ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМЕНИ С. М. КИРОВА

Том 230 1972

АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В УПРАВЛЯЮЩЕМ ПОЛЕ БЕТАТРОНА С АЗИМУТАЛЬНОЙ ВАРИАЦИЕЙ

А. А. ЗВОНЦОВ, В. Л. ЧАХЛОВ

(Представлена научным семинаром
лаборатории переносных малогабаритных бетатронов)

В настоящее время в бетатронах используется в основном азимутально-симметричное поле, спадающее по радиусу. Уравнения движения частиц в таком поле:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}+\omega^2(1+n)\,r=0;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-\omega^2 nz=0, \tag{1}$$

где r и z — малые отклонения от равновесной орбиты радиуса R и $n=\frac{R}{H}\frac{\partial H}{\partial r}$ — градиент поля.

Дальнейшее развитие ускорителей в целях увеличения фокусирующих сил пошло по пути отказа от азимутальной симметрии поля.

В лаборатории малогабаритных бетатронов ТПИ была предложена конструкция бетатрона с азимутально-несимметричным магнитным полем.

Полюса такого бетатрона были выполнены в виде N радиальных гребней ($N=6$). Полюса могут быть выполнены также в виде N спиральных гребней. Магнитное поле такого бетатрона обладает следующими особенностями:

1. Под гребнем магнитное поле может быть спадающим или возрастающим по радиусу, либо не меняться по радиусу. Знак и величина n будут зависеть от изменения межполюсного зазора δ по радиусу.

2. В секторах между гребнями ввиду небольших габаритных размеров магнитное поле создается за счет рассеяния магнитных потоков от гребней. Так как гребни расходятся по радиусу, поле между гребнями будет спадающим по радиусу.

По данным магнитных измерений, форма поля, создаваемая такой конструкцией, сложна и общий анализ движений электронов в таком поле затруднителен. Для предварительной оценки фокусирующих свойств форма поля в области равновесной орбиты и при $z=0$ может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$H(v,\theta)=\overline{H}(v)\{1+\sum A_{Nk}\cos N_k[\theta-\psi_{Nk}(v)]\}, \tag{2}$$

где $\overline{H}$ — среднее по азимуту поле,

A_{Nk} — глубина вариации N_k гармоники поля,

ψ_{Nk} — начальная фаза N_k гармоники поля.

С учетом лишь первой гармоники для радиальных гребней поле можно задать в виде:

$$H_z(v, \theta)=\overline{H}_z(v)\,[1+f(v)\cos N\theta], \tag{3}$$

где f — глубина вариации, равная

$$f=\frac{\overline{H}-H_{\min}}{\overline{H}}=\frac{H_{\max}-\overline{H}}{\overline{H}}. \tag{4}$$

Рассмотрим поле около точки с координатами r_0, z_0. При малых отклонениях от данной точки H_r, H_θ, и H_z могут быть приближенно представлены первыми отличными от 0 членами разложения в ряд Тейлора [1]

$$\begin{aligned} H_z&=H_z(r)+\frac{\partial H_z}{\partial r}\cdot\rho+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2}\rho^2+\ldots;\\ H_v&=\frac{\partial H_z}{\partial r}z=\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2}\rho\cdot z+\ldots;\\ H_\theta&=\frac{\partial H_z}{\partial\theta}\cdot\frac{z}{r_0}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial r\cdot\partial\theta}\cdot\frac{\rho\cdot z}{r_0}+\ldots, \end{aligned} \tag{5}$$

где ρ — малое отклонение от r_0 в медианной плоскости;

z — малое отклонение от медианной плоскости.

В силу симметрии магнитных силовых линий (они пересекают медианную плоскость под прямым углом) на медианной плоскости $H_r=H_\theta=0$.

В цилиндрической системе координат (r, Θ, z) движение частицы в магнитном поле определяется уравнениями:

$$\begin{aligned} m(\ddot{r}+r\dot{\theta}^2)&=-\frac{e}{c}(\dot{z}H_\theta-r\dot{\theta}H_z);\\ m(r\ddot{\theta}+z\cdot\dot{r}\dot{\theta})&=\frac{e}{c}(\dot{r}H_z-\dot{z}H_r);\\ m\ddot{z}&=-\frac{e}{c}(\dot{r}H_\theta-r\dot{\theta}H_r), \end{aligned} \tag{6}$$

где H_v, H_θ, H_z — компоненты поля. Знак $(\cdot)$ указывает на дифференцирование по t. Считаем, что в процессе ускорения за время нескольких оборотов частиц поле не изменяется. Скорость частицы v также считаем постоянной. В бетатронах с азимутально-симметричным полем равновесная орбита представляет окружность радиусом R, определяемым из уравнения:

$$mv=\frac{e}{c}R\cdot H_z. \tag{7}$$

Заменив H_z на усредненное поле $\overline{H}_z$ (2), получим усредненный радиус равновесной орбиты:

$$R=\frac{mvc}{e\overline{H}_z(p)}. \tag{8}$$

Равновесную орбиту представим в виде:

$$r=R\,(1+\eta), \tag{9}$$

где R — усредненный радиус равновесной орбиты;
η — отклонение от усредненного радиуса.

В первом приближении с учетом только первой гармоники вариации поля величина η определяется выражением [1]:

$$\eta=\frac{f}{N^2-n-1}\cdot\cos N\theta, \tag{10}$$

где n — усредненный по азимуту градиент поля, равный

$$n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(\theta)\,d\theta. \tag{11}$$

С достаточной степенью точности можно считать.

$$r=R\left(1+\frac{f}{N^2}\cos N\theta\right). \tag{12}$$

Максимальное отклонение от усредненного радиуса равновесной орбиты равно

$$a=\frac{fR}{N^2}. \tag{13}$$

Величину «a» можно назвать потерянной частью апертуры.

По (13) при известной глубине вариации можно определить минимальное количество гребней, если принять, что максимальное отклонение от усредненного радиуса R не должно превышать величины «a».

Для экспериментального бетатрона максимальное отклонение от R при $N=6$, $R=45$ *мм* и $f=0{,}25$ составляет 0,312 *мм*. Можно показать, что колебания частиц относительно замкнутой орбиты описываются уравнением Матье-Хилла [1]:

$$r''=r\,(a_r+2g_r\cos 2\xi)=0;$$
$$z''+z\,(a_z-2g_r\cos 2\xi)=0, \tag{14}$$

где

$$a_r=\frac{4}{N^2}\left[1+n+\frac{3f^2(n+1)}{4N^2}\right];$$

$$2g_r=\frac{4}{N^2}\left[(1{,}5+n)\,f+\frac{2n+n'}{N^2}\,f\right];$$

$$a_z=\frac{4}{N^2}\left\{-n+\frac{1}{2}\,f^2+\frac{f^2}{2N^2}\left[\frac{(n+1)\,n-n'\,[(n'+1)+2n]}{2\,(n+1)}\right]\right\};$$

$$2g_z=\frac{4}{N^2}\left[f\left(n+\frac{2n+n'}{N^2}\right)\right].$$

2ζ определяется из $\theta=\dfrac{2\xi}{N}$ и где $n'=\left.\dfrac{\partial^2\overline{H}_x\cdot R^2}{\partial r^2\,\overline{H}(R)}\right|_{r=R}$.

Из уравнения (14) можно получить приближенное выражение для частот бетатронных колебаний. С достаточной степенью точности их можно принять в виде:

$$\nu_r^2=1+n+\frac{1}{2}f^2\left[\frac{1}{N^2}+\frac{3(n+1)}{2N^2}+\frac{n^2}{N^2}\right]+\frac{1}{2}f\left(R\frac{\partial f}{\partial r}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{2(1+n)}{N^z}+\frac{1}{2N^2}\left(R\frac{\partial f}{\partial r}\right)^z;$$

$$\nu_z^2=-n+\frac{1}{2}f^2\left\{1-\frac{1}{N^2}\left[\frac{2+n}{n}+\frac{2n+n'}{2(n+1)}+\frac{n(n+1)}{N^z}\right]\right\}-$$

$$-\frac{f\cdot\left(R\frac{\partial f}{\partial r}\right)}{N^2}\cdot\left[(n+1)-\frac{2n+n'}{2(n+1)}\right]+\frac{\left(R\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2}{2N^2}. \qquad (15)$$

Так как ν^2 пропорционально фокусирующим силам, то по (15) можно оценить величины фокусирующих сил, действующих на электрон в бетатроне с азимутально-несимметричным полем:

$$F_r=1+n+\frac{f^2}{N^2}(1+n^2)+\frac{3f^2(n+1)}{4N^2}+\ldots;$$

$$F_z=-n+\frac{1}{2}f^2-\frac{f^2}{2N^2}\left[(2+n)+\frac{2n+n'}{2(n+1)}\right]+\ldots \qquad (16)$$

Можно показать, что в случае магнитного поля «спиральной» структуры увеличение фокусирующих сил можно определить по формулам:

$$F_r^c=\frac{f^2N^2\operatorname{tg}^2\gamma}{N^2-4(n+1)}-\frac{f^2N^2\operatorname{tg}^2\gamma}{N^2-(n+1)}\simeq\frac{3(n+1)f^2\operatorname{tg}^2\gamma}{N^2};$$

$$F_z^c=\frac{f^2N^2\operatorname{tg}^2\gamma}{2[N^2+4n]}-\left(-\frac{f^2N^2\operatorname{tg}^2\gamma}{2[N^2-(n+1)]}\right)\simeq f^2\operatorname{tg}^2\gamma. \qquad (17)$$

Формулы (16) и (17) показывают, что увеличение фокусирующей силы в радиальной плоскости незначительно, в то время как в аксиальной плоскости фокусирующая сила увеличивается на $\frac{1}{2}f^z$, что составляет 1—5% от величины фокусирующей силы, действующей в z-плоскости для бетатрона с азимутально-симметричным полем. Добавка за счет «спиральности» поля (17) может составлять также значительную величину. В бетатронах, рассчитанных на небольшие энергии (3—10 *Мэв*), видимо, можно ограничиться радиальными гребнями, так как спиральные полюса при изготовлении более сложны, чем радиальные.

В бетатронах с азимутально-симметричным управляющим полем отношение напряженности магнитного поля на радиусе равновесной орбиты к средней напряженности магнитного поля на радиусе равновесной орбиты, как известно, равно 1:2. Представляет интерес рассмотреть, сохраняется ли это отношение в бетатроне с управляющим полем, обладающим азимутальной вариацией.

В общем виде бетатронный режим ускорения характеризуется следующим уравнением [2]:

$$\frac{d}{dt}[\Pi\cdot\bar{H}_z]=\frac{2\pi S d\langle H_z\rangle}{\Pi\ \ dt}, \qquad (18)$$

где Π— периметр орбиты; S — площадь, охватываемая орбитой; H_z— поле, усредненное вдоль орбиты; $\langle H_z\rangle$ — поле, усредненное по поверхности, охватываемой орбитой.

Поскольку условия должны быть выбраны так, чтобы орбита в процессе ускорения оставалась неизменной, т. е., чтобы $\Pi = \text{const}$, то

$$\frac{d\overline{H}_z}{dt} = \frac{2\pi S}{\Pi^2} \cdot \frac{d<H_z>}{dt}. \tag{19}$$

Поскольку равновесная орбита задана в виде (12), то по известным выражениям можно определить периметр равновесной орбиты и площадь, охватываемую ею. Тогда выражение (19) будет иметь вид:

$$\frac{d\overline{H}_z}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(1+\frac{f}{N^2}\right)^2}{\left[1+\frac{f^2}{4N^2}\left(\frac{11+12n}{2+3n}\right)\right]^2} \cdot \frac{d<H_z>}{dt}. \tag{20}$$

Таким образом, для бетатрона с азимутальной вариацией магнитного поля бетатронное число имеет вид:

$$\frac{\overline{H}_z(t)}{<H_z>(t)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(1+\frac{f}{N^2}\right)^2}{\left[1+\frac{f^2}{4N^2}\left(\frac{11+12n}{2+3n}\right)\right]^2}. \tag{21}$$

Практически

$$\frac{\overline{H}_z(t)}{<H_z>(t)} = \frac{1}{2},$$

так как

$$\frac{\left(1+\frac{f}{N^2}\right)^2}{\left[1+\frac{f^2}{4N^2}\left(\frac{11+12n}{2+3n}\right)\right]^2} \approx 1.$$

Например, для экспериментального бетатрона этот множитель характеризовался величиной

$$\frac{(1{,}007)^2}{(1{,}0045)^2} \simeq 1.$$

На основании проведенных предварительных оценок свойств управляющего поля бетатрона с азимутальной вариацией показана принципиальная возможность бетатронного режима ускорения в подобных конструкциях. Анализ также показал, что фокусирующие свойства таких полей выше, чем в азимутально-симметричных полях, применяемых в обычных бетатронах. Запуск экспериментального бетатрона на излучение подтвердил правильность выводов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Г. Басаргин, В. П. Белов. Некоторые вопросы динамики движения частиц в циклотроне с пространственной вариацией магнитного поля. Электрофизическая аппаратура, № 3, 1965.

2. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев. Теория циклических ускорителей, Физматгиз, 1962.