ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 226 1976

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ИНТЕГРАЛОВ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В статье применяются параметры $0 \leqslant \gamma < 1$, $c = a + bi$, $|\arg c| \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$; независимое переменное $x > 0$.

В статье [1] соответствующая цепная дробь по отношению к ряду $\frac{1}{cx} F\left(3 - \gamma, -\frac{1}{cx}\right)$ применялась для вычисления интегралов вида

$$I = \int\limits_x^\infty t^{\gamma-1} e^{-ct}\, dt.$$

В этой статье к вычислению интегралов I применяется соответствующая цепная дробь по отношению к рядам

$$\frac{1}{cx} F\left(2 - \gamma, -\frac{1}{cx}\right) \text{ и}$$

$$\frac{1}{cx} F\left(1 - \gamma, -\frac{1}{cx}\right) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^\kappa \frac{(1-\gamma)_\kappa}{(cx)^{\kappa+1}}, \quad |cx| \gg 1,$$

где

$$(a)_\kappa = a(a+1)\dots(a+\kappa-1) = \frac{\Gamma(a+\kappa)}{\Gamma(a)}.$$

1. Аналогично с выводом в статье [1] интеграл I может быть представлен подходящей дробью, а остаточный член в виде функционального ряда:

$$I = \int\limits_x^\infty t^{\gamma-1} e^{-ct}\, dt = x^\gamma e^{-cx} \frac{P_{2\kappa}(cx)}{Q_{2\kappa}(cx)} + r_{2\kappa}(cx) =$$

$$= \frac{x^\gamma e^{-cx} \sum\limits_{n=0}^{\kappa-1} (cx)^n \sum\limits_{m=0}^{\kappa-1-n} \frac{C_\kappa^m (-1)^{\kappa-1-n-m}}{(\kappa-\gamma-n-m)_{n+1}}}{\sum\limits_{n=0}^{\kappa} C_\kappa^n \frac{(cx)^n}{(1-\gamma)_n}} +$$

$$+ r_{2\kappa}(cx) = \frac{C_{2\kappa} + D_{2\kappa} i}{A_{2\kappa} + B_{2\kappa} i} + r_{2\kappa}(cx), \quad \kappa = 1, 2, \dots \tag{1}$$

где
$$r_{2\kappa}(cx) = x^{\gamma} e^{-cx} \sum_{n=\kappa}^{\infty} \frac{n!}{(1-\gamma)_{n+1} Q_{2n}(cx) Q_{2n+2}(cx)}. \qquad (2)$$

После отделения вещественной и мнимой частей интеграла (1) можно получить последовательность приближений, которые применяются для вычисления нижеследующих интегралов:

$$I_1 = \int_x^{\infty} t^{\gamma-1} e^{-at} \cos bt\, dt =$$

$$= \frac{x^{\gamma} e^{-ax} \sum_{n=0}^{2\kappa-1} |c|^n x^n \sum_{m=N}^{M} C_\kappa^m \frac{1}{(1-\gamma)_m} B_{\kappa-1}^{n-m} \cos[bx-(n-2m)\varphi]}{\sum_{n=0}^{\kappa} C_\kappa^n \frac{(1-\gamma+\kappa)_n}{(1-\gamma)_n (1-\gamma)_{2n}} |cx|^{2n} \sum_{m=0}^{\kappa-n} C_{\kappa-n}^n \frac{(2ax)^m}{(1+2n-\gamma)_m}} +$$

$$+ Re[r_{2\kappa}(cx)] = \frac{A_{2\kappa} C_{2\kappa} + B_{2\kappa} D_{2\kappa}}{A_{2\kappa}^2 + B_{2\kappa}^2} + Re[r_{2\kappa}(cx)], \qquad (3)$$

а также

$$I_2 = \int_x^{\infty} t^{\gamma-1} e^{-at} \sin bt\, dt =$$

$$= \frac{x^{\gamma} e^{-ax} \sum_{n=0}^{2\kappa-1} |c|^n x^n \sum_{m=N}^{M} C_\kappa^m \frac{1}{(1-\gamma)_m} B_{\kappa-1}^{n-m} \sin[bx-(n-2m)\varphi]}{|Q_{2\kappa}(cx)|^2} -$$

$$- Im[r_{2\kappa}(cx)], \qquad (4)$$

где

$$B_{\kappa-1}^{n-m} = \sum_{p=0}^{\kappa-1-n+m} C_\kappa^p \frac{(-1)^{\kappa-1-n+m-p}}{(\kappa-\gamma-n+m-p)_{n-m+1}}; \qquad (5)$$

$$N = \begin{cases} 0 & \text{для } n < \kappa - \frac{1}{2}, \\ n-\kappa+1 & \text{для } n > \kappa - \frac{1}{2}; \end{cases} \qquad (6)$$

$$M = \begin{cases} n & \text{для } n < \kappa + \frac{1}{2}, \\ \kappa & \text{для } n > \kappa + \frac{1}{2}. \end{cases} \qquad (7)$$

Запишем также приближения с нечетными индексами для интеграла I_1:

$$_1 = \int_x^{\infty} t^{\gamma-1} e^{-at} \cos btdt = Re\left[\frac{x^{\gamma} e^{-cx} P_{2\kappa+1}(cx)}{cx\, Q_{2\kappa+1}(cx)}\right] + Re[r_{2\kappa+1}(cx)] =$$

$$= \frac{x^{\gamma} e^{-ax} \sum_{n=0}^{2\kappa} |c|^n x^n \sum_{m=N}^{M} C_\kappa^m \frac{(1-\gamma)}{(2-\gamma)_m} B_\kappa^{n-m} \cos[bx-(n-1-2m)\varphi]}{|cx| \sum_{n=0}^{2\kappa} C_\kappa^n \frac{(2-\gamma+\kappa)_n}{(2-\gamma)_n (2-\gamma)_{2n}} |cx|^{2n} \sum_{m=0}^{\kappa-n} C_{\kappa-n}^m \frac{(2ax)^m}{(2+2n-\gamma)_m}} +$$

$$+ Re[r_{2\kappa+1}(cx)], \qquad (8)$$

где M вычисляется по формуле (7),

$$N=\begin{cases}0 \text{ для } n<\kappa+\dfrac{1}{2},\\ n-\kappa \text{ для } n>\kappa+\dfrac{1}{2};\end{cases}$$

$$B_\kappa^{n-m}=\sum_{p=0}^{\kappa-n+m} C_\kappa^p \frac{(-1)^{\kappa-n+m-p}}{(1-\gamma+\kappa-n+m-p)_{n-m+1}}; \tag{9}$$

кроме того, ввиду [2], стр. 23, 34,

$$r_{2\kappa+1}(cx)=-\frac{x^\gamma e^{-cx}}{(cx)}\sum_{n=\kappa}^{\infty}\frac{(1-\gamma)\cdot n!}{(2-\gamma)_{n+1}Q_{2n+1}(cx)\,Q_{2n+3}(cx)}. \tag{10}$$

В формуле (8) знаменатель следующий

$$Q_{2\kappa+1}(cx)=\sum_{n=0}^{\kappa} C_\kappa^n\frac{(cx)^n}{(2-\gamma)_n}. \tag{11}$$

2. Для вычисления числителя равенства (3) принимается во внимание равенство (5) и разделение на вещественную и мнимую части числителя и знаменателя равенства (1), поэтому получаем:

$$A_{2\kappa}C_{2\kappa}+B_{2\kappa}D_{2\kappa}=$$

$$=x^\gamma e^{-ax}\sum_{n=0}^{\kappa-1}|c|^n x^n B_{\kappa-1}^n\left\{\sum_{m=0}^{\kappa} C_\kappa^m\frac{|c|^m x^m}{(1-\gamma)_m}\cos\left[(n-m)\varphi-bx\right]\right\}=$$

$$=\frac{x^\gamma}{e^{ax}}\left\{B_{\kappa-1}^0\left[\cos(-bx)+\frac{|c|x}{1-\gamma}\cos(-\varphi-bx)+\cdots\right.\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{|c|^\kappa x^\kappa}{(1-\gamma)_\kappa}\cos(-\kappa\varphi-bx)\right]+B_{\kappa-1}^1|c|x\left[\cos(\varphi-bx)+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{|c|^\kappa x^\kappa}{(1-\gamma)_\kappa}\cos(\varphi-\kappa\varphi-bx)\right]+\cdots$$

$$\cdots+B_{\kappa-1}^{\kappa-1}|c|^{\kappa-1}x^{\kappa-1}\left[\cos(\kappa\varphi-\varphi-bx)+\frac{|c|x}{1-\gamma}\cos(\kappa\varphi-2\varphi-bx)+\cdots\right.$$

$$\left.\left.\cdots+\frac{|c|^\kappa x^\kappa}{(1-\gamma)_\kappa}\cos(-\varphi-bx)\right]\right\}=$$

$$=x^\gamma e^{-ax}\sum_{n=0}^{2\kappa-1}|c|^n x^n\sum_{m=N}^{M} C_\kappa^m\frac{1}{(1-\gamma)_m}B_{\kappa-1}^{n-m}\cos\left(bx-(n-2m)\varphi\right],$$

где N, M и $B_{\kappa-1}^{n-m}$ принимают значения и вычисляются согласно равенств (6), (7) и (5).

Числители равенств (4) и (8) преобразуются аналогично.

3. Учитывая формулу для полиномов Чебышева [3]

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x)=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m\frac{n}{n-m}C_{n-m}^m(2x)^{n-2m},$$

где $[\nu]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее ν, далее вычисляем квадрат модуля знаменателя равенства (1) следующим путем:

$$\left|\sum_{n=0}^{\kappa} C_\kappa^n \frac{(cx)^n}{(1-\gamma)_n}\right|^2 = \left|\sum_{n=0}^{\kappa} \sigma_n c^n x^n\right|^2 = \sum_{n=0}^{\kappa} \sigma_n^2 |cx|^{2n} +$$

$$+ 2\sum_{n=0}^{\kappa}\sum_{m=0}^{\kappa-n} \sigma_{n-l}\,\sigma_{\kappa-m+l} \cos\left[(\kappa-m-n+2l)\arccos\frac{a}{|c|}\right]|cx|^{\kappa+n-m} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\kappa}|cx|^{2n}\sum_{m=0}^{\kappa-n}(2ax)^{\kappa-n-m}\sum_{l=0}^{m,\,n}(-1)^l\frac{\kappa-m-n+2l}{\kappa-m-n+l}C^l_{\kappa-m-n+l}\sigma_{n-l}\sigma_{\kappa-m+l} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\kappa}|cx|^{2n}\sum_{m=0}^{\kappa-n} C_\kappa^n C_{\kappa-n}^m \frac{(1+\kappa-\gamma)_n}{(1-\gamma)_{\kappa+n-m}(1-\gamma)_n}(2ax)^{\kappa-n-m} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\kappa}\frac{(1-\gamma+\kappa)_n}{(1-\gamma)_n(1-\gamma)_{2n}}|cx|^{2n}\sum_{m=0}^{\kappa-n}C_{\kappa-n}^m\frac{(2ax)^m}{(1+2n-\gamma)_m}.$$

В предпоследнем равенстве было применено тождество

$$\frac{C_\kappa^n C_\kappa^m}{(1-\gamma)_n(1-\gamma)_{\kappa-m}}\lambda^n_{\kappa,m} =$$

$$= \sum_{l=0}^{m,\,n}(-1)^l\frac{\kappa-n-m+2l}{\kappa-n-m+l}C^l_{\kappa-n-m+l}C_\kappa^{n-l}C_\kappa^{\kappa+l-m}\times\frac{1}{(1-\gamma)_{n-l}}\times$$

$$\times\frac{1}{(1-\gamma)_{\kappa+l-m}} = C_\kappa^n C_{\kappa-n}^m\frac{(1-\gamma+\kappa)_n}{(1-\gamma)_{\kappa+n-m}(1-\gamma)_n}, \qquad (12)$$

где $[\nu]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее ν, далее

4. Докажем тождество (12) в случае $m \leqslant n$.

После упрощений равенства (12) и решения относительно $\lambda^n_{\kappa,m}$ получаем:

$$\lambda^n_{\kappa,m} = 1 + \sum_{l=1}^{m} C_m^l(-1)^l\times$$

$$\times\frac{(\kappa-n-m+2l)(1+\kappa-n-m)_{l-1}(-n)_l(\gamma-n)_l}{(1+\kappa-n)_l(1+\kappa-m)_l(1-\gamma+\kappa-m)_l} =$$

$$= \frac{(1+\kappa-n-m)_m(1-\gamma+\kappa+n-m)_m}{(1+\kappa-m)_m(1-\gamma+\kappa-m)_m}. \qquad (13)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что тождество (13) справедливо при $m=1, 2$; предположим, что оно справедливо при верхнем пределе суммы, равном $m-1$, тогда при верхнем пределе m преобразуем сумму левой части равенства (13) следующим путем:

$$\lambda^n_{\kappa,m} - 1 = (\lambda^n_{\kappa,m}-1)\frac{(\kappa-n)C_m^l}{(\kappa-n)C_m^l} =$$

$$= (\lambda^n_{\kappa,m}-1)\frac{\kappa C^l_{m-1} - nC^l_{m-1} + lC^l_{m-1} + \kappa C^{l-1}_{m-1} - nC^{l-1}_{m-1} - lC^l_{m-1}}{(\kappa-n)C_m^l},$$

Далее получаем

$$\lambda^n_{\kappa, m} = 1 + \sum_{l=1}^{m-1} C^l_{m-1} (-1)^l \times$$

$$\times \frac{(-n)_l (\kappa - n - m + 2l)(1 + \kappa - n - m)_{l-1} (\gamma - n)_l}{(1 + \kappa - m)_l (\kappa - n)_l (1 - \gamma + \kappa - m)_l} +$$

$$+ \sum_{=1} C^{l-1}_{m-1} (-1)^l \frac{(-n)_l (\kappa - n - m + 2l)(1 + \kappa - n - m)_l (\gamma - n)_l}{(1 + \kappa - m)_l (\kappa - n)_{l+1} (1 - \gamma + \kappa - m)_l} =$$

$$= \lambda^n_{\kappa-1, m-1} - \Bigg[1 + \sum_{l=1}^{m-1} C^l_{m-1} (-1)^l \times$$

$$\times \frac{(1-n)_l (\kappa - n - m + 2 + 2l)(\kappa - n - m + 3)_{l-1} (\gamma - n + 1)_l}{(2 + \kappa - m)_l (2 + \kappa - n)_l (2 - \gamma + \kappa - m)_l} \Bigg] \times$$

$$\times \frac{n (\kappa - n - m + 1)_2 (n - \gamma)}{(1 + \kappa - m)(\kappa - n)_2 (1 - \gamma + \kappa - m)} = \lambda^n_{\kappa-1, m-1} -$$

$$- \lambda^{n-1}_{\kappa, m-1} \frac{n (\kappa - n - m + 1)_2 (n - \gamma)}{(1 + \kappa - m)(\kappa - n)_2 (1 - \gamma + \kappa - m)} =$$

$$= \frac{(1 + \kappa - m - n)_{m-1} (1 - \gamma + \kappa - m + n)_{m-1}}{(1 + \kappa - m)_{m-1} (1 - \gamma + \kappa - m)_{m-1}} -$$

$$- \frac{(1 + \kappa - m - n)_{m-1} (1 - \gamma + \kappa - m + n)_{m-1} n (n - \gamma)}{(1 + \kappa - m)_m (1 - \gamma + \kappa - m)_m};$$

то есть

$$\lambda^n_{\kappa, m} = \frac{(1 + \kappa - n - m)_m (1 - \gamma + \kappa - m + n)_m}{(1 + \kappa - m)_m (1 - \gamma + \kappa - m)_m},$$

тем самым тождества (13) и (12) для $m \leqslant n$ доказаны, аналогично тождество (12) доказывается в случае $m > n$ (верхний предел суммы левой части равенства (12) при этом принимается равным n).

Ввиду изложенного, доказаны значения знаменателей равенств (3), (4), а именно

$$A^2_{2\kappa} + B^2_{2\kappa} = |Q_{2\kappa}(cx)|^2 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\kappa} C^n_\kappa \frac{(1 - \gamma + \kappa)_n}{(1-\gamma)_n (1-\gamma)_{2n}} |cx|^{2n} \sum_{m=0}^{\kappa-n} C^m_{\kappa-n} \frac{(2ax)^m}{(1 + 2n - \gamma)_m}, \tag{14}$$

знаменатель равенства (8) получится из равенства (14) путем увеличения параметра $1 - \gamma$ на единицу.

5. Теорема. Наряду с неравенством

$$|Q_{2\kappa}(cx)|^2 - Q_{2\kappa}(2ax) < |Q_{2\kappa}(cx)|^2, \tag{15}$$

имеет место неравенство

$$\frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2-\gamma)} [|Q_{2\kappa+2}(cx)|^2 - Q_{2\kappa+2}(2ax)] >$$

$$> \frac{1}{\kappa(\kappa+1-\gamma)} [|Q_{2\kappa}(cx)|^2 - Q_{2\kappa}(2ax)].$$

Доказательство. Заменим квадраты модулей многочленов согласно формулы (14), получим:

$$\frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2-\gamma)}\sum_{n=1}^{\kappa+1}C_{\kappa+1}^{n}\frac{(2-\gamma+\kappa)_n}{(1-\gamma)_n(1-\gamma)_{2n}}|cx|^{2n}\sum_{m=0}^{\kappa+1-n}C_{\kappa+1-n}^{m}\times$$

$$\times\frac{(2ax)^m}{(1+2n-\gamma)_m}-\frac{1}{\kappa(\kappa+1-\gamma)}\sum_{n=1}^{\kappa}C_{\kappa}^{n}\frac{(1-\gamma+\kappa)_n}{(1-\gamma)_n(1-\gamma)_{2n}}|cx|^{2n}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\kappa-n}C_{\kappa-n}^{m}\frac{(2ax)^m}{(1+2n-\gamma)_m}>$$

$$>\sum_{n=1}^{\kappa}C_{\kappa}^{n}\frac{(2-\gamma+\kappa)_{n-1}}{(1-\gamma)_n(1-\gamma)_{2n}}|cx|^{2n}\sum_{m=0}^{\kappa-n}C_{\kappa-n}^{m}\frac{(2ax)^m}{(1+2n-\gamma)_m}\times$$

$$\times\frac{[(2n+m-2)\kappa+(m+n-1)(2-\gamma)]}{\kappa(\kappa+2-\gamma)(1+\kappa-n-m)}>0.$$

Неравенство (16) тем самым доказано.

6. Дадим оценку остаточного члена (2) рациональных приближений (1) по модулю с учетом неравенств (15) и (16):

$$|r_{2\kappa}(cx)|<x^{\gamma}e^{-ax}\sum_{n=\kappa}^{\infty}\times$$

$$\times\frac{n!}{(1-\gamma)_{n+1}\sqrt{|Q_{2n}(cx)|^2-Q_{2n}(2ax)}\cdot\sqrt{|Q_{2a+2}(cx)|^2-Q_{2n+2}(2ax)}}<$$

$$<\frac{x^{\gamma}\,\mathrm{e}^{-ax}\,\kappa!\sqrt{(\kappa)_2(\kappa+1-\gamma)_2}}{(1-\gamma)_{\kappa+1}\sqrt{|Q_{2\kappa}(cx)|^2-Q_{2\kappa}(2ax)}\cdot\sqrt{|Q_{2\kappa+2}(cx)|^2-Q_{2\kappa+2}(2ax)}}\times$$

$$\times\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\kappa+1)_n}{(\kappa+2-\gamma)_n\sqrt{(\kappa+n)_2(\kappa+n+1-\gamma)_2}}\right]<$$

$$<\frac{x^{\gamma}e^{-ax}(\kappa+1)!(\kappa+1-\gamma)}{(1-\gamma)_{\kappa+1}[|Q_{2\kappa}(cx)|^2-Q_{2\kappa}(2ax)]}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\kappa+n)_2},$$

то есть

$$|r_{2\kappa}(cx)|<\frac{x^{\gamma}e^{-ax}(\kappa+1)!}{\kappa(1-\gamma)_{\kappa}[|Q_{2\kappa}(cx)|^2-Q_{2\kappa}(2ax)]}. \tag{17}$$

Аналогично оценивается остаточный член (10), а именно:

$$|r_{2\kappa+1}(cx)|<\frac{(1-\gamma)x^{\gamma}e^{-ax}(\kappa+1)!}{\kappa(2-\gamma)_{\kappa}|cx|[|Q_{2\kappa+1}(cx)|^2-Q_{2\kappa+1}(2ax)]}. \tag{18}$$

Если учесть значение следующего интеграла [4], стр. 205:

$$\int_0^{\infty}t^{\gamma-1}e^{-at}\cos(bt)\,dt=\frac{\cos(\gamma\varphi)}{|c|^{\gamma}}\Gamma(\gamma),\quad 0<\gamma<1, \tag{19}$$

то, ввиду формул (19) и (3), получим

$$\int_0^{x}t^{\gamma-1}e^{-at}\cos(bt)\,dt=\frac{\cos(\gamma\varphi)}{|c|^{\gamma}}\Gamma(\gamma)-I_1,\quad 0<\gamma<1, \tag{20}$$

где I_1 вычисляется согласно формуле (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Корнилов. Применение цепных дробей к вычислению некоторых видов интегралов. Изв. ТПИ, т. 131, с. 26—30, 1965.

2. Т. И. Стилтьес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.

3. В. Л. Данилов, А. Н. Иванова и др. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби). М., Физматгиз, 1961.

4. И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., Гостехиздат, 1948.