

**ПРИМЕНЕНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ**

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В этой статье на основе цепных дробей получены приближения эллиптических интегралов в виде суммы арктангенсов и дана оценка остаточных членов.

В дальнейшем применяется сокращенная запись

$$\kappa^2 x^2 \equiv y; \quad (a)_\kappa = a(a+1) \dots (a+\kappa-1), \quad (a)_0 = 1. \quad (1)$$

1. Относительно четных подходящих дробей следующей степенной функции [1]

$$(1-y)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m \frac{(0,5-n)_m}{(1-2n)_m} (-y)^m}{\sum_{m=0}^n C_n^m \frac{(0,5-n)_m}{(1-2n)_m} (-y)^m} + r_{2n}(y) = \frac{p_{2n}(y)}{q_{2n}(y)} + r_{2n}(y);$$

$$n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

докажем теорему.

Теорема. Четная подходящая дробь (2) представляется следующей суммой элементарных дробей

$$\frac{p_{2n}(y)}{q_{2n}(y)} \equiv \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \frac{1}{1 - y \sin^2 \left(\frac{2\pi m - \pi}{4n} \right)}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Доказательство. Известно [2], что знаменатели подходящих дробей (2) имеют связь с полиномами Чебышева первого рода, а именно:

$$q_{2n}(y) = T_n(1-2:y) = \cos [n \arccos(1-2:y)]. \quad (4)$$

Согласно равенству (4) нетрудно вычислить, что

$$q_{2n}(y) = \prod_{m=1}^n \left[1 - y \sin^2 \left(\frac{2\pi m - \pi}{4n} \right) \right]; \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Для доказательства тождества (3) пусть

$$\beta_m = - \sin^2 \left(\frac{2\pi m - \pi}{4n} \right),$$

тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1:n}{1+\beta_1 y} + \frac{1:n}{1+\beta_2 y} + \dots + \frac{1:n}{1+\beta_n y} = \\ & = \frac{\sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m \frac{(0,5-n)_m}{(1-2n)_m} (-y)^m}{\sum_{m=0}^n C_n^m \frac{(0,5-n)_m}{(1-2n)_m} (-y)^m} = \frac{p_{2n}(y)}{q_{2n}(y)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Первый коэффициент числителя $p_{2n}(y)$ равен единице, а также сумма n слагаемых, каждое из которых равно $1:n$, равна единице. Ввиду равенств (5) и (6) относительно корней многочлена $q_{2n}(y)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} -C_n^1 \frac{(0,5-n)}{(1-2n)} &= \beta_1 + \dots + \beta_n; \quad C_n^m (-1)^m \frac{(0,5-n)_m}{(1-2n)_m} = \\ &= \beta_1 \dots \beta_m + \dots + \beta_{n-m+1} \dots \beta_n; \quad m = 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (7)$$

На основании равенств (7) вычислим коэффициенты при y^m числителя $p_{2n}(y)$, при этом в левой части равенства имеем $n C_{n-1}^m$ слагаемых, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} (\beta_2 \dots \beta_{m+1} + \dots + \beta_{n-m+1} \dots \beta_n) + \dots \\ & \dots + \frac{1}{n} (\beta_1 \dots \beta_m + \dots + \beta_{n-m} \dots \beta_{n-1}) = \\ & = \frac{1}{n} \cdot \frac{n C_{n-1}^m}{C_n^m} \cdot C_n^m (-1)^m \frac{(0,5-n)_m}{(1-2n)_m} = C_{n-1}^m (-1)^m \frac{(0,5-n)_m}{(1-2n)_m} \\ & \quad m = 1, \dots, n-1; \end{aligned}$$

где правая часть равенства тождественно равна коэффициенту числителя (6) при y^m , тем самым теорема полностью доказана.

Ввиду равенств (2) и (3) имеем

$$(1-y)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \frac{1}{1-y \sin^2 \left(\frac{2\pi m - \pi}{4n} \right)} + r_{2n}(y); \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

2. Эллиптический интеграл первого рода [3], стр. 82 ($x = \sin \varphi$, $\kappa^2 < 1$)

$$F(\varphi, \kappa) \equiv \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-\kappa^2 x^2}} \quad (9)$$

после замены множителя $(1-\kappa^2 x^2)^{-0,5}$ подынтегрального выражения элементарными дробями (8) и вычисления полученной суммы интегралов приближенно равен следующей сумме арктангенсов:

$$\begin{aligned} F(\varphi, \kappa) &= \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \frac{\arctg \left[\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi m - \pi}{4n} \right)} \cdot \operatorname{tg} \varphi \right]}{\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi m - \pi}{4n} \right)}} + \\ &+ p_{2n}(y); \quad \varphi = \arcsin x, \quad \kappa^2 < 1, \quad n = 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\rho_{2n}(y) = \int_0^x \frac{r_{2n}(y) dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (11)$$

Эллиптические интегралы второго рода

$$E(\varphi, \kappa) = \int_0^x \frac{\sqrt{1-\kappa^2 x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad x = \sin \varphi \quad (12)$$

и третьего рода

$$H(\varphi, h, \kappa) = \int_0^x \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}}, \quad x = \sin \varphi \quad (13)$$

по аналогии с интегралом (9) могут быть представлены следующими суммами арктангенсов:

$$E(\varphi, \kappa) = 2n\varphi - \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \frac{\operatorname{arctg}(\alpha_m \operatorname{tg} \varphi)}{\alpha_m} \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{2\pi m - \pi}{4n} \right) + R_{2n}(y), \quad n = 1, 2, \dots; \quad (14)$$

$$H(\varphi, h, \kappa) = \frac{\rho_{2n}(-\kappa^2: h) \operatorname{arctg}(\sqrt{1+h} \operatorname{tg} \varphi)}{q_{2n}(-\kappa^2: h) \sqrt{1+h}} + \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \frac{(1-\alpha_m^2) \operatorname{arctg}(\alpha_m \operatorname{tg} \varphi)}{(h+1-\alpha_m^2) \cdot \alpha_m} + \sigma_{2n}(y);$$

$$n = 1, 2, \dots; \quad h > -1, \quad (15)$$

где

$$\alpha_m^2 = 1 - \kappa^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi m - \pi}{4n} \right); \quad R_{2n}(y) = \int_0^x \frac{(1-y)r_{2n}(y) dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (16)$$

$$\sigma_{2n}(y) = \int_0^x \frac{r_{2n}(y) dx}{(1+hx^2)\sqrt{1-x^2}}. \quad (17)$$

Полные эллиптические интегралы согласно равенств (10) (14) и (15) приближенно равны следующим суммам:

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \kappa\right) = \frac{\pi}{2n} \sum_{m=1}^n \frac{1}{\alpha_m} + \rho_{2n}(\kappa^2), \quad n = 1, 2, \dots; \quad (18)$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}, \kappa\right) = \pi n - \frac{\pi}{2n} \sum_{m=1}^n \frac{1}{\alpha_m} \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{2\pi m - \pi}{4n} \right) + R_{2n}(\kappa^2),$$

$$n = 1, 2, \dots; \quad (19)$$

$$H\left(\frac{\pi}{2}, h, \kappa\right) = \frac{\pi \rho_{2n}(-\kappa^2: h)}{2q_{2n}(-\kappa^2: h) \sqrt{1+h}} + \frac{\pi}{2n} \sum_{m=1}^n \frac{(1-\alpha_m^2) \cdot \alpha_m}{h+1-\alpha_m^2} + \sigma_{2n}(\kappa^2), \quad n = 1, 2, \dots; \quad h > -1. \quad (20)$$

3. Неравенства ($q_n(y) \equiv q_n$)

$$q_{4n} > \left(1 - y + \frac{y^2}{16}\right)^n, \quad q_{4n+2} \geq \left(1 - \frac{y}{2}\right) \left(1 - y + \frac{y^2}{16}\right)^n, \quad y \leq 1 \quad (21)$$

справедливы ввиду равенств (2) и (5), а именно:

$$\begin{aligned} q_{4n}(y) &= \prod_{m=1}^n \left[1 - y + \frac{y^2}{4} \sin^2\left(\frac{2\pi m - \pi}{4n}\right)\right] = 1 - ny + \dots + \frac{y^{2n}}{2^{4n-1}} > \\ &> (1 - y + y^2 : 16)^n, \quad y \leq 1. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается второе неравенство (21).

На основании неравенств (21), равенства (2) и бесконечного ряда для остаточного члена $r_{2n}(y)$ [4], стр. 21, (1) нетрудно получить оценки остаточных членов (11), (16) и (17). Остаточные члены по абсолютной величине будут меньше следующих выражений ($n = 1, 2, \dots; y < 1, x = \sin \varphi$):

$$|\rho_{2n}(y)| < \frac{y^{2n} \operatorname{arctg}(\sqrt{1 - \kappa^2} \cdot \operatorname{tg} \varphi)}{2^{4n-1} (1 - y : 2) (1 - y + y^2 : 16)^{n-1} \sqrt{1 - \kappa^2}}; \quad (22)$$

$$|R_{2n}(y)| < \frac{y^{2n} \operatorname{arcsin} x}{2^{4n-1} (1 - y : 2) (1 - y + y^2 : 16)^{n-1}}; \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{:n}(y) < \frac{y^{2n} 2^{1-4n}}{(1 - y : 2) (1 - y + y^2 : 16)^{n-1}} \left[\frac{h \operatorname{arctg}(\sqrt{1 + h} \cdot \operatorname{tg} \varphi)}{(h + \kappa^2) \sqrt{1 + h}} + \right. \\ \left. + \frac{\kappa^2 \operatorname{arctg}(\sqrt{1 - \kappa^2} \cdot \operatorname{tg} \varphi)}{(h + \kappa^2) \sqrt{1 - \kappa^2}} \right], \quad h \neq -\kappa^2, \quad h > -1. \quad (24) \end{aligned}$$

Для $n = 1 - 6, 8$ многочлены $q_{2n}(y) \equiv q_{2n}$ нетрудно представить в виде произведения квадратных трехчленов, а именно:

$$\left\{ \begin{aligned} q_2 &= 1 - \frac{y}{2}; \quad q_4 = 1 - y + \frac{y^2}{8}; \quad q_6 = \left(1 - \frac{y}{2}\right) \left(1 - y + \frac{y^2}{16}\right); \\ q_8 &= \left(1 - y + \frac{y^2}{16 - 8\sqrt{2}}\right) \left(1 - y + \frac{y^2}{16 + 8\sqrt{2}}\right); \\ q_{10} &= (1 - y : 2) \left(1 - y + \frac{y^2}{24 - 8\sqrt{5}}\right) \left(1 - y + \frac{y^2}{24 + 8\sqrt{5}}\right); \quad (25) \\ q_{12} &= \left(1 - y + \frac{y^2}{8}\right) \left(1 - y + \frac{y^2}{32 - 16\sqrt{3}}\right) \left(1 - y + \frac{y^2}{32 + 16\sqrt{3}}\right); \\ q_{16} &= \left[\left(1 - y + \frac{y^2}{8}\right)^2 - \frac{2 - \sqrt{2}}{256} y^4\right] \left[\left(1 - y + \frac{y^2}{8}\right)^2 - \frac{2 + \sqrt{2}}{256} y^4\right]. \end{aligned} \right.$$

Согласно равенств (25) корни отдельных многочленов можно представить в виде радикалов.

4. Пусть даны интегралы вида

$$\Phi(x, \kappa, \alpha) = \int_0^x \frac{(1 - \kappa^2 x^2)^\alpha}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \quad -\frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{1}{2}; \quad (26)$$

$$H_1(x, h, \kappa, \alpha) = \int_0^x \frac{(1 - y)^\alpha dx}{(1 + hx^2) \sqrt{1 - x^2}}, \quad h > -1,$$

$$0 < x \leq 1, \quad \kappa^2 < 1, \quad -\frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{1}{2}, \quad (27)$$

и, ввиду [1], функция

$$(1-y)^{\alpha} = \frac{\sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m \frac{(-\alpha-n)_m}{(1-2n)_m} (-y)^m}{\sum_{m=0}^n C_n^m \frac{(\alpha-n+1)_m}{(1-2n)_m} (-y)^m} + r_{2n}(y) = \frac{p_{2n}(y)}{q_{2n}(y)} + r_{2n}(y) = \sum_{m=1}^n \frac{b_m}{1-y:a_m} + r_{2n}(y); \quad (28)$$

тогда по аналогии с формулами для эллиптических интегралов можно получить приближенные формулы для интегралов (26) и (27)

$$\Phi(x, \kappa, \alpha) = \sum_{m=0}^n b_m \sqrt{\frac{a_m}{a_m - \kappa^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a_m - \kappa^2}{a_m}} \cdot \operatorname{tg} \varphi \right) + \rho_{2n}(y); \quad n = 1, 2, \dots; \quad x = \sin \varphi, \quad (29)$$

$$H_1(x, h, \kappa, \alpha) = \frac{p_{2n}(-\kappa^2:h)}{q_{2n}(-\kappa^2:h)} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{1+h} \cdot \operatorname{tg} \varphi \right) + \sum_{m=1}^n \frac{\kappa^2 b_m}{\kappa^2 + h a_m} \sqrt{\frac{a_m}{a_m - \kappa^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a_m - \kappa^2}{a_m}} \cdot \operatorname{tg} \varphi \right) + \sigma_{2n}(y); \quad n = 1, 2, \dots; \quad h > -1, \quad (30)$$

где на основании равенства (28)

$$b_m = \frac{p_{2n}(a_m)}{-a_m \frac{d}{dy} [q_{2n}(a_m)]}, \quad |\rho_{2n}(y)| < L_{2n} \arcsin x, \quad (31)$$

$$|\sigma_{2n}(y)| < \frac{L_{2n} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{1+h} \cdot \operatorname{tg} \varphi \right)}{\sqrt{1+h}}. \quad (32)$$

В правых частях неравенств (31) и (32), ввиду [4], множитель L_{2n} следующий:

$$L_{2n} = \frac{16(1-y)^2 y^{2n} (1-\alpha)_n |(\alpha)_n| : (4-5y)}{(4-3y)(n+1)_n (n)_n q_{2n}(y) q_{2n+2}(y)}; \quad y < 0,8. \quad (33)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Корнилов. Система аппроксимаций Падэ для степенных функций. Изв. ТПИ, т. 154, 1967.
2. В. Л. Данилов, А. Н. Иванова и др. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби). М., Физматгиз, 1961.
3. И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
4. В. Е. Корнилов. Приложение цепных дробей к вычислению интегралов от биномиальных дифференциалов. Изв. ТПИ, т. 131, 1965.