ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 226 1976

ПРИЛОЖЕНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ БЕТА-ФУНКЦИИ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В статье рассматривается вопрос о приближенном представлении бета-функции суммой двух подходящих дробей известной цепной дроби [1].

1. Известно, что функция

$$F(\alpha,\ 1;\ \gamma;\ -z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_\kappa}{(\gamma)_\kappa}(-z)^\kappa,\ |z|<1,\ \gamma \neq 0,\ -1,\ \ldots; \tag{1}$$

где

$$(a)_\kappa = a(a+1)\ldots\ (a+\kappa-1),\ (a)_0 = 1 \tag{2}$$

выражается посредством интеграла [2], стр. 308,

$$F(\alpha,\ 1;\ \gamma;\ -z) = \frac{(\gamma-1)\,z^{1-\gamma}}{(1+z)^{\alpha-\gamma+1}} \int\limits_0^z \frac{t^{\gamma-2}\,dt}{(1+t)^{\gamma-\alpha}},\quad \gamma > 1, \tag{3}$$

представляется в виде цепной дроби [1], стр. 320.

$$F(\alpha,\ 1;\ \gamma;\ -z) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{\alpha z}{\gamma + \cdots + \cfrac{\kappa(\gamma-\alpha+\kappa-1)\,z}{\gamma + 2\kappa - 1 + \cfrac{(\gamma+\kappa-1)(\alpha+\kappa)\,z}{\gamma + 2\kappa + \cdots}}}} \tag{4}$$

Бета-функция может быть выражена посредством гамма-функции [3], стр. 28,

$$\mathrm{B}(x, y) = \Gamma(x)\,\Gamma(y) : \Gamma(x+y) \tag{5}$$

и представляется функциональным рядом [2], стр. 291,

$$\mathrm{B}(x,\ y) = \frac{1}{x} F(1-y,\ x;\ x+1;\ 1) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(1-y)_\kappa}{\kappa!\,(x+\kappa)}. \tag{6}$$

Ряд (6) для вычисления бета-функции мало пригоден ввиду его медленной сходимости.

Для вычисления бета-функции представим ее в виде суммы двух рядов [4], стр. 112:

$$\mathrm{B}(x, y) = 2^{1-x-y}\left[\frac{1}{x} F(1-y, 1;\ x+1;\ -1) + \frac{1}{y} F(1-x;\ 1;\ y+1;\ -1)\right]. \tag{7}$$

Каждый из рядов правой части равенства (7) представляется цепной дробью (4). Вычислим несколько подходящих дробей цепной дроби (4):

$$\begin{cases} 3)\ \dfrac{(\gamma)_2 + (\gamma - \alpha) z}{(\gamma)_2 + \gamma(\alpha + 1) z}; \quad 4)\ \dfrac{(\gamma)_3 + (\gamma + 1)[(\alpha + 2)(\gamma - 2) + 4] z}{(\gamma)_3 + 2(\gamma)_2(\alpha + 1) z + \gamma(\alpha)_2 z^2}; \\ 5)\ \dfrac{(\gamma)_4 + (\gamma + 1)_2[(\alpha + 4)(\gamma - 3) + 12] z + 2(\gamma - \alpha)_2 z^2}{(\gamma)_4 + 2(\gamma)_3(\alpha + 2) z + (\gamma)_2(\alpha + 1)_2 z^2}; \\ 6)\ \dfrac{(\gamma)_5 + 2(\gamma + 1)_3[(\alpha + 3)(\gamma - 2) + 6] z + [3(\alpha + 2)(\gamma + 1)_2(\gamma - 3\alpha) + (\alpha)_2(\gamma + 2)_3] z^2}{(\gamma)_5 + 3(\gamma)_4(\alpha + 2) z + 3(\gamma)_3(\alpha + 1)_2 z^2 + (\gamma)_2(\alpha)_3 z^3}; \end{cases} \tag{8}$$

Суммируя последовательно подходящие дроби (3) — (6), согласно равенств (7) и (8), мы получим следующие дробно-рациональные приближения бета-функции:

$$\begin{cases} \mathrm{B}(x, y) = 3)\ \dfrac{(x + y)(x + y + 2)(x^2 + y^2 + 5x + 5y + 4)}{2^{x+y-1}(x)_2(y)_2(x - y + 4)(y - x + 4)} + r_3(x, y); \\ 4)\ \dfrac{2^{2-x-y}(x + y)_2(x + y + 4)(x^2 + y^2 + 9x + 9y + 16)}{(x)_2(y)_2[(x - y)^2 + 9x - 7y + 16][(x - y)^2 + 9y - 7x + 16]} + r_4(x, y); \\ 5)\ \dfrac{(z)_2(z + 4)\{[(z^2 + 9z + 18)^2 - 4z^2] - xy(4z^2 + 35z + 57) + 3x^2y^2\}}{2^{z-2}(x)_3(y)_3[(x - y)^2 + 13x - 11y + 36][(x - y)^2 + 13y - 11x + 36]} + r_5(x, y); \\ 6)\ \dfrac{3\cdot 2^{2-z}(z)_3(z + 6)\{[(z^2 + 13z + 38)^2 - 4z^2] - xy(4z^2 + 51z + 137) + 3x^2y^2\}}{(x)_3(y)_3[36 - (x - y)^2][(x - y)^2 + 15x - 9y + 38][(x - y)^2 + 15y - 9x + 38]} + r_6(x, y);\ \text{где } z = x + y. \end{cases} \tag{9}$$

В случае $x = y$ оба слагаемые равенства (7) подобны, и приближения бета-функции будут проще:

$$\begin{cases} \mathrm{B}(x, x) = 6)\ \dfrac{(x + 3)(2x + 1)(x^2 + 27x + 38)}{3\cdot 2^{2x-1}(x)_3(3x + 19)} + r_6(x, x); \\ 7)\ \dfrac{(2x + 1)[(x + 3)_2(x^2 + 47x + 66) + 12x(x + 1)]}{3\cdot 2^{2x\mp 1}(x)_4(x + 11)} + r_7(x, x). \end{cases} \tag{10}$$

Наряду с приближениями бета-функции, согласно формул (9), можно дать общий вид суммы подходящих дробей для бета-функции [5], стр. 23:

$$\begin{cases} 2\kappa)\,\mathrm{B}(x,\,y) = \dfrac{\sum\limits_{n=1}^{\kappa}\left[\sum\limits_{m=0}^{\kappa-n} C_\kappa^{m+n}(-1)^m \dfrac{(x+\kappa)_{n+m}}{(1-y+m)_n\,(x)_{m+1}}\right]}{2^{x+y-1}\sum\limits_{n=0}^{\kappa} C_\kappa^n\,[(x+\kappa)_n : (1-y)_n]} + \\ + \dfrac{\sum\limits_{n=1}^{\kappa}\left[\sum\limits_{m=0}^{\kappa-n} C_\kappa^{n+m}(-1)^m \dfrac{(y+\kappa)_{n+m}}{(1-x+m)_n\,(y)_{m+1}}\right]}{2^{x+y-1}\sum\limits_{n=0}^{\kappa} C_\kappa^n \dfrac{(y+\kappa)_n}{(1-x)_n}} + r_{2\kappa}(x,\,y); \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} 2\kappa+1)\,\mathrm{B}(x,\,y) = \dfrac{\sum\limits_{n=0}^{\kappa}\left[\sum\limits_{m=0}^{\kappa-n} C_\kappa^{n+m}(-1)^m \dfrac{(x+\kappa+1)_{n+m}(1-y)}{(1-y+m)_{n+1}(x)_{m+1}}\right]}{2^{x+y-1}\sum\limits_{m=0}^{\kappa} C_\kappa^n\,[(x+\kappa+1)_n : (2-y)_n]} + \\ + \dfrac{\sum\limits_{n=0}^{\kappa}\left[\sum\limits_{m=0}^{\kappa-n} C_\kappa^{n+m}(-1)^m \dfrac{(y+\kappa+1)_{n+m}(1-x)}{(1-x+m)_{n+1}(y)_{m+1}}\right]}{2^{x+y-1}\sum\limits_{n=0}^{\kappa} C_\kappa^n\,[(y+\kappa+1)_n : (2-x)_n]} + r_{2\kappa+1}(x,\,y). \end{cases} \tag{12}$$

2. Остаточный член $r_n(x,y)$ в правой части равенств (11) и (12) может быть представлен в виде суммы двух бесконечных функциональных рядов типа Лейбница [6], стр. 12, поэтому $|r_n(x,y)|$ меньше суммы абсолютных величин двух слагаемых (по одному первому слагаемому из каждого функционального ряда):

$$\begin{cases} |r_{2\kappa}(x,\,y)| < \kappa!\,(x+y)_\kappa\, 2^{1-x-y} \times \\ \times \left\{1 : \left[(x)_{\kappa+1}\left|(2-y)_\kappa \sum\limits_{m=0}^{\kappa} C_\kappa^m \dfrac{(x+\kappa)_m}{(1-y)_m}\right|\left|\sum\limits_{m=0}^{\kappa} C_\kappa^m \dfrac{(x+\kappa+1)_m}{(2-y)_m}\right|\right] + \right. \\ \left. + 1 : \left[(y)_{\kappa+1}\left|(2-x)_\kappa \sum\limits_{m=0}^{\kappa} C_\kappa^m \dfrac{(y+\kappa)_m}{(1-x)_m}\right|\left|\sum\limits_{m=0}^{\kappa} C_\kappa^m \dfrac{(y+\kappa+1)_m}{(2-x)_m}\right|\right]\right\}; \\ 0 < x \leqslant 3, \quad 0 < y \leqslant 3; \quad \kappa = 2,\, 3,\, \ldots \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} |r_{2\kappa+1}(x,\,y)| < \kappa!\,(x+y)_\kappa\, 2^{1-x-y} \times \\ \times \left\{1 : \left[(x)_{\kappa+1}\left|(2-y)_\kappa \sum\limits_{m=0}^{\kappa} C_\kappa^m \dfrac{(x+\kappa+1)_m}{(2-y)_m}\right|\left|\sum\limits_{m=0}^{\kappa+1} C_{\kappa+1}^m \dfrac{(x+\kappa+1)_m}{(1-y)_m}\right|\right] + \right. \\ \left. + 1 : \left[(y)_{\kappa+1}\left|(2-x)_\kappa \sum\limits_{m=0}^{\kappa} C_\kappa^m \dfrac{(y+\kappa+1)_m}{(2-x)_m}\right|\left|\sum\limits_{m=0}^{\kappa+1} C_{\kappa+1}^m \dfrac{(x+\kappa+1)_m}{(1-x)_m}\right|\right]\right\}; \\ 0 < x \leqslant 3, \quad 0 < y \leqslant 3; \quad \kappa = 1,\, 2,\, \ldots \end{cases} \tag{14}$$

В случае $x=y$ получим:

$$|r_{2\kappa}(x,\,x)| < \frac{2^{2-2x}\,\kappa!\,(2x)_\kappa : (x)_{\kappa+1}\,|(2-x)_\kappa|}{\left|\sum\limits_{m=0}^{\kappa} C_\kappa^m \dfrac{(x+\kappa)_m}{(1-x)_m}\right|\left|\sum\limits_{m=0}^{\kappa} C_\kappa^m \dfrac{(x+\kappa+1)_m}{(2-x)_m}\right|}; \tag{15}$$

$$|r_{2\kappa+1}(x,\ x)| < \frac{2^{2-2x}\,\kappa!\,(2x)_\kappa : (x)_{\kappa+1}\,|(2-x)_\kappa|}{\left|\sum_{m=0}^{\kappa} C_\kappa^m \frac{(x+\kappa+1)_m}{(2-x)_m}\right| \left|\sum_{m=0}^{\kappa+1} C_{\kappa+1}^m \frac{(x+\kappa+1)_m}{(1-x)_m}\right|}. \quad (16)$$

3. Составим таблицу относительных погрешностей для бета-функции в том случае, если для ее вычисления применить 6-е приближение равенств (9) $(0{,}0000074 = 0{,}0^574)$.

Таблица 1

x \ y	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9
2,2	$0{,}0^574$	$0{,}0^412$	$0{,}0^417$	$0{,}0^420$	$0{,}0^413$
2,4	$0{,}0^414$	$0{,}0^416$	$0{,}0^420$	$0{,}0^420$	$0{,}0^414$
2,6	$0{,}0^419$	$0{,}0^420$	$0{,}0^421$	$0{,}0^421$	$0{,}0^416$
2,8	$0{,}0^417$	$0{,}0^418$	$0{,}0^419$	$0{,}0^418$	$0{,}0^414$

Применяя формулу (10, 6), вычислим бета-функцию при $x = y = 2{,}5$:

$$6)\ \mathrm{B}(2{,}5;\ 2{,}5) \approx \frac{1{,}639}{22{,}26} = 0{,}07362983.$$

Известно, что

$$\mathrm{B}(2{,}5;\ 2{,}5) = \frac{3}{128}\pi = 0{,}07363108\ldots$$

Тогда для 6-го приближения $\triangle = 0{,}0^5125$ и относительная погрешность

$$|\delta_x| < \frac{0{,}00000125}{0{,}07363} < 0{,}000017.$$

Вывод

Применяя 6-е дробно-рациональное приближение бета-функции при изменении переменных x и y на отрезке $[2,\ 3]$, можно вычислить бета-функцию с относительной погрешностью

$$|\delta_{xy}| < 0{,}00003.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Марков. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций наименее уклоняющихся от нуля. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
2. И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
3. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. М., Гостехиздат, 1953.
4. Г. Бетман и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция, функции Лежандра). М., Физматгиз, 1965.
5. В. Е. Корнилов. Приложение цепных дробей к вычислению интегралов от биномных дифференциалов. Изв. ТПИ, т. 131, 1965.
6. А. Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., ГИТТЛ, 1956.