ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 226 1976

ПРИЛОЖЕНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В настоящей статье гипергеометрическая функция двух переменных (1) представлена в виде суммы подходящих дробей. Для остаточного члена дана оценка по модулю в некоторой комплексной области комплексных переменных x и y (7).

В статье введена сокращенная запись произведения

$$(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1), \ (a)_0 = 1.$$

1. Функция двух переменных [1], стр. 219, (7)

$$F_2(\alpha, \beta, b, \gamma, c, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(b)_n}{(\gamma)_m(c)_n m!\, n!} x^m y^n \tag{1}$$

представляется кратным интегралом [1], стр. 224, (2)

$$F_2(\alpha, \beta, b, \gamma, c, x, y) = F_2(x, y) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(c)}{\Gamma(\beta)\Gamma(b)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(c-b)} \times$$

$$\times \int_0^1\int_0^1 u^{\beta-1} v^{b-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-v)^{c-b-1}(1-ux-vy)^{-\alpha}\, du\, dv, \tag{2}$$

$$\beta > 0, \ b > 0, \ \gamma-\beta > 0, \ c-b > 0.$$

Относительно функции (1) докажем теорему.

Теорема. Функция (1) с вещественными параметрами

$$0 < 2\alpha \leqslant 1, \ 0 < 2\beta \leqslant \gamma, \ 0 < 2b \leqslant c \tag{3}$$

представляется в виде суммы подходящих дробей и остаточного члена

$$F_2(x, y) = R_{nn}(x, y) + \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} \frac{a_\lambda b_\lambda c_\mu d_\mu}{a_\lambda c_\mu - x} \times$$

$$\times \frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\left(\frac{x-a_\lambda c_\mu}{c_\mu y}\right)^m \sum\limits_{\kappa=0}^{n-m} C_n^{m+\kappa}(-1)^\kappa \frac{(c+n-1)_{m+\kappa}}{(b+\kappa)_m (c)_\kappa}}{\sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m \frac{(c+n-1)_m}{(b)_m}\left(\frac{x-a_\lambda c_\mu}{c_\mu y}\right)^m}. \tag{4}$$

Коэффициенты a_λ, b_λ, c_μ, d_μ в равенстве (4) имеют положительные значения [2], стр. 5, 24 и ввиду [3], стр. 20, (1) и [4], стр. 23 (5) определяются согласно равенств

$$\left\{\begin{aligned} &\prod_{\lambda=1}^{n}\left(1-\frac{x}{a_\lambda}\right)=\sum_{m=0}^{n}C_n^m\frac{(1-\alpha-n)_m}{(1-2n)_m}(-x)^m=q_{2n}(x);\\ &\prod_{\mu=1}^{n}\left(1-\frac{x}{c_\mu}\right)=\sum_{m=0}^{n}C_n^m\frac{(1-\beta-n)_m}{(2-\gamma-2n)_m}(-x)^m=Q_{2n}(x);\\ &1<a_1<a_2<\ldots<a_n,\ 1<c_1<c_2<\ldots<c_n.\end{aligned}\right. \tag{5}$$

$$\left\{\begin{aligned} &b_\lambda=-p_{2n}(a_\lambda):\left\{a_\lambda\frac{d}{dx}\left[q_{2n}(a_\lambda)\right]\right\},\\ &p_{2n}(x)=\sum_{m=1}^{n-1}C_{n-1}^m\frac{(\beta-n)_m}{(1-2n)_m}(-x)^m.\\ &d_\mu=-P_{2n}(c_\mu):\left\{c_\mu\frac{d}{dx}\left[Q_{2n}(c_\mu)\right]\right\},\\ &P_{2n}(x)=\sum_{m=1}^{n}(-x)^{n-m}\sum_{\kappa=0}^{n-m}C_n^{m+\kappa}(-1)^\kappa\frac{(\gamma+n-1)_{m+\kappa}(\beta)_n}{(\beta+\kappa)_m(\gamma)_\kappa(\gamma+n-1)_n}.\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Остаточный член $R_{nn}(x,y)$ в равенстве (4) по модулю меньше следующей суммы:

$$\left\{\begin{aligned} &|R_{nn}(x,y)|<\frac{(\alpha)_n(1-\alpha)_n|1+\alpha_1(1-x-y)|^2\sigma^{2n}:[(n)_n(n+1)_n]}{|q_{2n}(x+y)\,q_{2n+2}(x+y)|\,[|1+\alpha_1(1-x-y)|^2-\sigma^2]}+\\ &+\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{a_\lambda b_\lambda(\beta)_n(\gamma-\beta_n)\,n!\,|1+\beta_1(1-x_1)|^2|x:\tau|^{2n+1}:[|x|(\gamma)_{2n}]}{(\gamma+n-1)_n|Q_{2n}(x_1)\,Q_{2n+2}(x_1)|\,[|1+\beta_1(1+x_1)|^2-|x:\tau|^2]}+\\ &+\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{a_\lambda b_\lambda d_\mu(b)_n(c-b)_n\,n!\,|y_1|^{2n+1}|1+b_1(1-y_1)|^2:[|y|(c)_{2n}]}{(c+n-1)_n|Q_{2n}(y_1)\,Q_{2n+2}(y_1)|\,[|1+b_1(1-y_1)|^2-|y_1|^2]};\\ &\sigma=max|ux+vy|,\ |\tau|=min|a_\lambda-vy|\ \text{для}\ 0\leqslant u\leqslant 1,\ 0\leqslant v\leqslant 1;\\ &\qquad\sigma<|1+\alpha_1(1-x-y)|,\ |x:\tau|<|1+\beta_1(1-x_1)|;\\ &\qquad\alpha_1=\frac{\alpha+a}{1-\alpha+a},\quad b_1=\frac{b+n}{c-b+n},\quad \beta_1=\frac{\beta+n}{\gamma-\beta+n};\\ &\qquad x_1=\frac{x}{a_\lambda-y},\quad y_1=\frac{yc_\mu}{a_\lambda c_\mu-x}.\\ &\qquad 0\leqslant Re\,(x+y)<1,\ 0\leqslant Re\frac{x}{1-y}\leqslant 1,\\ &\qquad 0\leqslant Re\frac{y}{1-x}\leqslant 1,\ n=1,2,\ldots\end{aligned}\right. \tag{7}$$

Доказательство. На основании формулы [1], стр. 116, (1) и второго равенства (5) имеем

$$\begin{aligned} Q_{2n}(x)&=F(-n,\ 1-\beta-n;\ 2-\gamma-2n;\ x)=\\ &=\frac{(\gamma-\beta)_n}{(\gamma+n-1)_n}F(-n,\ 1-\beta-n;\ \gamma-\beta;\ 1-x)=\frac{(\gamma-\beta)_n}{(\gamma+n-1)_n}T_{2n}(x).\end{aligned} \tag{8}$$

Ввиду формул (1) — (7), [4], стр. 23—24 и [5], стр. 312, (9) преобразуем двойной интеграл (2) следующим путем (ниже применяется сокращенная запись $A_1 = \dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}$,

$$A = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(c)}{\Gamma(\beta)\Gamma(b)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(c-b)}\Bigg)$$

$$\left\{\begin{aligned}
&F_2(x, y) = A\sum_{\lambda=1}^{n} b_\lambda \cdot \int_0^1 v^{b-1}(1-v)^{c-b-1}\left(\frac{a_\lambda - vy}{a_\lambda}\right)^{-1} dv \times \\
&\times \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}\left(1-\frac{ux}{a_\lambda - vy}\right)^{-1} du = A\int_0^1 v^{b-1}(1-v)^{c-b-1}\, dv \times \\
&\times \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1} r_{2n}(ux+vy)\, du + A_1 \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} \frac{a_\lambda b_\lambda c_\mu d_\mu}{a_\lambda c_\mu - x} \times \\
&\times \int_0^1 v^{b-1}(1-v)^{c-b-1}(1-vy_1)^{-1}\, dv + \rho_{2n}(ux+vy) + \\
&+ A_1 \sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda b_\lambda \int_0^1 \frac{v^{b-1}(1-v)^{c-b-1}}{a_\lambda - vy} R_{2n}\left(\frac{x}{a_\lambda - vy}\right) dv = \\
&= \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} \frac{a_\lambda b_\lambda c_\mu d_\mu}{a_\lambda c_\mu - x}\left[\frac{P_{2n}(y_1)}{Q_{2n}(y_1)} + \sigma_{2n}(y_1)\right] + \\
&+ \rho_{2n}(ux+vy) + s_{2n}\left(\frac{x}{a_\lambda - vy}\right).
\end{aligned}\right. \tag{9}$$

Остаточный член s_{2n} согласно равенств (7) — (9), [4] стр. 21, (1) и неравенства (15) преобразуется следующим путем:

$$\left(T_n\left(\frac{x}{a_\lambda - vy}\right) \equiv T_n\right)$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\left|s_{2n}\left(\frac{x}{a_\lambda - vy}\right)\right| < \sum_{\lambda=1}^{n}\frac{b_\lambda a_\lambda}{|x|}\left|\sum_{\kappa=n}^{\infty}\frac{(\beta)_\kappa \kappa!\,(\gamma+2\kappa)\,|x:\tau|^{2\kappa+1}}{(\gamma)_\kappa(\gamma-\beta)_{\kappa+1} T_{2\kappa} T_{2\kappa+2}}\right| < \\
&< \sum_{\lambda=1}^{n}\frac{a_\lambda b_\lambda (\beta)_n(\gamma-\beta)_n n!\,|1+\beta_1(1-x_1)|^2\,|x:\tau|^{2n+1} : [|x|(\gamma)_{2n}]}{(\gamma+n-1)_n\,|Q_{2n}(x_1)\,Q_{2n+2}(x_1)|\,[|1+\beta_1(1-x_1)|^2 - |x:\tau|^2]}, \\
&\text{где } |\tau| = min\,|a_\lambda - vy|,\ 0 \leqslant v \leqslant 1, \\
&\left|\frac{x}{\tau}\right| < |1+\beta_1(1-x_1)|,\ 0 < 2\beta \leqslant \gamma. \\
&\beta_1 = \frac{\beta+n}{\gamma-\beta+n};\ \ x_1 = \frac{x}{a_\lambda - y}.
\end{aligned}\right. \tag{10}$$

Правая часть неравенства (10) совпадает со вторым слагаемым правой части неравенства (7). Аналогично даются оценки модулей остаточных членов ρ_{2n} и σ_{2n} равенства (9). Ввиду равенства (9) и неравенства (10) теорема доказана.

Докажем теорему о неравенстве многочленов.

Теорема. Если корни многочлена $Q_{2\kappa+2}(z)$ разделяются корнями многочлена $Q_{2\kappa}(z)$, т. е.

$$Q_{2\kappa}(z) = (z+\beta_1)\ldots(z+\beta_\kappa),$$
$$Q_{2\kappa+2}(z) = (z+\alpha_1)\ldots(z+\alpha_{\kappa+1}), \tag{11}$$
$$\beta_0 = \alpha_1 > \beta_1 > \alpha_2 > \beta_2 > \ldots > \alpha_\kappa > \beta_\kappa > \beta_{\kappa+1} = \alpha_{\kappa+1} > 0,$$

то относительно этих многочленов имеет место неравенство

$$|Q_{2\kappa+2}(z)| \geqslant |Q_{2\kappa}(z)||z+\alpha|, \quad \kappa = 1, 2,\ldots;$$
$$\text{где } Re z \geqslant 0, \ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\kappa+1} = \beta_1\ldots\beta_\kappa\alpha, \tag{12}$$
$$\alpha_1 > \alpha > \alpha_{\kappa+1}.$$

Доказательство. Непосредственным вычислением нетрудно доказать, что неравенство (12) справедливо для двух множителей, т. е.

$$|z+c||z+d| \geqslant |z+a||z+b|, \ Re z \geqslant 0, \ ab = cd,$$
$$0 < a \leqslant b < d. \tag{13}$$

Пусть $\beta_{l-1} > \alpha > \beta_l$, $l = 1,\ldots,\kappa+1$, тогда на основании неравенств (11), (13), равенств (11) (12) получим следующие неравенства:

$$\begin{cases} |z+\alpha_1||z+\alpha_2| \geqslant |z+\beta_1|\left|z+\dfrac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1}\right|, \\ \qquad \left(\alpha_1 > \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1} > \alpha_2\right); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left|z+\dfrac{\alpha_1\ldots\alpha_e}{\beta_1\ldots\beta_{l-1}}\right||z+\alpha_{l+1}| \geqslant |z+\alpha|\left|z+\dfrac{\beta_l\ldots\beta_\kappa}{\alpha_{l+2}\ldots\alpha_{\kappa+1}}\right|, \\ \left(\dfrac{\alpha_1\ldots\alpha_l}{\beta_1\ldots\beta_{l-1}} > \dfrac{\alpha_1\ldots\alpha_{l+1}}{\beta_1\ldots\beta_{l-1}\alpha} = \dfrac{\beta_l\ldots\beta_\kappa}{\alpha_{l+2}\ldots\alpha_{\kappa+1}} > \beta_l\right); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left|z+\dfrac{\beta_{\kappa-1}\beta_\kappa}{\alpha_{\kappa+1}}\right||z+\alpha_{\kappa+1}| \geqslant |z+\beta_{\kappa-1}||z+\beta_\kappa|, \\ \left(\dfrac{\beta_{\kappa-1}\beta_\kappa}{\alpha_{\kappa+1}} > \beta_{\kappa-1} > \beta_\kappa > \alpha_{\kappa+1}\right). \end{cases} \tag{14}$$

Перемножая левые и правые части неравенств (14) и сокращая обе части полученного неравенства на равные множители, мы получим неравенство (12), что и требовалось доказать.

Ввиду равенства (8) и неравенства (12) имеем

$$|T_{2n+2m}(z)| < |T_{2n}(z)|\left|1+\frac{\beta+n}{\gamma-\beta+n}(1-z)\right|^m,$$
$$\gamma \geqslant 2\beta > 0, \ m = 1, 2,\ldots \tag{15}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бейтман и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция, функции Лежандра). М., Физматгиз, 1965.
2. Т. И. Стилтьес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1963.
3. В. Е. Корнилов. Система аппроксимаций Падэ для степенных функций. Изв. ТПИ, т. 154, стр. 20—23, Томск, 1967.
4. В. Е. Корнилов. Приложение цепных дробей к вычислению интегралов от биномных дифференциалов. Изв. ТПИ, т. 131, стр. 21—25, Томск, 1965.
5. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. М., Гостехиздат, 1953.