда

$$x_i^j = -\Lambda_{ij}^j \quad (i \neq j, \text{ по } j \text{ не суммировать})$$

и

$$F_i^j = -\Lambda_{ij}^j A_0 + A_i \quad (\text{по } j \text{ не суммировать}). \quad (9)$$

Из формулы (9) следует, что точка F_1^a является псевдофокусом прямой A_0A_1 , соответствующим направлению $\Delta_1^a(A_0)$. Точки

$$F_i = \frac{1}{m-1} \Lambda_{ij}^j A_0 + A_i \quad (\text{по } j \text{ суммировать})$$

называются гармоническими полюсами точки A_0 относительно псевдофокусов прямой A_0A_i .

Если $\Lambda_{ij}^j=0$ (по j суммировать), то вершины A_i репера помещены в гармонические полюса прямых A_0A_i .

В силу заданного проективитета Π между парами поверхностей S_m^1 и S_m^2 , на поверхности S_m^2 имеют место аналогичные построения, которые здесь приводить не будем.

4. Обозначим через L_{2m+1} $(2m+1)$ -мерную плоскость, натянутую на касательные m -плоскости обеих поверхностей пары. Заметим, что L_{2m+1} является касательным $(2m+1)$ -мерным подпространством m -параметрического многообразия, элементом которого является прямая A_0A_n , т.е. содержит прямую A_0A_n и всю ее первую дифференциальную окрестность. Пересечение оснащающих плоскостей каждой из поверхностей пары обозначим L_{n-2m-2} . Эта плоскость является оснащающей плоскостью пары m -поверхностей. Оснащающие плоскости поверхностей S_m^1 и S_m^2 могут быть заданы соответственно уравнениями

$$x^0 - \lambda_{i_1}^0 x^{i_1} = 0; x^i - \lambda_{i_1}^i x^{i_1} = 0; \quad (10)$$

$$x^n - \lambda_{i_2}^n x^{i_2} = 0, x^{i_3} - \lambda_{i_2}^{i_3} x^{i_2} = 0, \quad (11)$$

а нормали первого рода поверхностей S_m^1 и S_m^2 могут быть определены как

$$x^i - \lambda_{i_1}^i x^{i_1} = 0; \quad (12)$$

$$x^{i_3} - \lambda_{i_2}^{i_3} x^{i_2} = 0. \quad (13)$$

$$(i_1 j_1, \dots, m+1, \dots, n; i_2 j_2, \dots, 0, 1, 2, \dots, n-m-1; i_3 j_3, \dots, n-m, \dots, n-1).$$

Здесь объекты оснащения $(\lambda_{i_1}^i, \lambda_{i_1}^i) \{(\lambda_{i_2}^n, \lambda_{i_2}^{i_3})\}$ охватываются фундаментальным геометрическим объектом пары m -поверхностей и удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla \lambda_{i_1}^i = -\omega_{i_1}^i + \lambda_{i_1}^i \omega^j,$$

$$\nabla \lambda_{i_2}^{i_3} = -\omega_{i_2}^{i_3} + \lambda_{i_2}^{i_3} \omega^j,$$

$$\nabla \lambda_{i_2}^n = -\lambda_{i_2}^{i_3} \omega_{i_3}^n - \omega_{i_2}^n - \lambda_{i_2}^n \omega_n^n + \lambda_{i_2}^n \omega_{i_2}^j \omega^j,$$

$$\nabla \lambda_{i_1}^0 = -\lambda_{i_1}^0 \omega_0^0 - \lambda_{i_1}^0 \omega_i^0 - \omega_{i_1}^0 + \lambda_{i_1}^0 \omega^j.$$

Компоненты $\lambda_{i_1}^i (\lambda_{i_2}^{i_3})$ объекта оснащения образуют самостоятельный подобъект, который определяет поле инвариантных $(n-m)$ -мерных плоскостей, являющихся полем нормалей первого рода поверхности $S_m^1 (S_m^2)$.

Из (10)–(13) следует, что $(n-2m-2)$ -плоскость L_{n-2m-2} задается уравнениями (12), (13), а $(n-2m)$ -плоскость L_{n-2m} , инвариантно присоединенная к паре и имеющая с $(2m+1)$ -плоскостью L_{2m+1} общие точки A_0 и A_n , задается уравнениями (10), (11).

5. К поверхностям пары могут быть присоединены поля гиперквадрик, имеющих с поверхностями S_m^1 и S_m^2 соприкосновение второго порядка

$$a_{ij} x^i x^j - 2b_{i_1} x^0 x^{i_1} + 2b_{i_1} c_{i_1}^i x^i x^{i_1} + b_{i_1} c_{j_1 k_1}^i x^j x^{k_1} = 0; \quad (14)$$

$$a_{i_3 j_3} x^{i_3} x^{j_3} - 2b_{i_2} x^n x^{i_2} + 2b_{i_2} c_{i_3 j_2}^{i_2} x^{i_3} x^{j_2} + b_{i_2} c_{j_2 k_2}^{i_2} x^{j_2} x^{k_2} = 0, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} b_{i_1} &= \lambda_{i_1}^i + m\lambda_{i_1}^0 - \Lambda_{ij}^{j_1} \lambda_{j_1}^i \lambda_{i_1}^j, \\ b_{i_2} &= \lambda_{i_2}^{i_3} + m\lambda_{i_2}^n - \Lambda_{i_3 j_3}^{j_1} \lambda_{j_1}^{i_3} \lambda_{i_2}^{j_3}, \\ a_{ij} &= b_{i_1} \Lambda_{ij}^{i_1}, \quad a_{i_3 j_3} = b_{i_1} \Lambda_{i_3 j_3}^{i_1}. \end{aligned}$$

Если считать, что

$$\begin{aligned} c_{i_1}^{j_1} &= \Lambda_{ij}^{j_1} \lambda_{i_1}^j - \delta_{i_1}^{j_1} \lambda_{i_1}^0, \quad c_{i_1 j_1}^{k_1} = \Lambda_{ij}^{j_1} \lambda_{i_1}^i \lambda_{j_1}^j - \lambda_{(i_1)}^0 \delta_{(j_1)}^{k_1} + c_{i_1(j_1)}^{k_1} \lambda_{i_1}^i, \\ c_{i_3 j_3}^{i_1} &= \Lambda_{i_3 j_3}^{i_1} \lambda_{j_3}^{i_3} - \delta_{i_3 j_3}^{i_1} \lambda_{i_3}^n, \\ c_{i_3 j_3}^{k_1} &= \Lambda_{i_3 j_3}^{k_1} \lambda_{i_3}^{i_3} \lambda_{j_3}^{j_3} - \lambda_{(i_3)}^n \delta_{(j_3)}^{k_1} + c_{i_3(j_3)}^{k_1} \lambda_{i_3}^{i_3}, \end{aligned}$$

то из (14), (15) получаем единственные соприкасающиеся гиперквадрики поверхностей S_m^1 и S_m^2 , соответственно.

Эти гиперквадрики обладают следующим свойством: поляра первой (второй) нормали поверхности $S_m^1(S_m^2)$ относительно гиперквадрики (14), (15) проходит через вторую (первую) нормаль поверхности $S_m^1(S_m^2)$.

Следовательно, между нормальными поверхностями $S_m^1(S_m^2)$ гиперквадрика (14), (15) устанавливает квазиполярное соответствие [8, 9].

В m -плоскостях L_m^1 и L_m^2 тензоры $a_{ij}, a_{i_3 j_3}$ и квазитензоры $\lambda_{i_1}^0, \lambda_{i_3}^n$ определяют соответственно квадрики $(a_{ij} + \lambda_{i_1}^0 \lambda_{j_1}^0) x^i x^j - 2\lambda_{i_1}^0 x^i x^0 + (x^0)^2 = 0, \quad x^{i_2} = 0;$ (16)

и

$$(a_{i_3 j_3} + \lambda_{i_3}^n \lambda_{j_3}^n) x^{i_3} x^{j_3} - 2\lambda_{i_3}^n x^{i_3} x^n + (x^n)^2 = 0, \quad x^{i_2} = 0. \quad (17)$$

Полярной точки $A_0(A)$ относительно квадрики (27), (28) является вторая нормаль m -поверхности $S_m^1(S_m^2)$.

6. Точка $X=x(A+\lambda_{i_1}^0 A_0)$, принадлежащая второй нормали L_{m-1}^1 m -поверхности, S_m^1 , вдоль 1-семейства

$$\begin{aligned} \omega^i &= t^i \theta, \quad D\theta = \theta \Lambda \theta, \\ dt^i - t^i \omega_0^0 + t^j \omega_j^i &= t^i \omega^j \end{aligned} \quad (18)$$

описывает линию с касательной $TX(t)$. Линейное пространство, натянутое на L_{n-m}^1 и $TX(t)$, пересекается с L_{n-m}^1 в точке Y . Вдоль (18) точка Y описывает линию с касательной $TY(t)$. Линейное пространство, натянутое на L_{n-m}^1 и $TY(t)$, пересекается с L_{m-1}^1 в точке $Z=z(A_1+\lambda_{i_1}^0 A_0)$, где

$$\begin{aligned} z^i &= \{\delta_{i_1}^{j_1} (\lambda_{k_1 p}^0 - \lambda_{k_1}^0 \lambda_p^0 + \Lambda_{kp}^i \lambda_{i_1}^q \lambda_q^0) + \\ &+ \Lambda_{kp}^{i_2} (\lambda_{i_2 j_2}^j - \Lambda_{ij}^{j_2} \lambda_{i_2}^q \lambda_{j_2}^i)\} t^j t^p x^k. \end{aligned} \quad (19)$$

Соотношение (19) определяет проективное преобразование $(m-1)$ -плоскости L_{m-1}^1 в себя, которое определяется матрицей Π_i^j , где

$$\begin{aligned} \Pi_i^j &= \{\delta_{i_1}^{j_1} (\lambda_{i_1 q}^0 - \lambda_{i_1}^0 \lambda_q^0 + \Lambda_{i_1 q}^{i_2} \lambda_{i_2}^k \lambda_k^0) + \\ &+ \Lambda_{i_1 q}^{i_2} (\lambda_{i_2 p}^j - \Lambda_{kp}^{j_2} \lambda_{i_2}^k \lambda_{j_2}^i)\} t^p t^q. \end{aligned}$$

Это преобразование будет преобразованием W , если $\Pi_i^i=0$.

Таким образом, в $(m-1)$ -плоскости L_{m-1}^1 мы получаем квадрику, каждой точке которой соответствует преобразование W $(m-1)$ -плоскости L_{m-1}^1 в себя [10]. Эту квадрику можно задать уравнениями

$$\begin{aligned} \{\lambda_{ij}^0 - \lambda_i^0 \lambda_j^0 + \Lambda_{ij}^{i_2} \lambda_{i_2}^k \lambda_k^0 + \\ + \Lambda_{ij}^{i_2} (\lambda_{i_2 p}^p - \Lambda_{kl}^{j_2} \lambda_{i_2}^k \lambda_{j_2}^p)\} x^i x^j = 0, \\ x^{i_2} = 0, \quad x^0 - \lambda_i^0 x^i = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Квадрике (20) в m -плоскости L_m^1 соответствует конус

$$\begin{aligned} \{\lambda_{ij}^0 - \lambda_i^0 \lambda_j^0 + \Lambda_{ij}^{i_2} \lambda_{i_2}^k \lambda_k^0 + \Lambda_{ij}^{i_2} (\lambda_{i_2 p}^p - \Lambda_{kl}^{j_2} \lambda_{i_2}^k \lambda_{j_2}^p)\} x^i x^j = 0, \\ x^{i_2} = 0. \end{aligned}$$

Аналогичный конус получаем в m -плоскости L_m^2 .

7. Пусть дана точка $X=x^i(A_i+\lambda_{i_1}^0 A_0+\lambda_{i_1}^i A_i)$, принадлежащая оснащающей плоскости L_{n-m-1}^1 m -поверхности S_m^1 . Пространство, натянутое на L_{n-m-1}^1 и $TX(t)$, пересекается с L_m^1 в точке

$$Y = (L_{n-m-1}^1, TX(t)) \cap L_m^1 = y^0 A_0 + y^i (A_i + \lambda_{i_1}^0 A_0).$$

Тогда

$$X^* = (L_m^1, TY(t)) \cap L_{n-m-1}^1 = x^{*i} (A_i + \lambda_{i_1}^0 A_0 + \lambda_{i_1}^i A_i),$$

где

$$x^{*i} = \Lambda_{ip}^{i_1} (\lambda_{i_1}^0 \delta_j^i + \lambda_{i_1 j}^j - \Lambda_{kj}^{i_1} \lambda_{i_1}^k \lambda_{k_1}^i) t^j t^p x^k. \quad (21)$$

Следовательно, мы получаем преобразование (21) $(n-m-1)$ -плоскости L_{n-m-1}^1 в себя, которое является преобразованием W , если

$$\Lambda_{ij}^{i_1} (\lambda_{i_1}^1 \delta_k^i + \lambda_{i_1 k}^k - \Lambda_{pk}^{i_1} \lambda_{i_1}^p \lambda_{j_1}^i) t^k t^j = 0.$$

Таким образом, мы получаем в m -плоскости L_m^1 конус

$$\Lambda_{ij}^{i_1} (\lambda_{i_1}^0 \delta_k^i + \lambda_{i_1 k}^k - \Lambda_{pk}^{i_1} \lambda_{i_1}^p \lambda_{j_1}^i) x^j x^k = 0, \quad x^{i_1} = 0,$$

образующим которого соответствуют 1-семейства (18), дающие преобразования W $(n-m-1)$ -плоскости L_{n-m-1}^1 в себя.

Аналогично в m -плоскости L_m^2 получаем конус

$$\Lambda_{i_3 j_3}^{i_2} (\lambda_{i_2}^n \delta_{k_3}^{i_3} + \lambda_{i_2 k_3}^{k_3} - \Lambda_{k_3 j_3}^{i_2} \lambda_{i_2}^{j_3} \lambda_{j_2}^{i_3}) x^{j_3} x^{k_3} = 0, \quad x^{i_1} = 0,$$

образующим которого соответствуют преобразования W $(n-m-1)$ -плоскости L_{n-m-1}^2 в себя.

8. Рассмотрим точку $X=x^0 A_0 + x^i (A_i + \lambda_{i_1}^0 A_0 + \lambda_{i_1}^i A_i)$, принадлежащую $(n-m-1)$ -плоскости L_{n-m}^1 . Имеем вдоль (18)

$$Y = (L_{n-m}^1, TX(t)) \cap L_{m-1}^1 = y^i (A_i + \lambda_{i_1}^0 A_0),$$

где

$$y^i = x^0 t^i + x^{i_1} (\lambda_{i_1}^0 \delta_j^i + \lambda_{i_1 j}^j - \Lambda_{j_1 k}^{i_1} \lambda_{i_1}^k \lambda_{j_1}^i) t^j.$$

Найдем

$$\begin{aligned} X^* &= (L_{m-1}^1, TX(t)) \cap L_{n-m}^1 = \\ &= x^{*0} A_0 + x^{*i} (A_i + \lambda_{i_1}^0 A_0 + \lambda_{i_1}^i A_i), \end{aligned}$$

где

$$x^{*0} = (\lambda_{ij}^0 - \lambda_{ij}^0 \lambda_j^0 - \Lambda_{ij}^i \lambda_i^0 + \Lambda_{ij}^i \lambda_i^k \lambda_k^0) t^i t^j x^0 + (\lambda_{ij}^0 \delta_k^i + \lambda_{ij}^i - \Lambda_{jk}^i \lambda_i^j \lambda_j^i) (\lambda_{ip}^0 - \lambda_i^0 \lambda_p^0 - \Lambda_{ip}^i \lambda_i^k \lambda_k^0) t^k t^p x^i, \quad (22)$$

$$x^{*i} = \Lambda_{ij}^i t^i t^j x^0 + \Lambda_{ij}^i (\lambda_{ji}^0 \delta_k^i + \lambda_{ji}^i - \Lambda_{pk}^i \lambda_{j1}^p \lambda_{k1}^i) t^j t^k x^{j1}.$$

Следовательно, (22) определяет проективное преобразование $(n-m)$ -плоскости L_{n-m}^1 в себя, которое будет преобразованием W , если

$$\{\lambda_{ij}^0 - \lambda_{ij}^0 \lambda_j^0 + \Lambda_{ij}^i \lambda_i^k \lambda_k^0 + \Lambda_{ik}^i (\lambda_{ij}^k - \Lambda_{pj}^i \lambda_{i1}^p \lambda_{j1}^k)\} t^i t^j = 0.$$

Таким образом, мы получаем в m -плоскости L_m^1 конус

$$\{\lambda_{ij}^0 - \lambda_{ij}^0 \lambda_j^0 + \Lambda_{ij}^i \lambda_i^k \lambda_k^0 + \Lambda_{ik}^i (\lambda_{ij}^k - \Lambda_{pj}^i \lambda_{i1}^p \lambda_{j1}^k)\} x^i x^j = 0,$$

$$x^i = 0,$$

образующим которого соответствуют 1-семейства (18), дающие преобразования W $(n-m)$ -плоскости L_{n-m}^1 в себя. Аналогично получается преобразование $(n-m)$ -плоскости L_{n-m}^2 в себя и соответствующий конус в m -плоскости L_m^2 , образующим которого соответствуют преобразования W $(n-m)$ -плоскости L_{n-m}^2 в себя.

9. Возьмем точку $X = x^0 A_0 + x^i (A_i + \lambda_i^0 A_0)$, принадлежащую касательной m -плоскости к m -поверхности S_m^1 . Имеем вдоль (18)

$$Y = (L_m^1, TX(t)) \cap L_{n-m-1}^1 = y^i (A_i + \lambda_i^0 A_0 + \lambda_i^i A_i),$$

где

$$y^i = \Lambda_{ij}^i x^i x^j,$$

тогда

$$X^* = (L_{n-m}^1, TY(t)) \cap L_m^1 = x^{*0} A_0 + x^{*i} (A_i + \lambda_i^0 A_0),$$

где

$$x^{*0} = \{\lambda_{ij}^0 - \lambda_{ij}^0 \lambda_j^0 - \lambda_{ij}^0 \lambda_{i1}^i + \Lambda_{pj}^i (\lambda_i^0 \lambda_{i1}^p \lambda_{j1}^i - \lambda_{i1}^p \lambda_{j1}^i)\} \Lambda_{kq}^i t^j t^q x^k, \quad (23)$$

$$x^{*i} = \Lambda_{kj}^i (\lambda_{i1}^0 \delta_p^j + \lambda_{i1}^i - \Lambda_{pq}^i \lambda_{i1}^q \lambda_{j1}^i) t^p t^j x^k.$$

Следовательно, (23) определяет проективное преобразование m -плоскости L_m^1 в себя, которое является преобразованием W , если

$$\Lambda_{ij}^i (\lambda_{i1}^0 \delta_p^i + \lambda_{i1}^i - \Lambda_{kp}^i \lambda_{i1}^k \lambda_{j1}^i) t^p t^j = 0$$

и мы получаем в m -плоскости L_m^1 конус

$$\Lambda_{ij}^i (\lambda_{i1}^0 \delta_p^j + \lambda_{i1}^i - \Lambda_{kp}^i \lambda_{i1}^k \lambda_{j1}^i) x^i x^j = 0,$$

$$x^i = 0,$$

образующим которого соответствуют 1-семейства, дающие преобразования W m -плоскости L_m^1 в себя. Аналогичное преобразование получается в L_m^2 .

Теорема. Если преобразование (19), (22) является преобразованием W плоскости $L_{m-1}^1(L_{n-m}^1)$ в себя, то и преобразование (22), (19) является преобразованием W плоскости $L_{n-m}^1(L_{m-1}^1)$ в себя.

Если преобразование (21) является преобразованием W плоскости L_{n-m-1}^1 в себя, то преобразование (23) является преобразованием W плоскости L_m^1 в себя и наоборот, если преобразование (23) является преобразованием W плоскости L_m^1 в себя, то (21) является преобразованием W плоскости L_{n-m-1}^1 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Базылев В.Т. О многомерных сетях и их преобразованиях // Итоги науки. Сер. Геометрия. – 1965. – С. 138–164.
2. Остиану Н.М. Инвариантное оснащение поверхности, несущей сеть // Известия вузов. Математика. – 1970. – № 7. – С. 72–82.
3. Болодурин В.С. О точечных соответствиях между многомерными поверхностями проективных пространств // Известия вузов. Математика. – 1975. – № 18. – С. 11–23.
4. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Труды Московского математического общества. – 1953. – № 2. – С. 275–382.
5. Лучинин А.А., Князева О.Г. Связности, ассоциированные с парой m -поверхностей // Прогрессивные технологии и экономика в машиностроении: Сб. трудов Всеросс. научно-практ. конф. – Юрга, 2003. – С. 314–315.

6. Лучинин А.А. О геометрии пары m -поверхностей в проективном пространстве P_n // Геометрический сборник. – 1977. – Вып. 18. – Томск: Изд-во Томск. ун-та. – С. 33–46.
7. Базылев В.Т. О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства // Известия вузов. Математика. – 1966. – № 2. – С. 9–19.
8. Luchinin A.A. On a class of the projective fibres // Proc. 5th Korea-Russia Intern. Symp. on Science and Technology. – Tomsk, 2001. – V. 2. – P. 235–238.
9. Остиану Н.М. Распределение m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Труды геометрического семинара. – ВИНТИ АН СССР. – 1971 – Т. 3. – С. 95–114.
10. Ивлев Е.Т., Лучинин А.А. Об отображении полей двумерных площадок L_2^1 и L_2^2 , инвариантно определенных на многообразии V_{12}^{n+1} // В сб. трудов 8 Корейско-русского Междунар. симпозиума по науке и технике. – 2004. – Т. 2. – С. 159–160.