

РЕШЕНИЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

Гипергеометрическое дифференциальное уравнение

$$z(1-z) \frac{d^2 u}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{du}{dz} - abu = 0 \quad (1)$$

относится к вырожденному случаю тогда, когда одно из чисел $a, b, c-a, c-b$ — целое [1], стр. 99.

Сводка полных решений уравнения (1) в вырожденном случае дана в справочной математической литературе [1], стр. 82—85, где в сводной таблице приведено 29 случаев, когда вырожденное решение является рациональной функцией или функцией вида

$$u_1(z) = b^{\lambda} (1-z)^{\mu} p_n(z), \quad (2)$$

где $p_n(z)$ — многочлен степени n такой, что $p_n(0) \neq 0$ и $p_n(1) \neq 0$ ([1], стр. 81.)

В случаях 1—4 упомянутой таблицы второе линейно-независимое решение представлено функцией вида

$$u_1 = F(1+m, b; c; z), \quad c \neq 0, -1, \dots \quad (3)$$

В настоящей статье изучается вопрос о представлении функции вида (3) посредством комбинаций рациональной функции и функции вида (2) с неполной бета-функцией [2], стр. 308:

$$F(1+A, b; c; z) =$$

$$F(1, b+m; c; z) = \frac{(c-1)z^{1-c}}{(1-z)^{b+m+1-c}} \int_0^z t^{c-2} (1-t)^{b+m-c} dt, \quad c > 1. \quad (4)$$

Ввиду того, что в остальных случаях 5—29 приведенной в справочнике [1] таблицы вторыми решениями являются частные случаи функции типа (3), то и вообще второе решение дифференциального уравнения (1) является комбинацией функции (4) с рациональной функцией и функцией вида (2) или решением будет одна из этих функций. При аналитическом продолжении некоторые решения содержат логарифмы, такие решения также могут быть получены путем вычисления интегралов вида (4).

1. В статье [3] получена следующая формула: $F(1+m, b; c; z) =$

$$= \frac{c-1}{(1)_m} \sum_{\kappa=1}^m (-1)^{\kappa-1} C_m^\kappa \left[\sum_{p=0}^{\kappa-1} \frac{(b-\kappa)_{m+p}}{(b-c+m-\kappa+1)_{p+1}} (1-z)^p \right] +$$

$$+ \frac{(b)_m}{(1)_m} F(-m, 1-b; c-b-m; 1-z) \cdot F(1, b+m; c; z);$$

$$c-b \neq 1, \dots, m. \quad (5)$$

Применяя к последней функции равенства (5) формулу (4), получим:

$$F(1+m, b; c; z) =$$

$$= \frac{c-1}{(1)_m} \sum_{\kappa=1}^m (-1)^{\kappa-1} C_m^\kappa \left[\sum_{p=0}^{\kappa-1} \frac{(b-\kappa)_{m+p}}{(b-c+m-\kappa+1)_{p+1}} (1-z)^p \right] +$$

$$+ \frac{(b)_m (c-1) z^{1-c}}{(1)_m (1-z)^{b+m+1-c}} F(-m, 1-b; c-b-m; 1-z) \times$$

$$\times \int_0^z t^{c-2} (1-t)^{b+m-c} dt; c-b \neq 1, \dots, m; c > 1. \quad (6)$$

Полученное равенство (6) является представлением функции (3) посредством неполной бета-функции.

Если $c-b=p=1, \dots, m$; то ввиду [1], стр. 113, (2) исходная функция будет следующей:

$$F(1+m, b; b+p; z) = (1-z)^{p-m-1} F(p, b+p-m-1; b+p; z), \quad (7)$$

и к функции, расположенной в правой части равенства (7), уже применимы формулы (5) и (6).

Если $c=c_1-p$, $1 < c_1 < 2$, $p=1, 2, \dots$ то функция (4) или последняя функция равенства (5) сначала преобразуется согласно следующей формуле [4], стр. 17, (6):

$$F(1, b+m; c_1-p; z) = \frac{1}{1-z} \sum_{\kappa=0}^{p-1} (-1)^\kappa \frac{(c_1-p-b-m)_\kappa}{(c_1-p)_\kappa} \left(\frac{z}{1-z} \right)^\kappa +$$

$$+ (-1)^p \frac{(c_1-p-b-m)_p}{(c_1-p)_p} \left(\frac{z}{1-z} \right)^p F(1, b+m; c_1; z), \quad (8)$$

а затем к последней функции равенства (8) можно применить формулы (4) и (6). В случае $c=p=1, \dots, m+1$ функция (3) ввиду равенства (7) будет функцией вида (2),

Наконец в том случае, когда функция (4) имеет параметр $c=1+p=m+2, \dots$, то ввиду равенства (8) и очевидного равенства $F(1, b+m; 1; z) = (1-z)^{-b-m}$ окончательно получим:

$$F(1, b+m; 1+p; z) = (-1)^p \frac{(1)_p}{(1-b-m)_p} \left(\frac{1-z}{z} \right)^p \frac{1}{(1-z)^{b+m}} -$$

$$- \frac{1}{1-z} \sum_{\kappa=0}^{p-1} (-1)^\kappa \frac{(1-b-m)_\kappa}{(1)_\kappa} \left(\frac{z}{1-z} \right)^\kappa; p = m+1, \dots \quad (9)$$

2. Для аналитического продолжения интегралов типа (4) и (6) необходимо их сначала преобразовать к интегралам с наименьшими по абсолютной величине показателями степени подынтегральных функций. Такие преобразования в общем случае сделаны в статье [4] формулы (9)–(14).

Аналитическое продолжение при условии $0 < \theta < 1$, $0 < \varsigma < 1$, $\theta + \varsigma < 1$ ввиду [1], стр. 115, (33), (34) следующее:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^z t^{\theta-1} (1-t)^{\varsigma-1} dt = B(\theta, \varsigma) + \int_1^z t^{\theta-1} (1-t)^{\varsigma-1} dt = \\ &= \frac{1}{(-1)^\theta} B(\theta, 1-\theta-\varsigma) + \int_\infty^z t^{\theta-1} (1-t)^{\varsigma-1} dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Если $0 < \theta < 1$, $0 < \varsigma < 1$ и $1 < \theta + \varsigma < 2$, то ввиду [4] аналитическое продолжение интеграла I в смежности с бесконечностью следующее:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^z t^{\theta-1} (1-t)^{\varsigma-1} dt = \frac{z^\theta (1-z)^{\varsigma-1}}{\theta + \varsigma - 1} + \frac{\varsigma - 1}{\theta + \varsigma - 1} \int_0^z \frac{t^{\theta-1} dt}{(1-t)^{2-\varsigma}} = \\ &= \frac{z^\theta (1-z)^{\varsigma-1}}{\theta + \varsigma - 1} + (-1)^{-\theta} B(\theta, 1-\theta-\varsigma) + \frac{\varsigma - 1}{\theta + \varsigma - 1} \int_0^z \frac{t^{\theta-1} dt}{(1-t)^{2-\varsigma}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Далее, наряду с общепринятым аналитическим продолжением непосредственно гипергеометрического ряда (3), проще осуществить аналитическое продолжение последних функций в равенствах (5) и (8), это равнозначно вычислению интегралов типа (4) и (6) в смежности с точками 0, 1 и ∞ .

Подробно рассмотрим три случая.

1) Параметры b , c и $c-b$ не являются целыми величинами, тогда ввиду (10) получим:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^z t^{c-2} (1-t)^{b+m-c} dt = B(c-1, b+m+1-c) + \\ &+ \int_0^z t^{c-2} (1-t)^{b+m-c} dt; \quad c > 1, \quad b+m+2-c > 1; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^z t^{c-2} (1-t)^{b+m-c} dt = (-1)^{1-c} B(c-1, 1-b-m) + \\ &+ \int_\infty^z t^{c-2} (1-t)^{b+m-c} dt; \quad c > 1, \quad 2-b-m > 1. \end{aligned} \quad (13)$$

Согласно равенств (4), (12) и (13) получим также зависимость между вторыми интегралами равенств (12) и (13) и гипергеометрическими рядами:

$$\begin{aligned} F(1, b+m; b+m+2-c; 1-z) &= (c-b-m-1)(1-z)^{c-b-m-1} \times \\ &\times z^{1-c} \int_1^z t^{c-2} (1-t)^{b+m-c} dt; \quad b+m+2-c > 1, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} F(1, 2-c; 2-b-m; 1:z) &= -(b+m-1)(1-z)^{c-b-m-1} \times \\ &\times z^{2-c} \int_\infty^z t^{c-2} (1-t)^{b+m-c} dt; \quad 2-b-m > 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Если параметры c , $b+m+2-c$ или $2-b-m < 1$, то к функциям (4), (14) и (15) применяется формула (8) с целью повышения величин этих параметров.

2) Кроме целого положительного $a=1, 2, \dots$ одно из чисел b , c или $c-b=0, \pm 1, \dots$. Здесь второй случай распадается на случаи а) и б) следующие:

а) если c , $b-c+1$ или $1-b=1, 2, \dots$; то ввиду равенств (3), (7) и (9) вторым решением уравнения (1) будет рациональная функция или функция вида (2) и аналитическое продолжение конечных многочленов приведет также к конечным многочленам.

б) Если $1-c$, $c-b$ или $b=1, 2, \dots$; то соответственно функции (4), (14) или (15) относятся к логарифмическому случаю. Пусть $c-b=m+1$, для $c-b=1, \dots, m$ функция (3) преобразуется согласно равенству (7), тогда получим следующее аналитическое продолжение интегралов вида (4) и (6):

$$\begin{aligned} I &= \int_0^z t^{c-2} (1-t)^{-1} dt = \ln(1-z) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(2-c)_{\kappa}}{\kappa(1)_{\kappa}} [(1-z)^{\kappa} - 1] = \\ &= \ln(1-z) + \int_0^1 \frac{t^{c-2}-1}{1-t} dt + \int_1^z \frac{t^{c-2}-1}{1-t} dt; \quad c > 1. \end{aligned} \quad (16)$$

а также ввиду (13) и [1], стр. 18, (6)

$$I = \int_0^z \frac{t^{c-2} dt}{1-t} = \frac{\pi(-1)^{1-c}}{\sin(\pi c - \pi)} + \int_{\infty}^z \frac{t^{c-2} dt}{1-t}; \quad 1 < c < 2. \quad (17)$$

В заключение случая 2б) следует отметить, что при рациональном значении третьего параметра интегралы вида (16) и (17) и другие интегралы, относящиеся к этому случаю, выражаются в элементарных функциях [4].

3) Все параметры a , b и $c=0, \pm 1, \dots$. В этом случае, если $c=1, 2, \dots$; то функция (3) ввиду (7) и (9) будет функцией вида (2). Если $c=-p=0, -1, \dots$; то имеем логарифмический случай в смежности с любой из трех точек 0, 1 и ∞ . А именно, функция (15) преобразуется ввиду [4], стр. 19, (12) следующим путем:

$$\begin{aligned} \frac{z^{-p-2}}{p+2} F\left(1, 2+p; 3+p; \frac{1}{z}\right) &= \int_{\infty}^z t^{-p-2} (1-t)^{-1} dt = \\ &= - \sum_{\kappa=0}^p \frac{z^{\kappa-p-1}}{1+p-\kappa} + \int_{\infty}^z \frac{dt}{t(1-t)} = - \sum_{\kappa=0}^p \frac{z^{\kappa-p-1}}{1+p-\kappa} - \ln\left(1 - \frac{1}{z}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Аналитическое продолжение второго интеграла равенства (18) будет следующим:

$$I_2 = \int_{\infty}^z \frac{dt}{t(1-t)} = -\ln(z-1) + \int_1^z \frac{dt}{t} = \pi\sqrt{-1} + \ln z + \int_0^z \frac{dt}{1-t}. \quad (19)$$

После замены интегралов равенства (19) гипергеометрическими функциями получим также

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{z} F\left(1, 1; 2; \frac{1}{z}\right) = -\ln(z-1) - (1-z)F(1, 1; 2; 1-z) = \\ &= \pi\sqrt{-1} + \ln z + zF(1, 1; 2; z). \end{aligned} \quad (20)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бейтман и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция, функции Лежандра). М., Физматгиз, 1965.
 2. И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
 3. В. Е. Корнилов. Преобразование в цепные дроби некоторых степенных рядов. Изв. ТПИ, т. 154, 1967.
 4. В. Е. Корнилов. Выделение алгебраической части интегралов от биноминых дифференциалов. Изв. ТПИ, т. 131, 1965.
-