ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 226 1976

ПРИЛОЖЕНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ГАММА-ФУНКЦИИ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

Наряду с существующими дробно-рациональными приближениями для гамма-функций [1], стр. 171—174, в настоящей статье изучен новый вид приближений этой функции.

В статье введена сокращенная запись

$$\left(\frac{x}{e}\right)^x \equiv z; \quad (a)_\kappa = a(a+1)\ldots(a+\kappa-1), \quad (a)_0 = 1.$$

1. Гамма-функция обычно представляется в виде следующего интеграла:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0. \tag{1}$$

Или

$$\Gamma(x) = \int_y^\infty e^{-t} t^{x-1} dt + \int_0^y e^{-t} t^{x-1} dt. \tag{2}$$

Интегралы, расположенные в правой части равенства 2, разлагаются в следующие цепные дроби [1], стр. 140, 145:

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \cfrac{y^x e^{-y}}{y + \cfrac{1-x}{1 + \cdots + \cfrac{n}{y + \cfrac{n+1-x}{1+\cdots}}}}; \tag{3}$$

$$\int_0 e^{-t} t^{x-1} dt = \cfrac{y^x e^{-y}}{x - \cfrac{yx}{1 + x + \cdots + \cfrac{ny}{2n + x - \cfrac{(n+x)y}{2n+1+x+\cdots}}}} \tag{4}$$

Гамма-функцию можно приближенно заменить суммой подходящих дробей, которые вычисляются согласно равенств (3) и (4). Подходящие дроби цепных дробей (3) и (4) принимают наиболее простой вид в том случае, когда переменный предел интегралов (3) и (4) $y=x$, так как:

а) подходящие дроби цепной дроби (3) при этом таковы, что наибольшие показатели степени x в два раза меньше, чем в случае $y \neq x$;

б) подходящие дроби цепной дроби (4) содержат более простые знаменатели, хотя числители получаются более высоких степеней, чем в случае $y \neq x$.

В равенствах (3) и (4) задаем $y=x$ и вычисляем последовательно подходящие дроби, которые ниже вычислены с 1-й до 20-й подходящей дроби для интегралов вида (3) и с 1-й до 12-й подходящей дроби для интегралов вида (4):

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\displaystyle\int_x^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \approx 1)\ \frac{z}{x};\quad 2)\ z;\quad 3)\ z\,\frac{x+1}{x};\quad 4)\ \frac{3z}{x+2};\\[2ex]
5)\ z\,\dfrac{5x+2}{x(x+6)};\quad 6)\ z\,\dfrac{2x+11}{7x+6};\quad 7)\ z\,\dfrac{x^2+13x+3}{x(5x+12)};\\[2ex]
8)\ z\,\dfrac{23x+50}{3x^2+46x+24};\quad 9)\ z\,\dfrac{31x^2+154x+24}{x(3x^2+86x+120)};\\[2ex]
10)\ z\,\dfrac{8x^2+219x+274}{55x^2+326x+120};\quad 11)\ z\,\dfrac{4x^3+187x^2+522x+60}{x(35x^2+378x+360)};\\[2ex]
12)\ \dfrac{z(203x^2+2084x+1764)}{15x^3+760x^2+2556x+720};\\[2ex]
13)\ \dfrac{z(251x^3+4328x^2+8028x+720)}{x(15x^3+1180x^2+7092x+5040)};\\[2ex]
14)\ z\,\dfrac{48x^3+3665x^2+20852x+13068}{525x^3+9856x^2+22212x+5040};\\[2ex]
15)\ z\,\dfrac{24x^4+2711x^3+25574x^2+34632x+2520}{x(315x^3+9058x^2+35928x+20160)};\\[2ex]
16)\ \dfrac{z(2141x^3+59616x^2+223012x+109584)}{(105x^4+12460x^3+128492x^2+212976x+40320};\\[2ex]
17)\ z\,\dfrac{505x^4+20598{,}4x^3+126439{,}2x^2+132739{,}2x+8064}{x(21x^4+3500x^3+54684x^2+157564{,}8x+72576)};\\[2ex]
18)\ \dfrac{z(384x^4+62645x^3+945728x^2+2561220x+1026576)}{5985x^4+257068x^3+1731276x^2+2239344x+362880};\\[2ex]
19)\ \dfrac{192x^5+42685x^4+936328x^3+4125492x^2+3499920x+181440}{z^{-1}(3465x^5+207284x^4+2096028x^3+4664880x^2+1814400x)};\\[2ex]
20)\ \dfrac{z(5313x^4+310675{,}6x^3+3029408{,}8x^2+6317092{,}8x+2125728)}{189x^5+43470x^4+1006292x^3+4880635{,}2x^2+5131872x+725760};
\end{array}
\right. \tag{5}
$$

(подходящие дроби 7), 11), 15), 19) сокращены на 2, дроби 17) и 20) сокращены на 5).

$$
\int\limits_0^x e^{-t}\,t^{x-1}\,dt \approx \quad 1)\ \frac{z}{x};\quad 2)\ z\,\frac{x+1}{x};\quad 3)\ z\,\frac{x^2+4x+2}{2x\,(x+1)};
$$

$$
4)\ z\,\frac{(x+2)\,(5x+3)}{(x)_2\,(x+6)};\quad 5)\ z\,\frac{7x^3+41x^2+62x+24}{(x)_3\,(x+12)};
$$

$$
6)\ z\,\frac{2x^3+47x^2+92x+40}{(x+3)^{-1}\,(x)_3\,(11x+60)};
$$

$$
7)\ \frac{x^5+43x^4+338x^3+959x^2\,1062x+360}{z^{-1}\,(x)_4\,(7x+60)};
$$

$$
8)\ \frac{41x^4+720x^3+2743x^2+3492x+1260}{z^{-1}\,(x+4)^{-1}\,(x)_4\,(3x^2+158x+840)}; \tag{6}
$$

$$
9)\ \frac{49x^6+1556x^5+15399x^4+67120x^3+139436x^2+129744x+40320}{z^{-1}\,(x)_5\,(3x^2+226x+1680)};
$$

$$
10)\ \frac{8x^6+909x^5+15699x^4+90260x^3+219132x^2+223056x+72576}{z^{-1}\,(x+5)^{-1}\,(x)_5\,(95x^2+2874x+15120)};
$$

$$
11)\ \frac{\dfrac{x^8}{3780}+\dfrac{91x^7}{2160}+\dfrac{18757x^6}{15120}+\dfrac{44819x^5}{3024}+\dfrac{134679{,}1}{1512x^{-4}}+\dfrac{109002{,}7}{378x^{-3}}+\dfrac{29809}{60x^{-2}}+\dfrac{8641}{21x^{-1}}+120}{z^{-1}\,15120^{-1}\,(x)_6\,(55x^2+2202x+15120)};
$$

$$
12)\ \frac{\dfrac{37{,}3x^7}{33264}+\dfrac{24301x^6}{332640}+\dfrac{445063x^5}{332640}+\dfrac{343908{,}7}{33264x^{-4}}+\dfrac{93173}{2376x^{-3}}+\dfrac{622483{,}9}{8316x^{-2}}+\dfrac{91691}{1386x^{-1}}+20}{z^{-1}\,(x+6)^{-1}\,332640^{-1}\,(x)_6\,(15x^3+2740x^2+63564x+332640)};
$$

(подходящие дроби 7) и 11) сокращены на 2).

Гамма-функция согласно равенству (2) заменяется приближенно суммой дробно-рациональных приближений (5) и (6). Наиболее выгодный выбор приближений состоит в том, чтобы погрешности этих приближений были примерно одинаковы.

2. Учитывая то обстоятельство, что для вещественных $x>0$ остаточные члены $zR_m(x)$ и $zr_\kappa(x)$ для подходящих дробей (5) и (6), соответственно, могут быть представлены в виде бесконечных функциональных рядов типа Лейбница, а именно ([1], стр. 11, 12):

$$
R_m(x)=\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(1-x)_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\,(1)_{\left[\frac{n}{2}\right]}}{Q_n(x)\,Q_{n+1}(x)}, \tag{7}
$$

$$
r_{\kappa}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{\kappa}{2}\right]+n} \frac{x^{\kappa+2n}(x)_{\left[\frac{\kappa+1}{2}\right]+n} (1)_{\left[\frac{\kappa}{2}\right]+n}}{(\kappa+1+2n+x)^{-1} q_{\kappa+2n}(x)\, q_{\kappa+2+2n}(x)}, \tag{8}
$$

где $[\nu]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее ν, нетрудно сделать вывод, что остаточные члены по абсолютной величине меньше первых слагаемых правых частей равенств (7) и (8). То есть

$$
|R_m(x)| < \frac{\left|(1-x)_{\left[\frac{m+1}{2}\right]}\right| (1)_{\left[\frac{m}{2}\right]}}{Q_m(x)\, Q_{m+1}(x)}, \quad \left[\frac{m+1}{2}\right] > x > 0. \tag{9}
$$

$$
|r_{\kappa}(x)| < \frac{(\kappa+1+x)\, x^{\kappa}(x)_{\left[\frac{\kappa+1}{2}\right]} (1)_{\left[\frac{\kappa}{2}\right]}}{q_{\kappa}(x)\, q_{\kappa+2}(x)}, \quad x > 0. \tag{10}
$$

Исходя из вышеизложенного, гамма-функция представляется следующим равенством:

$$
\Gamma(x) = z\left[\frac{P_m(x)}{Q_m(x)} + \frac{p_{\kappa}(x)}{q_{\kappa}(x)} + R_m(x) + r_{\kappa}(x)\right], \tag{11}
$$

где слагаемые в квадратных скобках определяются, соответственно, согласно равенств (5), (6) и неравенств (9) и (10).

Определим оценку остаточного члена гамма-функции, если для ее вычисления применить 19-ю подходящую дробь из равенств (5) и 11-ю подходящую дробь из равенств (6) на отрезке $2 \leqslant x \leqslant 3$, на концах отрезка $R_{19}(2) = R_{19}(3) = 0$. Остаточный член гамма-функции обозначим через $\rho_{15}(x)$:

$$
|\rho_{15}(x)| \leqslant z(|R_{19}(x)| + |r_{11}(x)|). \tag{12}
$$

После вычисления $|\rho_{15}(x)|$ с интервалом 0,1 имеем

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{c}{|\rho_{15}(2)| < 0{,}00000000133 = 0{,}0^8133,} \\
|\rho_{15}(2{,}1)| < 0{,}0^7364, & |\rho_{15}(2{,}6)| < 0{,}0^7425, \\
|\rho_{15}(2{,}2)| < 0{,}0^7516, & |\rho_{15}(2{,}7)| < 0{,}0^7393, \\
|\rho_{15}(2{,}3)| < 0{,}0^7553, & |\rho_{15}(2{,}8)| < 0{,}0^7392, \\
|\rho_{15}(2{,}4)| < 0{,}0^7529, & |\rho_{15}(2{,}9)| < 0{,}0^7412, \\
|\rho_{15}(2{,}5)| < 0{,}0^7475, & |\rho_{15}(3)| < 0{,}0^7530.
\end{array} \tag{13}
$$

Применяя формулу (11), вычислим гамма-функцию при $x = 2{,}5$:

$$
\Gamma(2{,}5) \approx \sqrt{\frac{2{,}5^3}{e^5}} \left(\frac{163301833}{95843005} + \frac{43399497}{18135117}\right) =
$$

$$
= 0{,}32446944673 \cdot 4{,}0969663890 = 1{,}3293404175.
$$

Имея в виду, что

$$
\Gamma(2{,}5) = 0{,}75\sqrt{\pi} = 1{,}3293403882,
$$

получим $|\rho_{15}(2.5)| < 0{,}0^7293$.

Вывод

Применяя 19-е дробно-рациональное приближение интеграла (3) и 11-е приближение интеграла (4) на отрезке [2, 3], можно вычислить гамма-функцию с относительной погрешностью $\delta_x < 0{,}0^76$ ([2], стр. 115).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., Гостехиздат, 1956.
2. И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. Справочник по математике. М., ГИТТЛ, 1956.