

ПРИЛОЖЕНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ГАММА-ФУНКЦИИ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

Наряду с существующими дробно-рациональными приближениями для гамма-функций [1], стр. 171—174, в настоящей статье изучен новый вид приближений этой функции.

В статье введена сокращенная запись

$$\left(\frac{x}{e}\right)^x \equiv z; \quad (a)_\kappa = a(a+1) \dots (a+\kappa-1), \quad (a)_0 = 1.$$

1. Гамма-функция обычно представляется в виде следующего интеграла:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0. \quad (1)$$

Или

$$\Gamma(x) = \int_y^\infty e^{-t} t^{x-1} dt + \int_0^y e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (2)$$

Интегралы, расположенные в правой части равенства 2, разлагаются в следующие цепные дроби [1], стр. 140, 145:

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \frac{y^x e^{-y}}{y + \frac{1-x}{1 + \dots + \frac{n}{y + \frac{n+1-x}{1 + \dots}}}} \quad (3)$$

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \frac{y^x e^{-y}}{x - \frac{yx}{1+x + \dots + \frac{ny}{2n+x - \frac{(n+x)y}{2n+1+x + \dots}}}} \quad (4)$$

Гамма-функцию можно приближенно заменить суммой подходящих дробей, которые вычисляются согласно равенств (3) и (4). Подходя-

щие дроби цепных дробей (3) и (4) принимают наиболее простой вид в том случае, когда переменный предел интегралов (3) и (4) $y = x$, так как:

а) подходящие дроби цепной дроби (3) при этом таковы, что наибольшие показатели степени x в два раза меньше, чем в случае $y \neq x$;

б) подходящие дроби цепной дроби (4) содержат более простые знаменатели, хотя числители получаются более высоких степеней, чем в случае $y \neq x$.

В равенствах (3) и (4) задаем $y = x$ и вычисляем последовательно подходящие дроби, которые ниже вычислены с 1-й до 20-й подходящей дроби для интегралов вида (3) и с 1-й до 12-й подходящей дроби для интегралов вида (4):

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_x^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \approx 1) \frac{z}{x}; \quad 2) z; \quad 3) z \frac{x+1}{x}; \quad 4) \frac{3z}{x+2}; \\ 5) z \frac{5x+2}{x(x+6)}; \quad 6) z \frac{2x+11}{7x+6}; \quad 7) z \frac{x^2+13x+3}{x(5x+12)}; \\ 8) z \frac{23x+50}{3x^2+46x+24}; \quad 9) z \frac{31x^2+154x+24}{x(3x^2+86x+120)}; \\ 10) z \frac{8x^2+219x+274}{55x^2+326x+120}; \quad 11) z \frac{4x^3+187x^2+522x+60}{x(35x^2+378x+360)}; \\ 12) \frac{z(203x^2+2084x+1764)}{15x^3+760x^2+2556x+720}; \\ 13) \frac{z(251x^3+4328x^2+8028x+720)}{x(15x^3+1180x^2+7092x+5040)}; \\ 14) z \frac{48x^3+3665x^2+20852x+13068}{525x^3+9856x^2+22212x+5040}; \\ 15) z \frac{24x^4+2711x^3+25574x^2+34632x+2520}{x(315x^3+9058x^2+35928x+20160)}; \\ 16) \frac{z(2141x^3+59616x^2+223012x+109584)}{(105x^4+12460x^3+128492x^2+212976x+40320)}; \\ 17) z \frac{505x^4+20598,4x^3+126439,2x^2+132739,2x+8064}{x(21x^4+3500x^3+54684x^2+157564,8x+72576)}; \\ 18) \frac{z(384x^4+62645x^3+945728x^2+2561220x+1026576)}{5985x^4+257068x^3+1731276x^2+2239344x+362880}; \\ 19) \frac{192x^5+42685x^4+936328x^3+4125492x^2+3499920x+181440}{z^{-1}(3465x^5+207284x^4+2096028x^3+4664880x^2+1814400x)}; \\ 20) \frac{z(5313x^4+310675,6x^3+3029408,8x^2+6317092,8x+2125728)}{189x^5+43470x^4+1006292x^3+4880635,2x^2+5131872x+725760}; \end{array} \right. \quad (5)$$

(подходящие дроби 7), 11), 15), 19) сокращены на 2, дроби 17) и 20) сокращены на 5).

$$\begin{aligned}
& \int_0^x e^{-t} t^{x-1} dt \approx 1) \frac{z}{x}; \quad 2) z \frac{x+1}{x}; \quad 3) z \frac{x^2+4x+2}{2x(x+1)}; \\
& 4) z \frac{(x+2)(5x+3)}{(x)_2(x+6)}; \quad 5) z \frac{7x^3+41x^2+62x+24}{(x)_3(x+12)}; \\
& 6) z \frac{2x^3+47x^2+92x+40}{(x+3)^{-1}(x)_3(11x+60)}; \\
& 7) \frac{x^5+43x^4+338x^3+959x^2+1062x+360}{z^{-1}(x)_4(7x+60)}; \\
& 8) \frac{41x^4+720x^3+2743x^2+3492x+1260}{z^{-1}(x+4)^{-1}(x)_4(3x^2+158x+840)}; \quad (6) \\
& 9) \frac{49x^6+1556x^5+15399x^4+67120x^3+139436x^2+129744x+40320}{z^{-1}(x)_5(3x^2+226x+1680)}; \\
& 10) \frac{8x^6+909x^5+15699x^4+90260x^3+219132x^2+223056x+72576}{z^{-1}(x+5)^{-1}(x)_5(95x^2+2874x+15120)}; \\
& 11) \frac{\frac{x^8}{3780} + \frac{91x^7}{2160} + \frac{18757x^6}{15120} + \frac{44819x^5}{3024} + \frac{134679,1}{1512x^{-4}} +}{z^{-1}15120^{-1}(x)_6(55x^2 +} \\
& \quad + \frac{109002,7}{378x^{-3}} + \frac{29809}{60x^{-2}} + \frac{8641}{21x^{-1}} + 120 \\
& \quad + 2202x + 15120) ; \\
& 12) \frac{\frac{37,3x^7}{33264} + \frac{24301x^6}{332640} + \frac{445063x^5}{332640} + \frac{343908,7}{33264x^{-4}} +}{z^{-1}(x+6)^{-1}332640^{-1}(x)_6(15x^3 +} \\
& \quad + \frac{93173}{2376x^{-3}} + \frac{622483,9}{8316x^{-2}} + \frac{91691}{1386x^{-1}} + 20 \\
& \quad + 2740x^2 + 63564x + 332640) ;
\end{aligned}$$

(подходящие дроби 7) и 11) сокращены на 2).

Гамма-функция согласно равенству (2) заменяется приближенно суммой дробно-рациональных приближений (5) и (6). Наиболее выгодный выбор приближений состоит в том, чтобы погрешности этих приближений были примерно одинаковы.

2. Учитывая то обстоятельство, что для вещественных $x > 0$ остаточные члены $zR_m(x)$ и $zr_n(x)$ для подходящих дробей (5) и (6), соответственно, могут быть представлены в виде бесконечных функциональных рядов типа Лейбница, а именно ([1], стр. 11, 12):

$$R_m(x) = \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n \frac{(1-x)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{Q_n(x) Q_{n+1}(x)}, \quad (7)$$

$$r_{\kappa}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{\kappa}{2}\right]+n} \frac{x^{\kappa+2n}(x)^{\left[\frac{\kappa+1}{2}\right]+n} (1)^{\left[\frac{\kappa}{2}\right]+n}}{(\kappa+1+2n+x)^{-1} q_{\kappa+2n}(x) q_{\kappa+2+2n}(x)}, \quad (8)$$

где $[\nu]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее ν , нетрудно сделать вывод, что остаточные члены по абсолютной величине меньше первых слагаемых правых частей равенств (7) и (8). То есть

$$|R_m(x)| < \frac{\left| (1-x)^{\left[\frac{m+1}{2}\right]} (1)^{\left[\frac{m}{2}\right]} \right|}{Q_m(x) Q_{m+1}(x)}, \quad \left[\frac{m+1}{2} \right] > x > 0. \quad (9)$$

$$|r_{\kappa}(x)| < \frac{(\kappa+1+x) x^{\kappa}(x)^{\left[\frac{\kappa+1}{2}\right]} (1)^{\left[\frac{\kappa}{2}\right]}}{q_{\kappa}(x) q_{\kappa+2}(x)}, \quad x > 0. \quad (10)$$

Исходя из вышеизложенного, гамма-функция представляется следующим равенством:

$$\Gamma(x) = z \left[\frac{P_m(x)}{Q_m(x)} + \frac{p_{\kappa}(x)}{q_{\kappa}(x)} + R_m(x) + r_{\kappa}(x) \right], \quad (11)$$

где слагаемые в квадратных скобках определяются, соответственно, согласно равенств (5), (6) и неравенств (9) и (10).

Определим оценку остаточного члена гамма-функции, если для ее вычисления применить 19-ю подходящую дробь из равенств (5) и 11-ю подходящую дробь из равенств (6) на отрезке $2 \leq x \leq 3$, на концах отрезка $R_{19}(2) = R_{19}(3) = 0$. Остаточный член гамма-функции обозначим через $\rho_{15}(x)$:

$$|\rho_{15}(x)| \leq z (|R_{19}(x)| + |r_{11}(x)|). \quad (12)$$

После вычисления $|\rho_{15}(x)|$ с интервалом 0,1 имеем

$$\begin{aligned} |\rho_{15}(2)| &< 0,00000000133 = 0,0^8 133, \\ |\rho_{15}(2,1)| &< 0,0^7 364, & |\rho_{15}(2,6)| &< 0,0^7 425, \\ |\rho_{15}(2,2)| &< 0,0^7 516, & |\rho_{15}(2,7)| &< 0,0^7 393, \\ |\rho_{15}(2,3)| &< 0,0^7 553, & |\rho_{15}(2,8)| &< 0,0^7 392, \\ |\rho_{15}(2,4)| &< 0,0^7 529, & |\rho_{15}(2,9)| &< 0,0^7 412, \\ |\rho_{15}(2,5)| &< 0,0^7 475, & |\rho_{15}(3)| &< 0,0^7 530. \end{aligned} \quad (13)$$

Применяя формулу (11), вычислим гамма-функцию при $x=2,5$:

$$\begin{aligned} \Gamma(2,5) &\approx \sqrt{\frac{2,5^3}{e^5}} \left(\frac{163301833}{95843005} + \frac{43399497}{18135117} \right) = \\ &= 0,32446944673 \cdot 4,0969663890 = 1,3293404175. \end{aligned}$$

Имея в виду, что

$$\Gamma(2,5) = 0,75 \sqrt{\pi} = 1,3293403882,$$

получим $|\rho_{15}(2,5)| < 0,0^7 293$.

Вывод

Применяя 19-е дробно-рациональное приближение интеграла (3) и 11-е приближение интеграла (4) на отрезке $[2, 3]$, можно вычислить гамма-функцию с относительной погрешностью $\delta_x < 0,0^7 6$ ([2], стр. 115).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., Гостехиздат, 1956.
2. И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. Справочник по математике. М., ГИТТЛ, 1956.