ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 226 1976

РЕШЕНИЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

Гипергеометрическое дифференциальное уравнение

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+[c-(a+b+1)z]\frac{du}{dz}-abu=0 \tag{1}$$

относится к вырожденному случаю тогда, когда одно из чисел a, b, $c-a$, $c-b$ — целое [1], стр. 99.

Сводка полных решений уравнения (1) в вырожденном случае дана в справочной математической литературе [1], стр. 82—85, где в сводной таблице приведено 29 случаев, когда вырожденное решение является рациональной функцией или функцией вида

$$u_1(z)=b^{\lambda}(1-z)^{\mu}p_n(z), \tag{2}$$

где $p_n(z)$ — многочлен степени n такой, что $p_n(0)\neq 0$ и $p_n(1)\neq 0$ ([1], стр. 81.)

В случаях 1—4 упомянутой таблицы второе линейно-независимое решение представлено функцией вида

$$u_1=F(1+m,\ b;\ c;\ z),\ c\neq 0,\ -1,\ldots \tag{3}$$

В настоящей статье изучается вопрос о представлении функции вида (3) посредством комбинаций рациональной функции и функции вида (2) с неполной бета-функцией [2], стр. 308:

$$F(1+A,\ b;\ c;\ z)=$$

$$F(1,\ b+m;\ c;\ z)=\frac{(c-1)z^{1-c}}{(1-z)^{b+m+1-c}}\int\limits_0^z t^{c-2}(1-t)^{b+m-c}\,dt,\ c>1. \tag{4}$$

Ввиду того, что в остальных случаях 5—29 приведенной в справочнике [1] таблицы вторыми решениями являются частные случаи функции типа (3), то и вообще второе решение дифференциального уравнения (1) является комбинацией функции (4) с рациональной функцией и функцией вида (2) или решением будет одна из этих функций. При аналитическом продолжении некоторые решения содержат логарифмы, такие решения также могут быть получены путем вычисления интегралов вида (4).

1. В статье [3] получена следующая формула: $F(1+m,\ b;\ c;\ z)=$

$$=\frac{c-1}{(1)_m}\sum_{\kappa=1}^{m}(-1)^{\kappa-1}C_m^{\kappa}\left[\sum_{p=0}^{\kappa-1}\frac{(b-\kappa)_{m+p}}{(b-c+m-\kappa+1)_{p+1}}(1-z)^p\right]+$$

$$+\frac{(b)_m}{(1)_m}F(-m,\ 1-b;\ c-b-m;\ 1-z)\cdot F(1,\ b+m;\ c;\ z);$$

$$c-b\neq 1,\dots,\ m. \qquad (5)$$

Применяя к последней функции равенства (5) формулу (4), получим:

$$F(1+m,\ b;\ c;\ z)=$$

$$=\frac{c-1}{(1)_m}\sum_{\kappa=1}^{m}(-1)^{\kappa-1}C_m^{\kappa}\left[\sum_{p=0}^{\kappa-1}\frac{(b-\kappa)_{m+p}}{(b-c+m-\kappa+1)_{p+1}}(1-z)^p\right]+$$

$$+\frac{(b)_m(c-1)z^{1-c}}{(1)_m(1-z)^{b+m+1-c}}F(-m,\ 1-b;\ c-b-m;\ 1-z)\times$$

$$\times\int_0^z t^{c-2}(1-t)^{b+m-c}\,dt;\ c-b\neq 1,\dots,\ m;\ c>1. \qquad (6)$$

Полученное равенство (6) является представлением функции (3) посредством неполной бета-функции.

Если $c-b=p=1,\dots,m$; то ввиду [1], стр. 113, (2) исходная функция будет следующей:

$$F(1+m,\ b;\ b+p;\ z)=(1-z)^{p-m-1}F(p,\ b+p-m-1;\ b+p;\ z), \qquad (7)$$

и к функции, расположенной в правой части равенства (7), уже применимы формулы (5) и (6).

Если $c=c_1-p$, $1<c_1<2$, $p=1,\ 2,\dots$ то функция (4) или последняя функция равенства (5) сначала преобразуется согласно следующей формуле [4], стр. 17, (6):

$$F(1,\ b+m;\ c_1-p;\ z)=\frac{1}{1-z}\sum_{\kappa=0}^{p-1}(-1)^{\kappa}\frac{(c_1-p-b-m)_\kappa}{(c_1-p)_\kappa}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\kappa}+$$

$$+(-1)^p\frac{(c_1-p-b-m)_p}{(c_1-p)_p}\left(\frac{z}{1-z}\right)^p F(1,\ b+m;\ c_1;\ z), \qquad (8)$$

а затем к последней функции равенства (8) можно применить формулы (4) и (6). В случае $c=p=1,\dots,\ m+1$ функция (3) ввиду равенства (7) будет функцией вида (2),

Наконец в том случае, когда функция (4) имеет параметр $c=1+p=m+2,\dots$, то ввиду равенства (8) и очевидного равенства $F(1,\ b+m;\ 1;\ z)=(1-z)^{-b-m}$ окончательно получим:

$$F(1,\ b+m;\ 1+p;\ z)=(-1)^p\frac{(1)_p}{(1-b-m)_p}\left(\frac{1-z}{z}\right)^p\frac{1}{(1-z)^{b+m}}-$$

$$-\frac{1}{1-z}\sum_{\kappa=0}^{p-1}(-1)^{\kappa}\frac{(1-b-m)_\kappa}{(1)_\kappa}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\kappa}\Bigg];\ p=m+1,\dots \qquad (9)$$

2. Для аналитического продолжения интегралов типа (4) и (6) необходимо их сначала преобразовать к интегралам с наименьшими по абсолютной величине показателями степени подынтегральных функций. Такие преобразования в общем случае сделаны в статье [4] формулы (9)—(14).

Аналитическое продолжение при условии $0 < \theta < 1$, $0 < \varsigma < 1$, $\theta + \varsigma < 1$ ввиду [1], стр. 115, (33), (34) следующее:

$$I = \int_0^z t^{\theta-1}(1-t)^{\varsigma-1}\,dt = \mathrm{B}(\theta, \varsigma) + \int_1^z t^{\theta-1}(1-t)^{\varsigma-1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{(-1)^{\theta}}\,\mathrm{B}(\theta,\ 1-\theta-\varsigma) + \int_{\infty}^{z} t^{\theta-1}(1-t)^{\varsigma-1}\,dt. \tag{10}$$

Если $0 < \theta < 1$, $0 < \varsigma < 1$ и $1 < \theta + \varsigma < 2$, то ввиду [4] аналитическое продолжение интеграла I в смежности с бесконечностью следующее:

$$I = \int_0^z t^{\theta-1}(1-t)^{\varsigma-1}\,dt = \frac{z^{\theta}(1-z)^{\varsigma-1}}{\theta+\varsigma-1} + \frac{\varsigma-1}{\theta+\varsigma-1}\int_0^z \frac{t^{\theta-1}\,dt}{(1-t)^{2-\varsigma}} =$$

$$= \frac{z^{\theta}(1-z)^{\varsigma-1}}{\theta+\varsigma-1} + (-1)^{-\theta}\,\mathrm{B}(\theta,\ 1-\theta-\varsigma) + \frac{\varsigma-1}{\theta+\varsigma-1}\int_0^z \frac{t^{\theta-1}\,dt}{(1-t)^{2-\varsigma}}. \tag{11}$$

Далее, наряду с общепринятым аналитическим продолжением непосредственно гипергеометрического ряда (3), проще осуществить аналитическое продолжение последних функций в равенствах (5) и (8), это равнозначно вычислению интегралов типа (4) и (6) в смежности с точками 0, 1 и ∞.

Подробно рассмотрим три случая.

1) Параметры b, c и $c-b$ не являются целыми величинами, тогда ввиду (10) получим:

$$I = \int_1^z t^{c-2}(1-t)^{b+m-c}\,dt = \mathrm{B}(c-1,\ b+m+1-c) +$$

$$+ \int_0^z t^{c-2}(1-t)^{b+m-c}\,dt;\ c > 1,\ b+m+2-c > 1; \tag{12}$$

$$I = \int_0^z t^{c-2}(1-t)^{b+m-c}\,dt = (-1)^{1-c}\,\mathrm{B}(c-1,\ 1-b-m) +$$

$$+ \int_{\infty}^{z} t^{c-2}(1-t)^{b+m-c}\,dt;\ c > 1,\ 2-b-m > 1. \tag{13}$$

Согласно равенств (4), (12) и (13) получим также зависимость между вторыми интегралами равенств (12) и (13) и гипергеометрическими рядами:

$$F(1,\ b+m;\ b+m+2-c;\ 1-z) = (c-b-m-1)(1-z)^{c-b-m-1} \times$$

$$\times z^{1-c}\int_1^z t^{c-2}(1-t)^{b+m-c}\,dt;\ b+m+2-c > 1, \tag{14}$$

$$F(1,\ 2-c;\ 2-b-m;\ 1:z) = -(b+m-1)(1-z)^{c-b-m-1} \times$$

$$\times z^{2-c}\int_{\infty}^{z} t^{c-2}(1-t)^{b+m-c}\,dt;\ 2-b-m > 1. \tag{15}$$

Если параметры c, $b+m+2-c$ или $2-b-m<1$, то к функциям (4), (14) и (15) применяется формула (8) с целью повышения величин этих параметров.

2) Кроме целого положительного $a=1, 2, \ldots$ одно из чисел b, c или $c-b=0, \pm 1, \ldots$ Здесь второй случай распадается на случаи а) и б) следующие:

а) если c, $b-c+1$ или $1-b=1, 2, \ldots$; то ввиду равенств (3), (7) и (9) вторым решением уравнения (1) будет рациональная функция или функция вида (2) и аналитическое продолжение конечных многочленов приведет также к конечным многочленам.

б) Если $1-c$, $c-b$ или $b=1, 2, \ldots$; то соответственно функции (4), (14) или (15) относятся к логарифмическому случаю. Пусть $c-b=$ $=m+1$, для $c-b=1, \ldots, m$ функция (3) преобразуется согласно равенству (7), тогда получим следующее аналитическое продолжение интегралов вида (4) и (6):

$$I=\int\limits_0^z t^{c-2}(1-t)^{-1}\,dt=\ln(1-z)+\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{(2-c)_\kappa}{\kappa(1)_\kappa}\left[(1-z)^\kappa-1\right]=$$

$$=\ln(1-z)+\int\limits_0^1\frac{t^{c-2}-1}{1-t}\,dt+\int\limits_1^z\frac{t^{c-2}-1}{1-t}\,dt;\ c>1. \tag{16}$$

а также ввиду (13) и [1], стр. 18, (6)

$$I=\int\limits_0^z\frac{t^{c-2}\,dt}{1-t}=\frac{\pi(-1)^{1-c}}{\sin(\pi c-\pi)}+\int\limits_\infty^z\frac{t^{c-2}\,dt}{1-t};\ 1<c<2. \tag{17}$$

В заключение случая 2б) следует отметить, что при рациональном значении третьего параметра интегралы вида (16) и (17) и другие интегралы, относящиеся к этому случаю, выражаются в элементарных функциях [4].

3) Все параметры a, b и $c=0, \pm 1, \ldots$ В этом случае, если $c=1$, $2, \ldots$; то функция (3) ввиду (7) и (9) будет функцией вида (2). Если $c=-p=0, -1, \ldots$; то имеем логарифмический случай в смежности с любой из трех точек 0, 1 и ∞. А именно, функция (15) преобразуется ввиду [4], стр. 19, (12) следующим путем:

$$\frac{z^{-p-2}}{p+2}F\left(1,\ 2+p;\ 3+p;\ \frac{1}{z}\right)=\int\limits_\infty^z t^{-p-2}(1-t)^{-1}\,dt=$$

$$=-\sum_{\kappa=0}^{p}\frac{z^{\kappa-p-1}}{1+p-\kappa}+\int\limits_\infty^z\frac{dt}{t(1-t)}=-\sum_{\kappa=0}^{p}\frac{z^{\kappa-p-1}}{1+p-\kappa}-\ln\left(1-\frac{1}{z}\right). \tag{18}$$

Аналитическое продолжение второго интеграла равенства (18) будет следующим:

$$I_2=\int\limits_\infty^z\frac{dt}{t(1-t)}=-\ln(z-1)+\int\limits_1^z\frac{dt}{t}=\pi\sqrt{-1}+\ln z+\int\limits_0^z\frac{dt}{1-t}. \tag{19}$$

После замены интегралов равенства (19) гипергеометрическими функциями получим также

$$I_2 = \frac{1}{z} F\left(1,\ 1;\ 2; \frac{1}{z}\right) = -\ln(z-1) - (1-z) F(1,\ 1;\ 2;\ 1-z) =$$

$$= \pi \sqrt{-1} + \ln z + zF(1,\ 1;\ 2;\ z). \qquad (20)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бейтман и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция, функции Лежандра). М., Физматгиз, 1965.
2. И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
3. В. Е. Корнилов. Преобразование в цепные дроби некоторых степенных рядов. Изв. ТПИ, т. 154, 1967.
4. В. Е. Корнилов. Выделение алгебраической части интегралов от биномных дифференциалов. Изв. ТПИ, т. 131, 1965.