

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ИНТЕГРАЛОВ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В статье применяются параметры $0 \leq \gamma < 1$, $c = a + bi$, $|\arg c| \leq \frac{\pi}{2}$,
 $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$; независимое переменное $x > 0$.

В статье [1] соответствующая цепная дробь по отношению к ряду
 $\frac{1}{cx} F\left(3 - \gamma, -\frac{1}{cx}\right)$ применялась для вычисления интегралов вида

$$I = \int_x^{\infty} t^{\gamma-1} e^{-ct} dt.$$

В этой статье к вычислению интегралов I применяется соответствующая цепная дробь по отношению к рядам

$$\frac{1}{cx} F\left(2 - \gamma, -\frac{1}{cx}\right) \text{ и } \frac{1}{cx} F\left(1 - \gamma, -\frac{1}{cx}\right) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^{\kappa} \frac{(1-\gamma)_{\kappa}}{(cx)^{\kappa+1}}, \quad |cx| \gg 1,$$

где

$$(a)_{\kappa} = a(a+1) \dots (a+\kappa-1) = \frac{\Gamma(a+\kappa)}{\Gamma(a)}.$$

1. Аналогично с выводом в статье [1] интеграл I может быть представлен подходящей дробью, а остаточный член в виде функционального ряда:

$$\begin{aligned} I &= \int_x^{\infty} t^{\gamma-1} e^{-ct} dt = x^{\gamma} e^{-cx} \frac{P_{2\kappa}(cx)}{Q_{2\kappa}(cx)} + r_{2\kappa}(cx) = \\ &= \frac{x^{\gamma} e^{-cx} \sum_{n=0}^{\kappa-1} (cx)^n \sum_{m=0}^{\kappa-1-n} \frac{C_{\kappa}^m (-1)^{\kappa-1-n-m}}{(\kappa-\gamma-n-m)_{n+1}}}{\sum_{n=0}^{\kappa} C_{\kappa}^n \frac{(cx)^n}{(1-\gamma)_n}} + \\ &+ r_{2\kappa}(cx) = \frac{C_{2\kappa} + D_{2\kappa}i}{A_{2\kappa} + B_{2\kappa}i} + r_{2\kappa}(cx), \quad \kappa = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$r_{2\kappa}(cx) = x^\gamma e^{-cx} \sum_{n=\kappa}^{\infty} \frac{n!}{(1-\gamma)_{n+1} Q_{2n}(cx) Q_{2n+2}(cx)}. \quad (2)$$

После отделения вещественной и мнимой частей интеграла (1) можно получить последовательность приближений, которые применяются для вычисления нижеследующих интегралов:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_x^{\infty} t^{\gamma-1} e^{-at} \cos bt \, dt = \\ &= \frac{x^\gamma e^{-ax} \sum_{n=0}^{2\kappa-1} |c|^n x^n \sum_{m=N}^M C_\kappa^m \frac{1}{(1-\gamma)_m} B_{\kappa-1}^{n-m} \cos [bx - (n-2m)\varphi]}{\sum_{n=0}^{\kappa} C_\kappa^n \frac{(1-\gamma+\kappa)_n}{(1-\gamma)_n (1-\gamma)_{2n}} |cx|^{2n} \sum_{m=0}^{\kappa-n} C_{\kappa-n}^m \frac{(2ax)^m}{(1+2n-\gamma)_m}} + \\ &+ \operatorname{Re} [r_{2\kappa}(cx)] = \frac{A_{2\kappa} C_{2\kappa} + B_{2\kappa} D_{2\kappa}}{A_{2\kappa}^2 + B_{2\kappa}^2} + \operatorname{Re} [r_{2\kappa}(cx)], \end{aligned} \quad (3)$$

а также

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_x^{\infty} t^{\gamma-1} e^{-at} \sin bt \, dt = \\ &= \frac{x^\gamma e^{-ax} \sum_{n=0}^{2\kappa-1} |c|^n x^n \sum_{m=N}^M C_\kappa^m \frac{1}{(1-\gamma)_m} B_{\kappa-1}^{n-m} \sin [bx - (n-2m)\varphi]}{|Q_{2\kappa}(cx)|^2 - \operatorname{Im} [r_{2\kappa}(cx)]}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$B_{\kappa-1}^{n-m} = \sum_{p=0}^{\kappa-1-n+m} C_\kappa^p \frac{(-1)^{\kappa-1-n+m-p}}{(\kappa-\gamma-n+m-p)_{n-m+1}}; \quad (5)$$

$$N = \begin{cases} 0 & \text{для } n < \kappa - \frac{1}{2}, \\ n - \kappa + 1 & \text{для } n > \kappa - \frac{1}{2}; \end{cases} \quad (6)$$

$$M = \begin{cases} n & \text{для } n < \kappa + \frac{1}{2}, \\ \kappa & \text{для } n > \kappa + \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (7)$$

Запишем также приближения с нечетными индексами для интеграла I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_x^{\infty} t^{\gamma-1} e^{-at} \cos btdt = \operatorname{Re} \left[\frac{x^\gamma e^{-cx} P_{2\kappa+1}(cx)}{cx Q_{2\kappa+1}(cx)} \right] + \operatorname{Re} [r_{2\kappa+1}(cx)] = \\ &= \frac{x^\gamma e^{-ax} \sum_{n=0}^{2\kappa} |c|^n x^n \sum_{m=N}^M C_\kappa^m \frac{(1-\gamma)}{(2-\gamma)_m} B_\kappa^{n-m} \cos [bx - (n-1-2m)\varphi]}{|cx| \sum_{n=0}^{2\kappa} C_\kappa^n \frac{(2-\gamma+\kappa)_n}{(2-\gamma)_n (2-\gamma)_{2n}} |cx|^{2n} \sum_{m=0}^{\kappa-n} C_{\kappa-n}^m \frac{(2ax)^m}{(2+2n-\gamma)_m}} + \\ &+ \operatorname{Re} [r_{2\kappa+1}(cx)], \end{aligned} \quad (8)$$

где M вычисляется по формуле (7),

$$N = \begin{cases} 0 & \text{для } n < \kappa + \frac{1}{2}, \\ n - \kappa & \text{для } n > \kappa + \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$B_{\kappa}^{n-m} = \sum_{p=0}^{\kappa-n+m} C_{\kappa}^p \frac{(-1)^{\kappa-n+m-p}}{(1-\gamma+\kappa-n+m-p)_{n-m+1}}; \quad (9)$$

кроме того, ввиду [2], стр. 23, 34,

$$r_{2\kappa+1}(cx) = -\frac{x^{\gamma} e^{-cx}}{(cx)} \sum_{n=\kappa}^{\infty} \frac{(1-\gamma) \cdot n!}{(2-\gamma)_{n+1} Q_{2n+1}(cx) Q_{2n+3}(cx)}. \quad (10)$$

В формуле (8) знаменатель следующий

$$Q_{2\kappa+1}(cx) = \sum_{n=0}^{\kappa} C_{\kappa}^n \frac{(cx)^n}{(2-\gamma)_n}. \quad (11)$$

2. Для вычисления числителя равенства (3) принимается во внимание равенство (5) и разделение на вещественную и мнимую части числителя и знаменателя равенства (1), поэтому получаем:

$$\begin{aligned} & A_{2\kappa} C_{2\kappa} + B_{2\kappa} D_{2\kappa} = \\ & = x^{\gamma} e^{-ax} \sum_{n=0}^{\kappa-1} |c|^n x^n B_{\kappa-1}^n \left\{ \sum_{m=0}^{\kappa} C_{\kappa}^m \frac{|c|^m x^m}{(1-\gamma)_m} \cos[(n-m)\varphi - bx] \right\} = \\ & = \frac{x^{\gamma}}{e^{ax}} \left\{ B_{\kappa-1}^0 \left[\cos(-bx) + \frac{|c|x}{1-\gamma} \cos(-\varphi - bx) + \dots \right. \right. \\ & \quad \left. \dots + \frac{|c|^{\kappa} x^{\kappa}}{(1-\gamma)_{\kappa}} \cos(-\kappa\varphi - bx) \right] + B_{\kappa-1}^1 |c|x \left[\cos(\varphi - bx) + \dots \right. \\ & \quad \left. \dots + \frac{|c|^{\kappa} x^{\kappa}}{(1-\gamma)_{\kappa}} \cos(\varphi - \kappa\varphi - bx) \right] + \dots \\ & \quad \left. \dots + B_{\kappa-1}^{\kappa-1} |c|^{\kappa-1} x^{\kappa-1} \left[\cos(\kappa\varphi - \varphi - bx) + \frac{|c|x}{1-\gamma} \cos(\kappa\varphi - 2\varphi - bx) + \dots \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \dots + \frac{|c|^{\kappa} x^{\kappa}}{(1-\gamma)_{\kappa}} \cos(-\varphi - bx) \right] \right\} = \\ & = x^{\gamma} e^{-ax} \sum_{n=0}^{2\kappa-1} |c|^n x^n \sum_{m=N}^M C_{\kappa}^m \frac{1}{(1-\gamma)_m} B_{\kappa-1}^{n-m} \cos(bx - (n-2m)\varphi), \end{aligned}$$

где N , M и $B_{\kappa-1}^{n-m}$ принимают значения и вычисляются согласно равенств (6), (7) и (5).

Числители равенств (4) и (8) преобразуются аналогично.

3. Учитывая формулу для полиномов Чебышева [3]

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^m \frac{n}{n-m} C_{n-m}^m (2x)^{n-2m},$$

где $[v]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее v , далее вычисляем квадрат модуля знаменателя равенства (1) следующим путем:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^{\kappa} C_{\kappa}^n \frac{(cx)^n}{(1-\gamma)_n} \right|^2 = \left| \sum_{n=0}^{\kappa} \sigma_n C_{\kappa}^n x^n \right|^2 = \sum_{n=0}^{\kappa} \sigma_n^2 |cx|^{2n} + \\ & + 2 \sum_{n=0}^{\kappa} \sum_{m=0}^{\kappa-n} \sigma_{n-l} \sigma_{\kappa-m+l} \cos \left[(\kappa-m-n+2l) \arccos \frac{a}{|c|} \right] |cx|^{\kappa+n-m} = \\ & = \sum_{n=0}^{\kappa} |cx|^{2n} \sum_{m=0}^{\kappa-n} (2ax)^{\kappa-n-m} \sum_{l=0}^{m,n} (-1)^l \frac{\kappa-m-n+2l}{\kappa-m-n+l} C_{\kappa-m-n+l}^l \sigma_{n-l} \sigma_{\kappa-m+l} = \\ & = \sum_{n=0}^{\kappa} |cx|^{2n} \sum_{m=0}^{\kappa-n} C_{\kappa}^n C_{\kappa-n}^m \frac{(1+\kappa-\gamma)_n}{(1-\gamma)_{\kappa+n-m} (1-\gamma)_n} (2ax)^{\kappa-n-m} = \\ & = \sum_{n=0}^{\kappa} \frac{(1-\gamma+\kappa)_n}{(1-\gamma)_n (1-\gamma)_{2n}} |cx|^{2n} \sum_{m=0}^{\kappa-n} C_{\kappa-n}^m \frac{(2ax)^m}{(1+2n-\gamma)_m}. \end{aligned}$$

В предпоследнем равенстве было применено тождество

$$\begin{aligned} & \frac{C_{\kappa}^n C_{\kappa-n}^m}{(1-\gamma)_n (1-\gamma)_{\kappa-m}} \lambda_{\kappa, m}^n = \\ & = \sum_{l=0}^{m,n} (-1)^l \frac{\kappa-n-m+2l}{\kappa-n-m+l} C_{\kappa-n-m+l}^l C_{\kappa-n}^{n-l} C_{\kappa-n}^{\kappa+l-m} \times \frac{1}{(1-\gamma)_{n-l}} \times \\ & \times \frac{1}{(1-\gamma)_{\kappa+l-m}} = C_{\kappa}^n C_{\kappa-n}^m \frac{(1-\gamma+\kappa)_n}{(1-\gamma)_{\kappa+n-m} (1-\gamma)_n}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $[v]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее v , далее

4. Докажем тождество (12) в случае $m \leq n$.

После упрощений равенства (12) и решения относительно $\lambda_{\kappa, m}^n$ получаем:

$$\begin{aligned} \lambda_{\kappa, m}^n &= 1 + \sum_{l=1}^m C_m^l (-1)^l \times \\ & \times \frac{(\kappa-n-m+2l)(1+\kappa-n-m)_{l-1}(-n)_l(\gamma-n)_l}{(1+\kappa-n)_l(1+\kappa-m)_l(1-\gamma+\kappa-m)_l} = \\ & = \frac{(1+\kappa-n-m)_m(1-\gamma+\kappa+n-m)_m}{(1+\kappa-m)_m(1-\gamma+\kappa-m)_m}. \end{aligned} \quad (13)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что тождество (13) справедливо при $m=1, 2$; предположим, что оно справедливо при верхнем пределе суммы, равном $m-1$, тогда при верхнем пределе m преобразуем сумму левой части равенства (13) следующим путем:

$$\begin{aligned} \lambda_{\kappa, m}^n - 1 &= (\lambda_{\kappa, m}^n - 1) \frac{(\kappa-n) C_m^l}{(\kappa-n) C_m^l} = \\ &= (\lambda_{\kappa, m}^n - 1) \frac{\kappa C_{m-1}^l - n C_{m-1}^l + l C_{m-1}^l + \kappa C_{m-1}^{l-1} - n C_{m-1}^{l-1} - l C_{m-1}^{l-1}}{(\kappa-n) C_m^l}, \end{aligned}$$

Далее получаем

$$\begin{aligned}
\lambda_{\kappa, m}^n &= 1 + \sum_{l=1}^{m-1} C_{m-1}^l (-1)^l \times \\
&\times \frac{(-n)_l (\kappa - n - m + 2l) (1 + \kappa - n - m)_{l-1} (\gamma - n)_l}{(1 + \kappa - m)_l (\kappa - n)_l (1 - \gamma + \kappa - m)_l} + \\
&+ \sum_{l=1}^{m-1} C_{m-1}^{l-1} (-1)^l \frac{(-n)_l (\kappa - n - m + 2l) (1 + \kappa - n - m)_l (\gamma - n)_l}{(1 + \kappa - m)_l (\kappa - n)_{l+1} (1 - \gamma + \kappa - m)_l} = \\
&= \lambda_{\kappa-1, m-1}^n - \left[1 + \sum_{l=1}^{m-1} C_{m-1}^l (-1)^l \times \right. \\
&\times \frac{(1-n)_l (\kappa - n - m + 2 + 2l) (\kappa - n - m + 3)_{l-1} (\gamma - n + 1)_l}{(2 + \kappa - m)_l (2 + \kappa - n)_l (2 - \gamma + \kappa - m)_l} \left. \right] \times \\
&\times \frac{n (\kappa - n - m + 1)_2 (n - \gamma)}{(1 + \kappa - m) (\kappa - n)_2 (1 - \gamma + \kappa - m)} = \lambda_{\kappa-1, m-1}^n - \\
&- \lambda_{\kappa, m-1}^{n-1} \frac{n (\kappa - n - m + 1)_2 (n - \gamma)}{(1 + \kappa - m) (\kappa - n)_2 (1 - \gamma + \kappa - m)} = \\
&= \frac{(1 + \kappa - m - n)_{m-1} (1 - \gamma + \kappa - m + n)_{m-1}}{(1 + \kappa - m)_{m-1} (1 - \gamma + \kappa - m)_{m-1}} - \\
&- \frac{(1 + \kappa - m - n)_{m-1} (1 - \gamma + \kappa - m + n)_{m-1} n (n - \gamma)}{(1 + \kappa - m)_m (1 - \gamma + \kappa - m)_m};
\end{aligned}$$

то есть

$$\lambda_{\kappa, m}^n = \frac{(1 + \kappa - n - m)_m (1 - \gamma + \kappa - m + n)_m}{(1 + \kappa - m)_m (1 - \gamma + \kappa - m)_m},$$

тем самым тождества (13) и (12) для $m \leq n$ доказаны, аналогично тождество (12) доказывается в случае $m > n$ (верхний предел суммы левой части равенства (12) при этом принимается равным n).

Ввиду изложенного, доказаны значения знаменателей равенств (3), (4), а именно

$$\begin{aligned}
A_{2\kappa}^2 + B_{2\kappa}^2 &= |Q_{2\kappa}(cx)|^2 = \\
&= \sum_{n=0}^{\kappa} C_{\kappa}^n \frac{(1 - \gamma + \kappa)_n}{(1 - \gamma)_n (1 - \gamma)_{2n}} |cx|^{2n} \sum_{m=0}^{\kappa-n} C_{\kappa-n}^m \frac{(2ax)^m}{(1 + 2n - \gamma)_m}, \quad (14)
\end{aligned}$$

знаменатель равенства (8) получится из равенства (14) путем увеличения параметра $1 - \gamma$ на единицу.

5. Теорема. Наряду с неравенством

$$|Q_{2\kappa}(cx)|^2 - Q_{2\kappa}(2ax) < |Q_{2\kappa}(cx)|^2, \quad (15)$$

имеет место неравенство

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\kappa + 1)(\kappa + 2 - \gamma)} [|Q_{2\kappa+2}(cx)|^2 - Q_{2\kappa+2}(2ax)] > \\
&> \frac{1}{\kappa(\kappa + 1 - \gamma)} [|Q_{2\kappa}(cx)|^2 - Q_{2\kappa}(2ax)].
\end{aligned}$$

Доказательство. Заменим квадраты модулей многочленов согласно формулы (14), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2-\gamma)} \sum_{n=1}^{\kappa+1} C_{\kappa+1}^n \frac{(2-\gamma+\kappa)_n}{(1-\gamma)_n(1-\gamma)_{2n}} |cx|^{2n} \sum_{m=0}^{\kappa+1-n} C_{\kappa+1-n}^m \times \\ & \times \frac{(2ax)^m}{(1+2n-\gamma)_m} - \frac{1}{\kappa(\kappa+1-\gamma)} \sum_{n=1}^{\kappa} C_{\kappa}^n \frac{(1-\gamma+\kappa)_n}{(1-\gamma)_n(1-\gamma)_{2n}} |cx|^{2n} \times \\ & \times \sum_{m=0}^{\kappa-n} C_{\kappa-n}^m \frac{(2ax)^m}{(1+2n-\gamma)_m} > \\ & > \sum_{n=1}^{\kappa} C_{\kappa}^n \frac{(2-\gamma+\kappa)_{n-1}}{(1-\gamma)_n(1-\gamma)_{2n}} |cx|^{2n} \sum_{m=0}^{\kappa-n} C_{\kappa-n}^m \frac{(2ax)^m}{(1+2n-\gamma)_m} \times \\ & \times \frac{[(2n+m-2)\kappa+(m+n-1)(2-\gamma)]}{\kappa(\kappa+2-\gamma)(1+\kappa-n-m)} > 0. \end{aligned}$$

Неравенство (16) тем самым доказано.

6. Дадим оценку остаточного члена (2) рациональных приближений (1) по модулю с учетом неравенств (15) и (16):

$$\begin{aligned} |r_{2\kappa}(cx)| & < x^\gamma e^{-ax} \sum_{n=\kappa}^{\infty} \times \\ & \times \frac{n!}{(1-\gamma)_{n+1} \sqrt{|Q_{2n}(cx)|^2 - Q_{2n}(2ax)} \cdot \sqrt{|Q_{2n+2}(cx)|^2 - Q_{2n+2}(2ax)}} < \\ & < \frac{x^\gamma e^{-ax} \kappa! \sqrt{(\kappa)_2(\kappa+1-\gamma)_2}}{(1-\gamma)_{\kappa+1} \sqrt{|Q_{2\kappa}(cx)|^2 - Q_{2\kappa}(2ax)} \cdot \sqrt{|Q_{2\kappa+2}(cx)|^2 - Q_{2\kappa+2}(2ax)}} \times \\ & \times \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\kappa+1)_n}{(\kappa+2-\gamma)_n \sqrt{(\kappa+n)_2(\kappa+n+1-\gamma)_2}} \right] < \\ & < \frac{x^\gamma e^{-ax} (\kappa+1)! (\kappa+1-\gamma)}{(1-\gamma)_{\kappa+1} [|Q_{2\kappa}(cx)|^2 - Q_{2\kappa}(2ax)]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\kappa+n)_2}, \end{aligned}$$

то есть

$$|r_{2\kappa}(cx)| < \frac{x^\gamma e^{-ax} (\kappa+1)!}{\kappa(1-\gamma)_\kappa [|Q_{2\kappa}(cx)|^2 - Q_{2\kappa}(2ax)]} \quad (17)$$

Аналогично оценивается остаточный член (10), а именно:

$$|r_{2\kappa+1}(cx)| < \frac{(1-\gamma) x^\gamma e^{-ax} (\kappa+1)!}{\kappa(2-\gamma)_\kappa |cx| [|Q_{2\kappa+1}(cx)|^2 - Q_{2\kappa+1}(2ax)]} \quad (18)$$

Если учесть значение следующего интеграла [4], стр. 205:

$$\int_0^\infty t^{\gamma-1} e^{-at} \cos(bt) dt = \frac{\cos(\gamma\varphi)}{|c|^\gamma} \Gamma(\gamma), \quad 0 < \gamma < 1, \quad (19)$$

то, ввиду формул (19) и (3), получим

$$\int_0^x t^{\gamma-1} e^{-at} \cos(bt) dt = \frac{\cos(\gamma\varphi)}{|c|^\gamma} \Gamma(\gamma) - I_1, \quad 0 < \gamma < 1, \quad (20)$$

где I_1 вычисляется согласно формуле (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Корнилов. Применение цепных дробей к вычислению некоторых видов интегралов. Изв. ТПИ, т. 131, с. 26—30, 1965.
 2. Т. И. Стилтьес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.
 3. В. Л. Данилов, А. Н. Иванова и др. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби). М., Физматгиз, 1961.
 4. И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
-