ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМЕНИ С. М. КИРОВА

Том 230 1972

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ НАДЕЖНОЙ РАБОТЫ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАННЫХ ПРЕДЕЛАХ

Ф. Ф. ИДРИСОВ

(Представлена научным семинаром кафедры автоматики и телемеханики)

Имеем систему автоматического управления (САУ), находящуюся под воздействием случайных помех. Предположим, что изменение выходной координаты системы во времени, характеризующей ее работоспособность, является стационарным процессом с корреляционной функцией $K_u(\tau)=\sigma^2 \exp\{-\alpha|\tau|\}$. Здесь σ^2 — дисперсия, τ — время корреляции.

Требуется определить количественную оценку способности САУ поддерживать свой выходной параметр в пределах $(a, в)$, заданных техническими требованиями, при случайных условиях.

Адекватным математическим аппаратом, описывающим САУ, находящуюся под воздействием случайных помех и имеющую случайные начальные условия, является аппарат уравнений Колмогорова-Планка. Интегралом этих уравнений является плотность вероятности интересующего нас процесса. Но, к сожалению, методы точного решения уравнений Колмогорова-Планка для стационарных процессов пока не получены. Приближенные же методы очень громоздкие в смысле производимой вычислительной работы.

Но в целом ряде встречающихся практических случаев достаточно знать не плотность вероятности случайного процесса, а его моменты распределения, скажем, математическое ожидание. Ниже показывается, как сравнительно просто сведением уравнения Колмогорова-Планка к обыкновенному дифференциальному уравнению и применением к последнему метода Бубнова-Галеркина можно получить аналитическое выражение для математического ожидания процесса.

Итак, следуя методике, изложенной в [I], рассмотрим стационарный непрерывный процесс $U(t)$, который в начальный момент времени $t=0$ принимает значение, равное x. Тогда плотность вероятности $w(y,T/x)$ перехода процессом $U(t)$ из состояния x в состояние y за время T будет удовлетворять следующему уравнению Колмогорова-Планка:

$$\frac{\partial w(y, T/x)}{\partial T}=\frac{\partial[xw(y, T/x)]}{\partial x}+\frac{\partial^2 w(y, T/x)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

при краевых условиях:

$$w(y, 0/x)=\delta(y-x), \tag{2}$$

$$w(a, T/x)=w(b, T/x)=0, \tag{3}$$

где $\delta(y-x)$ — дельта-функция Дирака, $a<x<b$.
Функция

$$Q(T/x)=\int_a^b w(y, T/x)\,dy \tag{4}$$

представляет собой вероятность того, что значения рассматриваемого случайного процесса на интервале времени длительностью T будут находиться внутри отрезка действительной оси $(a, в)$, если в начальный момент его значение принадлежало указанному отрезку. Эта вероятность удовлетворяет очевидным условиям:

$$Q(0/x)=1,\ Q(\infty/x)=0. \tag{5}$$

Вероятность того, что первое достижение границ произойдет на интервале времени, длительность которого не превосходит T, равна $1-Q(T/x)$. Плотность вероятности $q(T/x)$ момента первого достижения границы получается дифференцированием указанной величины по T, т. е.:

$$q(T/x)=-\frac{\partial Q(T/x)}{\partial T}. \tag{6}$$

Используя (6), находим среднее время достижения границ:

$$m_T(x)=\int_0^T Tq(T/x)\,dT=-\int_0^T T\frac{\partial Q(T/x)}{\partial T}\,dT. \tag{7}$$

Имея в виду (5) и интегрируя по частям, получим выражение для среднего времени достижения границ:

$$m_T(x)=\int_0^\infty Q(T/x)\,dT. \tag{8}$$

Проинтегрируем обе части уравнения (1) по y в пределах от a до $в$, а затем по T в пределах от нуля до бесконечности с учетом (4)—(8). Получаем обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами:

$$\frac{d^2 m_T(x)}{dx^2}+x\frac{dm_T(x)}{dx}+m_T(x)=-1, \tag{9}$$

при граничных условиях:

$$m_T(a)=m_n(b)=0. \tag{10}$$

Данное уравнение можно свести к уравнению с начальными условиями и решить через преобразование Лапласа. Но это сравнительно долгий путь, приводящий к громоздким выражениям. Гораздо проще и быстрее можно решить его, если решать методом Бубнова-Галеркина.

Итак, решаем уравнение (9) методом Бубнова-Галеркина.

Предварительно для простоты расчетов примем: $|a|=|b|=1$.

Пусть неизвестная функция $E(x)$, согласно [2], удовлетворяет в некоторой области Ω неоднородному дифференциальному уравнению

$$LE(x)=f(x), \tag{11}$$

где L — оператор, порождающий дифференциальное уравнение и удовлетворяющий некоторым однородным краевым условиям. Выбирается бесконечная последовательность координатных функций $\varphi_i(x)$, $(i=1,n)$, которые достаточное число раз (в соответствии с данными задачи) непрерывно дифференцируемы в замкнутой области $\overline{\Omega}=\Omega+S$ и которые удовлетворяют всем краевым условиям нашей задачи (через S обозначена граница области Ω). Будем считать, что как уравнение (11), так и соответствующие ему краевые условия—линейные. Тогда функция $E_n(x)=$ $=\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)$, где a_k—произвольно выбранные постоянные, удовлетворяет всем краевым условиям задачи. По методу Бубнова-Галеркина коэффициенты a_k определяются из требования, чтобы левая часть уравнения (11) стала после подстановки в нее $U_n(x)$ вместо $E(x)$ ортогональной к функциям $\varphi_i(x)$, $(i=\overline{1,n})$.

Метод Бубнова-Галеркина тем самым приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (L\varphi_k, \varphi_m) = (f, f_m) \quad m=\overline{1, n}, \tag{12}$$

(здесь круглые скобки означают скалярное произведение).

Для нашей задачи в качестве координатных функций можно взять:

$$\varphi_k(x)=\cos\frac{k\pi x}{2}, \text{ где } k=2n+1, \ n=0, 1, 2, \ldots$$

Предложенные функции $\varphi_k(x)$ удовлетворяют поставленным краевым условиям (10). Ограничимся числом членов, для которых $\kappa\leqslant3$. Положим

$$m_T(x) = a_1\cos\frac{\pi x}{2} + a_3\cos\frac{3\pi x}{2}. \tag{13}$$

Построим систему алгебраических уравнений, связывающих коэффициенты a_k по формуле (12):

$$\left.\begin{aligned} a_1\left(1-\frac{\pi^2}{4}\right)-a_3\frac{3}{2\pi} &= -\frac{4}{\pi} \\ -a_1\cdot\frac{1}{4}+a_3\left(\frac{3}{2}-\frac{9\pi^2}{4}\right) &= -\frac{4}{3\pi} \end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

Отсюда

$$a_1=0{,}86; \quad a_3=0{,}1.$$

Итак,

$$m_T(x)=0{,}86\cos\frac{\pi x}{2}+0{,}1\cos\frac{3\pi x}{2}.$$

Выводы. Замерив значение выходного параметра системы автоматического управления в произвольный момент времени, можно сравнительно просто определить среднее время достижения параметром заданных границ, т. е. определить, другими словами, среднее время надежной работы системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Р. Левин. «Теоретические основы статической радиотехники», т. 1. Изд-во «Советское радио», М., 1966 г.

2. С. Г. Михлин. «Вариационные методы в математической физике». Гостехиздат, М., 1957 г.