ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 226 1976

ПРИМЕНЕНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В этой статье на основе цепных дробей получены приближения эллиптических интегралов в виде суммы арктангенсов и дана оценка остаточных членов.

В дальнейшем применяется сокращенная запись

$$\kappa^2 x^2 \equiv y; \quad (a)_\kappa = a(a+1)\dots(a+\kappa-1), \quad (a)_0 = 1. \tag{1}$$

1. Относительно четных подходящих дробей следующей степенной функции [1]

$$(1-y)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m \frac{(0{,}5-n)_m}{(1-2n)_m}(-y)^m}{\sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m \frac{(0{,}5-n)_m}{(1-2n)_m}(-y)^m} + r_{2n}(y) = \frac{p_{2n}(y)}{q_{2n}(y)} + r_{2n}(y);$$

$$n = 1, 2, \dots \tag{2}$$

докажем теорему.

Теорема. Четная подходящая дробь (2) представляется следующей суммой элементарных дробей

$$\frac{p_{2n}(y)}{q_{2n}(y)} \equiv \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{1 - y\sin^2\left(\frac{2\pi m-\pi}{4n}\right)}; \quad n = 1, 2, \dots \tag{3}$$

Доказательство. Известно [2], что знаменатели подходящих дробей (2) имеют связь с полиномами Чебышева первого рода, а именно:

$$q_{2n}(y) = T_n(1-2:y) = \cos[n\arccos(1-2:y)]. \tag{4}$$

Согласно равенству (4) нетрудно вычислить, что

$$q_{2n}(y) = \prod_{m=1}^{n}\left[1 - y\sin^2\left(\frac{2\pi m-\pi}{4n}\right)\right]; \quad n = 1, 2, \dots \tag{5}$$

Для доказательства тождества (3) пусть

$$\beta_m = -\sin^2\left(\frac{2\pi m-\pi}{4n}\right),$$

тогда

$$\frac{1:n}{1+\beta_1 y}+\frac{1:n}{1+\beta_2 y}+\cdots+\frac{1:n}{1+\beta_n y}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m \frac{(0,5-n)_m}{(1-2n)_m}(-y)^m}{\sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m \frac{(0,5-n)_m}{(1-2n)_m}(-y)^m}=\frac{p_{2n}(y)}{q_{2n}(y)}. \quad (6)$$

Первый коэффициент числителя $p_{2n}(y)$ равен единице, а также сумма n слагаемых, каждое из которых равно 1 : n, равна единице. Ввиду равенств (5) и (6) относительно корней многочлена $q_{2n}(y)$ справедливы равенства

$$-C_n^1\frac{(0,5-n)}{(1-2n)}=\beta_1+\cdots+\beta_n;\quad C_n^m(-1)^m\frac{(0,5-n)_m}{(1-2n)_m}=$$

$$=\beta_1\ldots\beta_m+\cdots+\beta_{n-m+1}\ldots\beta_n;\quad m=2,\ldots,n-1. \quad (7)$$

На основании равенств (7) вычислим коэффициенты при y^m числителя $p_{2n}(y)$, при этом в левой части равенства имеем nC_{n-1}^m слагаемых, получим

$$\frac{1}{n}(\beta_2\cdots\beta_{m+1}+\cdots+\beta_{n-m+1}\cdots\beta_n)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{n}(\beta_1\cdots\beta_m+\cdots+\beta_{n-m}\cdots\beta_{n-1})=$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{nC_{n-1}^m}{C_n^m}\cdot C_n^m(-1)^m\frac{(0,5-n)_m}{(1-2n)_m}=C_{n-1}^m(-1)^m\frac{(0,5-n)_m}{(1-2n)_m}$$

$$m=1,\ldots,n-1;$$

где правая часть равенства тождественно равна коэффициенту числителя (6) при y^m, тем самым теорема полностью доказана.

Ввиду равенств (2) и (3) имеем

$$(1-y)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{1-y\sin^2\left(\frac{2\pi m-\pi}{4n}\right)}+r_{2n}(y);\quad n=1,2,\ldots \quad (8)$$

2. Эллиптический интеграл первого рода [3], стр. 82 ($x=\sin\varphi$, $\kappa^2<1$)

$$F(\varphi,\kappa)\equiv\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}}=\int\limits_0^{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\kappa^2x^2}} \quad (9)$$

после замены множителя $(1-\kappa^2x^2)^{-0,5}$ подынтегрального выражения элементарными дробями (8) и вычисления полученной суммы интегралов приближенно равен следующей сумме арктангенсов:

$$F(\varphi,\kappa)=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\operatorname{arctg}\left[\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\left(\frac{2\pi m-\pi}{4n}\right)}\cdot\operatorname{tg}\varphi\right]}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\left(\frac{2\pi m-\pi}{4n}\right)}}+$$

$$+\rho_{2n}(y);\quad \varphi=\arcsin x,\ \kappa^2<1,\ n=1,2,\ldots; \quad (10)$$

где

$$\rho_{2n}(y)=\int\limits_0^x \frac{r_{2n}(y)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{11}$$

Эллиптические интегралы второго рода

$$E(\varphi,\kappa)=\int\limits_0^x \frac{\sqrt{1-\kappa^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad x=\sin\varphi \tag{12}$$

и третьего рода

$$H(\varphi,h,\kappa)=\int\limits_0^x \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}}, \; x=\sin\varphi \tag{13}$$

по аналогии с интегралом (9) могут быть представлены следующими суммами арктангенсов:

$$E(\varphi,\kappa)=2\kappa\varphi-$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\operatorname{arctg}(\alpha_m \operatorname{tg}\varphi)}{\alpha_m}\operatorname{ctg}^2\left(\frac{2\pi m-\pi}{4n}\right)+$$

$$+R_{2n}(y), \quad n=1,2,\ldots; \tag{14}$$

$$H(\varphi,h,\kappa)=\frac{p_{2n}(-\kappa^2:h)\operatorname{arctg}(\sqrt{1+h}\cdot\operatorname{tg}\varphi)}{q_{2n}(-\kappa^2:h)\sqrt{1+h}}+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{(1-\alpha_m^2)\operatorname{arctg}(\alpha_m\operatorname{tg}\varphi)}{(h+1-\alpha_m^2)\cdot\alpha_m}+\sigma_{2n}(y);$$

$$n=1,2,\ldots; \quad h>-1, \tag{15}$$

где

$$\alpha_m^2=1-\kappa^2\sin^2\left(\frac{2\pi m-\pi}{4n}\right); \quad R_{2n}(y)=\int\limits_0^x\frac{(1-y)\,r_{2n}(y)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{16}$$

$$\sigma_{2n}(y)=\int\limits_0^x\frac{r_{2n}(y)\,dx}{(1+hx^2)\sqrt{1-x^2}}. \tag{17}$$

Полные эллиптические интегралы согласно равенств (10) (14) и (15) приближенно равны следующим суммам:

$$F\left(\frac{\pi}{2},\kappa\right)=\frac{\pi}{2n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\alpha_m}+\rho_{2n}(\kappa^2), \quad n=1,2,\ldots; \tag{18}$$

$$E\left(\frac{\pi}{2},\kappa\right)=\pi n-\frac{\pi}{2n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\alpha_m}\operatorname{ctg}^2\left(\frac{2\pi m-\pi}{4n}\right)+R_{2n}(\kappa^2),$$

$$n=1,2,\ldots; \tag{19}$$

$$H\left(\frac{\pi}{2},h,\kappa\right)=\frac{\pi p_{2n}(-\kappa^2:h)}{2q_{2n}(-\kappa^2:h)\sqrt{1+h}}+\frac{\pi}{2n}\sum_{m=1}^{n}\frac{(1-\alpha_m^2):\alpha_m}{h+1-\alpha_m^2}+$$

$$+\sigma_{2n}(\kappa^2), \quad n=1,2,\ldots; \quad h>-1. \tag{20}$$

3. Неравенства $(q_n(y) \equiv q_n)$

$$q_{4n} > \left(1 - y + \frac{y^2}{16}\right)^n, \quad q_{4n+2} \geqslant \left(1 - \frac{y}{2}\right)\left(1 - y + \frac{y^2}{16}\right)^n, \quad y \leqslant 1 \tag{21}$$

справедливы ввиду равенств (2) и (5), а именно:

$$q_{4n}(y) = \prod_{m=1}^{n}\left[1 - y + \frac{y^2}{4}\sin^2\left(\frac{2\pi m - \pi}{4n}\right)\right] = 1 - ny + \cdots + \frac{y^{2n}}{2^{4n-1}} >$$
$$> (1 - y + y^2 : 16)^n, \quad y \leqslant 1.$$

Аналогично доказывается второе неравенство (21).

На основании неравенств (21), равенства (2) и бесконечного ряда для остаточного члена $r_{2n}(y)$ [4], стр. 21, (1) нетрудно получить оценки остаточных членов (11), (16) и (17). Остаточные члены по абсолютной величине будут меньше следующих выражений ($n = 1, 2, \ldots$; $y < 1$, $x = \sin\varphi$):

$$|\rho_{2n}(y)| < \frac{y^{2n}\operatorname{arctg}(\sqrt{1-\kappa^2}\cdot\operatorname{tg}\varphi)}{2^{4n-1}(1 - y:2)(1 - y + y^2:16)^{n-1}\sqrt{1-\kappa^2}}; \tag{22}$$

$$|R_{2n}(y)| < \frac{y^{2n}\arcsin x}{2^{4n-1}(1 - y:2)(1 - y + y^2:16)^{n-1}}; \tag{23}$$

$$\sigma_{2n}(y) < \frac{y^{2n}2^{1-4n}}{(1 - y:2)(1 - y + y^2:16)^{n-1}}\left[\frac{h\operatorname{arctg}(\sqrt{1+h}\cdot\operatorname{tg}\varphi)}{(h+\kappa^2)\sqrt{1+h}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\kappa^2\operatorname{arctg}(\sqrt{1-\kappa^2}\cdot\operatorname{tg}\varphi)}{(h+\kappa^2)\sqrt{1-\kappa^2}}\right], \quad h \neq -\kappa^2, \quad h > -1. \tag{24}$$

Для $n = 1-6$, 8 многочлены $q_{2n}(y) \equiv q_{2n}$ нетрудно представить в виде произведения квадратных трехчленов, а именно:

$$\left\{\begin{aligned}
&q_2 = 1 - \frac{y}{2}; \quad q_4 = 1 - y + \frac{y^2}{8}; \quad q_6 = \left(1 - \frac{y}{2}\right)\left(1 - y + \frac{y^2}{16}\right);\\
&q_8 = \left(1 - y + \frac{y^2}{16 - 8\sqrt{2}}\right)\left(1 - y + \frac{y^2}{16 + 8\sqrt{2}}\right);\\
&q_{10} = (1 - y:2)\left(1 - y + \frac{y^2}{24 - 8\sqrt{5}}\right)\left(1 - y + \frac{y^2}{24 + 8\sqrt{5}}\right);\\
&q_{12} = \left(1 - y + \frac{y^2}{8}\right)\left(1 - y + \frac{y^2}{32 - 16\sqrt{3}}\right)\left(1 - y + \frac{y^2}{32 + 16\sqrt{3}}\right);\\
&q_{16} = \left[\left(1 - y + \frac{y^2}{8}\right)^2 - \frac{2 - \sqrt{2}}{256}y_4\right]\left[\left(1 - y + \frac{y^2}{8}\right)^2 - \frac{2 + \sqrt{2}}{256}y^4\right].
\end{aligned}\right. \tag{25}$$

Согласно равенств (25) корни отдельных многочленов можно представить в виде радикалов.

4. Пусть даны интегралы вида

$$\Phi(x, \kappa, \alpha) = \int_0^x \frac{(1 - \kappa^2x^2)^\alpha}{\sqrt{1 - x^2}}dx, \quad -\frac{1}{2} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}; \tag{26}$$

$$H_1(x, h, \kappa, \alpha) = \int_0^x \frac{(1 - y)^\alpha dx}{(1 + hx^2)\sqrt{1 - x^2}}, \quad h > -1,$$

$$0 < x \leqslant 1, \quad \kappa^2 < 1, \quad -\frac{1}{2} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}, \tag{27}$$

и, ввиду [1], функция

$$(1-y)^\alpha = \frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m \frac{(-\alpha-n)_m}{(1-2n)_m}(-y)^m}{\sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m \frac{(\alpha-n+1)_m}{(1-2n)_m}(-y)^m} + r_{2n}(y) = \frac{p_{2n}(y)}{q_{2n}(y)} +$$

$$+ r_{2n}(y) = \sum_{m=1}^{n} \frac{b_m}{1 - y : a_m} + r_{2n}(y); \tag{28}$$

тогда по аналогии с формулами для эллиптических интегралов можно получить приближенные формулы для интегралов (26) и (27)

$$\Phi(x, \kappa, \alpha) = \sum_{m=0}^{n} b_m \sqrt{\frac{a_m}{a_m - \kappa^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a_m - \kappa^2}{a_m}} \cdot \operatorname{tg}\varphi\right) +$$

$$+ \rho_{2n}(y); \quad n = 1, 2, \ldots; \quad x = \sin\varphi, \tag{29}$$

$$H_1(x, h, \kappa, \alpha) = \frac{p_{2n}(-\kappa^2 : h)}{q_{2n}(-\kappa^2 : h)} \operatorname{arctg}(\sqrt{1+h} \cdot \operatorname{tg}\varphi) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n} \frac{\kappa^2 b_m}{\kappa^2 + h a_m} \sqrt{\frac{a_m}{a_m - \kappa^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a_m - \kappa^2}{a_m}} \cdot \operatorname{tg}\varphi\right) +$$

$$+ \sigma_{2n}(y); \quad n = 1, 2, \ldots; \quad h > -1, \tag{30}$$

где на основании равенства (28)

$$b_m = \frac{p_{2n}(a_m)}{-a_m \frac{d}{dy}[q_{2n}(a_m)]}, \quad |\rho_{2n}(y)| < L_{2n} \arcsin x, \tag{31}$$

$$|\sigma_{2n}(y)| < \frac{L_{2n} \operatorname{arctg}(\sqrt{1+h} \cdot \operatorname{tg}\varphi)}{\sqrt{1+h}}. \tag{32}$$

В правых частях неравенств (31) и (32), ввиду [4], множитель L_{2n} следующий:

$$L_{2n} = \frac{16(1-y)^2 y^{2n} (1-\alpha)_n |(\alpha)_n| : (4-5y)}{(4-3y)(n+1)_n (n)_n q_{2n}(y) q_{2n+2}(y)}; \quad y < 0{,}8. \tag{33}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Корнилов. Система аппроксимаций Падэ для степенных функций. Изв. ТПИ, т. 154, 1967.

2. В. Л. Данилов, А. Н. Иванова и др. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби). М., Физматгиз, 1961.

3. И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., Гостехиздат, 1948.

4. В. Е. Корнилов. Приложение цепных дробей к вычислению интегралов от биномных дифференциалов. Изв. ТПИ, т. 131, 1965.