ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМЕНИ С. М. КИРОВА

Том 230 1972

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОЙ САР С ПОМОЩЬЮ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ЧЕБЫШЕВА

В. М. ОСИПОВ, Г. И. ЯМЩИКОВ

(Представлена научным семинаром
кафедры автоматики и телемеханики)

Оптимизация параметров линейной САР в общем случае предполагает минимизацию функций типа $\Delta f = f - f_{\text{оп}}$, где под f нужно понимать любые характеристики системы, однозначно определяющие ее свойства, $f_{\text{оп}}$ — те же характеристики, оптимальные в каком-либо смысле.

Существующие методы оптимизации параметров линейных систем имеют существенные недостатки [1], [4], [5], ограничивающие область их применения. В связи с этим возникает необходимость разработки новых простых и надежных методов.

В данной работе делается попытка применить разложение в ряд Фурье по экспоненциальным функциям Чебышева для оптимизации параметров линейной САР.

Пусть задана линейная САР, часть параметров которой известна, а остальные нужно определить из условия минимума улучшенной квадратичной оценки, т. е. минимума функционала

$$I = \int_0^\infty \{\varepsilon_0^2(t) + G \cdot [\varepsilon_0'(t)]^2\}\, dt, \tag{1}$$

где

$\varepsilon_0(t)$ — собственная ошибка воспроизведения системы;

G — весовой коэффициент.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{C(p)}{B(p)} = \frac{c_0 p^m + c_1 p^{m-1} + \cdots + c_m}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \cdots + b_n}. \tag{2}$$

Передаточная функция замкнутой системы:

$$W_з(p) = \frac{C(p)}{B(p) + C(p)} = \frac{C(p)}{D(p)}. \tag{3}$$

Передаточная функция для собственной ошибки воспроизведения САР равна

$$W_\varepsilon B(p) = \frac{B(p)}{B(p) + C(p)} = 1 - \frac{C(p)}{D(p)}. \tag{4}$$

При единичном входном воздействии операторное изображение собственной ошибки воспроизведения системы имеет вид:

$$\varepsilon_0(p)=W_\varepsilon(p)\cdot\frac{1}{p}=\left[1-\frac{C(p)}{D(p)}\right]\cdot\frac{1}{p}. \tag{5}$$

Начальное и конечное значения собственной ошибки воспроизведения системы определяются формулами:

$$\varepsilon_0(0)=\lim_{p\to\infty}p\cdot\varepsilon_0(p)=1; \tag{6}$$

$$\varepsilon_0(\infty)=\lim_{p\to 0}p\cdot\varepsilon_0(p)=\frac{b_n}{b_n+c_m}. \tag{7}$$

Составим функцию

$$\varepsilon(t)=\varepsilon_0(t)-\varepsilon_0(0)\,e^{-at}-\varepsilon_0(\infty)\,(1-e^{-at}), \tag{8}$$

где a — некоторый вещественный параметр. Операторное изображение $\varepsilon(t)$ имеет вид:

$$\varepsilon(p)=\varepsilon_0(p)-\varepsilon_0(0)\cdot\frac{1}{p+a}-\varepsilon_0(\infty)\cdot\frac{a}{(p+a)p}=$$

$$=\frac{W_\varepsilon(p)}{p}-\frac{p+a\cdot\varepsilon_0(\infty)}{p(p+a)}. \tag{9}$$

Поскольку $\varepsilon(0)=\varepsilon(\infty)=0$, то $\varepsilon(t)$ можно разложить в ряд Фурье по экспоненциальным функциям Чебышева III рода [3]:

$$\varepsilon(t)=\varepsilon_1\cdot S_1(t)+\varepsilon_2\cdot S_2(t)+\cdots=\sum_{\text{к}=1}^{\infty}\varepsilon_\text{к}\cdot S_\text{к}(t). \tag{10}$$

Для $\varepsilon_\text{к}$ (к$=1, 2, 3, \ldots$) коэффициенты Фурье [2] равны

$$\varepsilon_\text{к}=\frac{4a}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-\frac{at}{2}}\cdot\varepsilon(t)\cdot S_\text{к}(t)}{\sqrt{1-e^{at}}}\,dt. \tag{11}$$

Учитывая (9), для нескольких первых $к$ имеем:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1&=\frac{4a}{\pi}\cdot\varepsilon(a)=\frac{4}{\pi}\left[W_\varepsilon(a)-\frac{1+\varepsilon_0(\infty)}{2}\right];\\
\varepsilon_2&=\frac{4a}{\pi}[-2\cdot\varepsilon(a)+4\cdot\varepsilon(2a)];\\
\varepsilon_3&=\frac{4a}{\pi}[3\cdot\varepsilon(a)-16\cdot\varepsilon(2a)+16\cdot\varepsilon(3a)];\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Предположим, что $\varepsilon(t)\equiv 0$. Тогда $\varepsilon_0(t)$ оказывается экстремалью функционала (1) при заданных граничных условиях $\varepsilon_0(0)$ и $\varepsilon_0(\infty)$, а регулируемая величина будет равна:

$$y(t)=1-\varepsilon_0(t)=1-\varepsilon_0(0)\cdot e^{-at}-\varepsilon_0(\infty)(1+e^{-at}). \tag{13}$$

Мы получим идеальный апериодический процесс без перерегулирования, достигающий установившегося значения за заданное время.

Такой идеальный переходный процесс мы, вообще говоря, обеспечить не можем, но мы можем попытаться приблизиться к нему, выбирая параметры передаточной функции из условия обращения в нуль нескольких первых коэффициентов Фурье $\varepsilon_к$.

В нашем случае это дает:

$$\varepsilon(\mathrm{k}a)=0, \quad (\mathrm{k}=1, 2, 3, \ldots) \tag{14}$$

или

$$W_\varepsilon(\mathrm{k}a)=\frac{\mathrm{k}+\varepsilon_0(\infty)}{\mathrm{k}+1}, \ (\mathrm{k}=1, 2, 3, \ldots). \tag{15}$$

Воспользуемся выражением (4). Тогда

$$1-\frac{C(\mathrm{k}a)}{D(\mathrm{k}a)}=\frac{\mathrm{k}+\varepsilon_0(\infty)}{\mathrm{k}+1}, \ (\mathrm{k}=1,2,3,\ldots). \tag{16}$$

Отсюда

$$W_з(\mathrm{k}a)=\frac{C(\mathrm{k}a)}{D(\mathrm{k}a)}=\frac{1-\varepsilon_0(\infty)}{\mathrm{k}+1}, \ (\mathrm{k}=1,2,3,\ldots). \tag{17}$$

Система из n-линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров будет иметь вид:

$$\left.\begin{array}{l} W_з(0)\cdot D(a)-2\cdot C(a)=0 \\ W_з(0)\cdot D(2a)-3\cdot C(2a)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ W_з(0)\cdot D(na)-(n+1)\cdot C(na)=0. \end{array}\right\} \tag{18}$$

Параметр «а» может быть найден из условия вхождения кривой переходного процесса в Δ — зону за предписанное время t_p:

$$a=-\frac{\ln\Delta}{t_p}, \ (\Delta=0{,}001 \div 0{,}05). \tag{19}$$

Рассмотрим пример.

Пусть задана передаточная функция разомкнутой системы:

$$W(p)=\frac{C(p)}{B(p)}=\frac{c_0p^2+c_1p+c_2}{b_0p^4+b_1p^3+b_2p^2+b_3p+b_4}, \tag{20}$$

где

$$b_0=\frac{0{,}02}{19}c_0; \quad b_4=1;$$

$$b_1=\frac{0{,}2}{19}c_0+0{,}02\,b_3-0{,}004; \quad c_2=19.$$

$$b_2=\frac{1}{19}c_0+0{,}2\,b_3-0{,}02.$$

Необходимо определить параметры C_0, C_1 и b_3 при условии, что кривая переходного процесса должна войти в Δ-зону при $\Delta=0{,}05$ за время $t_p=6$ *сек.*

Находим параметр «а» по формуле (19):

$$a=-\frac{\ln 0{,}05}{6}\approx 0{,}5 \ 1/сек.$$

Представим выражения (15) в виде:

$$B(\mathrm{k}a)\cdot W_з(0)-C(\mathrm{k}a)\,[\mathrm{k}+\varepsilon_0(\infty)]=0,\ \ (\mathrm{k}=1,\,2,\,3,\,\ldots). \qquad (21)$$

Учитывая (20), при к=1, 2, 3 получим:

$$\begin{cases} 0{,}95(b_0a^4+b_1\cdot a^3+b_2\cdot a^2+b_3a+b_4)-(1+0{,}05)(c_0\cdot a^2+c_1a+C_2)=0, \\ 0{,}95(16b_0a^4+8\cdot b_1a+4\cdot b_2a^2+2b_3a+b_4)-(2+0{,}05)(4c_0a^2+ \\ \qquad +2c_1a+c_2)=0, \\ 0{,}95(81b_0a^4+27b_1a^3+9b_2a^2+3b_3a+b_4)- \\ \qquad -(3+0{,}05))(9c_0a^2+3c_1a+c_2)=0. \end{cases} \qquad (22)$$

После подстановки значений b_0, b_1, b_2, b_4 и a и преобразований система (26) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} -0{,}24869\,c_2-0{,}52500\,c_3+0{,}52488\,b_3&=19{,}005 \\ -0{,}99450\,c_2-1{,}0250\,c_3+0{,}57950\,b_3&=19{,}011 \\ -2{,}2371\,c_2-1{,}5250\,c_3+0{,}63888\,b_3&=19{,}019 \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Решая эту систему, находим

$$c_2=0{,}36190,$$
$$c_3=3{,}8465,$$
$$b_3=40{,}227.$$

Определяем коэффициенты передаточной функции замкнутой системы:

$$d_0=0{,}00038095,$$
$$d_1=0{,}80435,$$
$$d_2=8{,}0463,$$
$$d_3=44{,}074,$$
$$d_4=20.$$

Представление о качестве оптимизации дает рис. 1. На рис. 1 изображены:

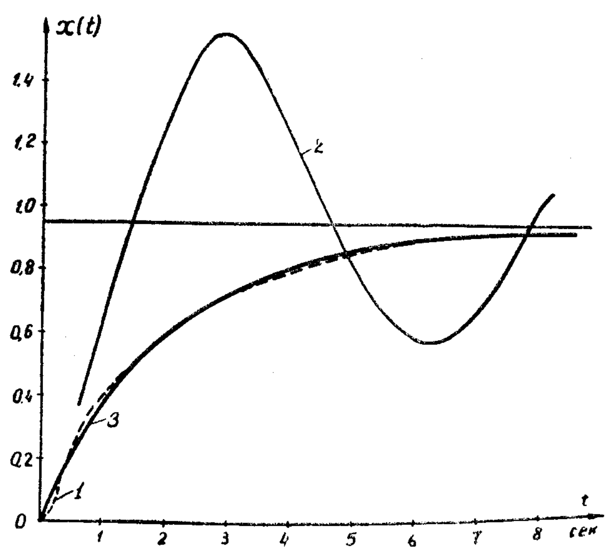

Рис. 1.

а) кривая *1* — переходная характеристика системы, полученной в результате оптимизации;

б) кривая *2* — переходная характеристика исходной системы, передаточная функция которой имеет вид:

$$W_{\text{исх}}(p) = \frac{19}{0{,}02\,p^2 + 0{,}2\,p + 20};$$

в) кривая *3* — желаемая переходная характеристика

$$y_{\text{оп}}(t) = 0{,}95\,(1 - e^{-0{,}5t}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Орурк. Новые методы синтеза линейных и некоторых нелинейных динамических систем. Изд. «Наука», М.-Л., 1965.
2. В. М. Осипов. Экспоненциальные полиномы и разложение некоторых типовых сигналов. Изв. ТПИ, т. 180, 1968.
3. В. М. Осипов. К вопросу о приближенном обращении преобразования Лапласа. Изв. ТПИ, т. 191, 1969.
4. Ю. А. Рязанов. Проектирование систем автоматического регулирования. Изд. «Машиностроение», М., 1968.
5. Н. И. Соколов. Аналитический метод синтеза линеаризованных систем автоматического регулирования. Изд. «Машиностроение», М., 1966.