

РАСЧЕТ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Р. Г. ЗИЯКАЕВ, А. В. ОВЧИННИКОВ

(Представлена семинаром лаборатории высоких энергий НИИ ЯФЭА)

При изучении движения релятивистских электронов в группирователях, в установках для генерирования миллиметровых и субмиллиметровых волн, в однорезонаторных ускорителях и т. д. необходимо решать уравнение

$$\omega \frac{dmv}{dx} = eE_0 \sin x, \quad (1)$$

где ω — угловая частота электрического поля,

$x = \omega t$ — текущая фаза напряжения.

E_0 — напряженность электрического поля,

При ускорении электронов цилиндрическим резонатором, в котором возбуждается волна типа E_{010} , уравнения движения электронов также можно свести к уравнению (1), в случае, когда радиус электронного пучка много меньше радиуса резонатора [1] и уравнение (1) можно записать для этого случая в виде

$$\omega \frac{dmv}{dx} \approx \frac{eU_0}{h} \sin x, \quad (2)$$

где h — высота резонатора;

U_0 — амплитудное значение напряжения вдоль оси резонатора.

Интегрирование уравнения (2) приводит к уравнению

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}} + \left(\frac{eU_0}{m_0 c^2} \right) \left(\frac{\lambda}{2\pi h} \right) (\cos x_0 - \cos x) = A(x), \quad (3)$$

где $\beta = v/c$ — отношение скорости электрона к скорости света;

$\beta_0 = v_0/c$ — отношение начальной скорости электрона к скорости света;

$E_0 = m_0 c^2$ — энергия покоя электрона;

λ — длина волны в резонаторе;

x_0 — фаза влета электрона в резонатор.

Для определения фазы вылета электрона из резонатора надо решить уравнение:

$$\frac{\omega h}{c} - \int_{x_0}^x \frac{A}{\sqrt{1+A^2}} dx = 0, \quad (4)$$

где неизвестная фаза вылета x является верхним пределом интегрирования.

Для значения x , которое получается при решении уравнения (4), обычно требуется знать величину $\beta = v/c$ и значение кинетической энергии электрона, которые определяются по формулам

$$\beta = \frac{A(x)}{\sqrt{1+A^2(x)}} \quad (5)$$

$$\text{и } T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right), \quad (6)$$

где T — кинетическая энергия электрона в момент вылета из резонатора.

Ниже приводится алгоритм для решения уравнения (4), к которому сводится уравнение (1). Алгоритм записан на входном языке альфа-транслятора [2].

Описание алгоритма

Запишем уравнение (4) в виде

$$g - \int_{x_0}^{x_0-g} \frac{A}{\sqrt{1+A^2}} dx - \int_{x_0+g}^x \frac{A}{\sqrt{1+A^2}} dx = 0, \quad (7)$$

где $g = \omega h/c$ — угол пролета расстояния h электронами, движущимися со скоростью света.

Первый интеграл уравнения (7) считается один раз, и к нему добавляются значения интегралов на следующих промежутках длиной π_1 до тех пор, пока левая часть уравнения (5) не станет меньше 0. Как только это будет достигнуто, последний промежуток интегрирования длиной π_1 разбивается на две части и вычисляется интеграл на меньшем промежутке. Разбиение последнего промежутка продолжается до тех пор, пока значение x не будет определено с заданной точностью m .

Значение угла вылета x определяется для диапазонов углов влета от x_1 до x_2 с шагом π . Если время нахождения электрона в поле больше 2π , то счет этого варианта прекращается и начинается счет для нового значения угла влета.

В программе должны быть заданы численные значения следующим величинам:

$$a = \frac{\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \text{ и } b = \left(\frac{eU}{m_0 c^2} \right) \left(\frac{\lambda}{2\pi h} \right) -$$

коэффициенты в уравнении (3):

x_1, x_2 — нижний и верхний пределы значений углов влета;

$g = \omega h/c$ — угол пролета расстояния h электронами, движущимися со скоростью света;

m — абсолютная точность определения углов вылета.

С перфокарт вводятся численные значения величин a, b, π, π_1 ,

где a и b — коэффициенты уравнения (3);

π — шаг, с которым задаются значения углов влета;

π_1 — начальный шаг для поиска углов вылета.

НАЧАЛО ЦЕЛЫЙ и; МАССИВ к [1:4];
 ВЕЩЕСТВ а, в, х₀, х, ш, ш1, с, п, И, г, Л, бета, Т;
 ВЕЩЕСТВ ПРОЦЕД А (х);
 А:=а+вх (cos (х₀) — cos (х));
 ВЕЩЕСТВ ПРОЦЕД ф (х);
 {веществ р; р:=А (х); ф:=р/sgrt (1+р↑2)}
 М: ввод (к); вывод (к); (а, в, ш, ш1):=к[];
 ДЛЯ х₀:=х1 ШАГ ш ДО х² ЦИКЛ
 НАЧАЛО х:=х₀+д;
 ИКРОН (х₀, х, .01, .1, ф, 0, п, И);
 г:=0; с:=ш1;
 М1: Л:=д—И—г;
 ЕСЛИ (Л<0) ∧ (с<м) ТО НА М3;
 М2: ЕСЛИ х—х₀>6.3 ТО НА М4;
 ИКРОН (х, х+с, .01, .1, ф, 0, п, г);
 ЕСЛИ И+г<д ТО
 {И:=И+г; х:=х+с; НА М2)
 с:=с/2; НА М1;
 М3: бета:=ф (х);
 Т:=.51098х(1/Sgrt(1—бета↑2) —1);
 вывод (х₀, х, бета, Т);
 М4: КОНЕЦ; вывод (ИСТИНА); НА М;
 КОНЕЦ*

Описание процедуры ИКРОН

Чтобы не затруднять чтение программы, данная процедура и ее описание приводятся отдельно от основной программы. В связи с тем, что большая часть времени тратится на вычисление интегралов, были приняты меры для уменьшения времени просчета интегралов. Разработанный алгоритм пригоден для вычисления интегралов вида

$$I = \int_a^b \Phi(x) d(x) \quad (8)$$

и рекомендуется для негладких функций $\Phi(x)$.

На величины a и b не накладывается никаких ограничений, возможны случаи $a > b$, $b = a$, $b < a$. Вычисление интеграла производится с использованием «больших квадратурных формул» [4]

$$I = \sum_{k=0}^{m-1} H_k \sum B_i \Phi(a_{rk} + H_k Y_i) + R, \quad (9)$$

где $H_i = a_{ri+1} - a_{ri}$ — шаг интегрирования;

R — погрешность вычислений.

Узлы и веса основной и уточняющей квадратур брались из работы [3], порядок квадратурных формул был подобран экспериментально и равен четырем.

Оператор обращения к процедуре имеет вид ИКРОН (а, в, м, н, ф, т, п, И),

где а и в — пределы интегрирования;

м — минимально допустимый шаг интегрирования;

н — начальный шаг интегрирования;
 ф — подынтегральное выражение, описанное в программе как вещественная процедура;
 т — требуемая абсолютная погрешность вычисления интеграла;
 п — переменная, которой присваивается значение абсолютной погрешности, полученной в результате вычислений, т. е. фактическая абсолютная погрешность;

И — значение интеграла.

В данной процедуре уменьшение времени вычислений происходит за счет уточняющих квадратур [3], неравномерного распределения погрешности на промежутке интегрирования и за счет автоматического выбора шага. На каждом промежутке интегрирования подсчитывается текущая требуемая абсолютная погрешность вычислений T_{Tk} и фактическая погрешность вычислений $T_{фk}$, которая равна модулю разности значений интегралов на этом промежутке, вычисленных по 5 и 9 точкам. Если для двух соседних интегралов Φ_{k+1} и Φ_k $T_{фk} < T_{Tk}$, то шаг H_k удваивается. Если же $T_{фk} > T_{Tk}$, то шаг уменьшается вдвое, и интеграл Φ_k , подсчитанный с большей ошибкой, пересчитывается вновь. Уменьшение шага происходит только в том случае, если он не меньше, чем минимально допустимый шаг (т. е. всегда $H > M$), в противном случае вычисления ведутся с полученным минимальным шагом.

ПРОЦЕДУРА ИКРОН (а, в, м, н, ф, т, п, И),

ЗНАЧЕНИЕ а, в, м, т,

НАЧАЛО ВЕЩЕСТВ у, тп, с1, с2, с3, ат, вт, тт, тф, Л, г;

ЦЕЛЫЙ к; ЛОГИЧЕСКОЕ Т; МАССИВ У, В, Б [1:9];

Т := ЛОЖЬ; Л := н; У [1] := .01179874;

У [2] := .069431844; У [3] := .179856891;

У [4] := .330009478; У [5] := .5;

[6] := .669990521; У [7] := .820143108;

У [8] := .930568155; У [9] := .988280125;

В [1] := В [3] := В [5] := В [7] := В [9] := 0;

В [2] := .173927422; В [4] := .326072577;

В [6] := В [4]; В [8] := В [2];

Б [1] := Б [9] := .031488686;

Б [2] := Б [8] := .085026802;

В [3] := Б [7] := .133399170;

Б [4] := Б [6] := .163474594;

Б [5] := .173221490;

ЕСЛИ $v > a$, ТО $г := 1$ ИНАЧЕ

ЕСЛИ $v < a$, ТО { $г := a$; $a := v$; $v := г$; $г := -1$ } ИНАЧЕ

{ $п := И := 0$; НА М4};

П := 0; с1 := 0; вт := а; тп := т/(в—а);

М1: ЕСЛИ вт=в, ТО НА М2 ИНАЧЕ ат:=вт;

М3: вт:=ат+Л;

ЕСЛИ $вт \geq v$, ТО {Л:=в—ат; вт:=в};

тт:=тп×Л; с2:=с3:=0;

ДЛЯ к:=1, ..., 9 ЦИКЛ

НАЧАЛО у:=ф (ат+Л×У [к]);

с2:=с2+у×В[к]; с3:=с3+у×В[к];

КОНЕЦ;

с2:=с2×Л; с3:=с3×Л; тф:=abs(с3—с2);

ЕСЛИ тф>тт, ТО

НАЧАЛО ЕСЛИ $л/2 > M$, ТО {Л:=л/2; НА М3} ИНАЧЕ

НАЧАЛО тп:=ЕСЛИ $т - п - тф > 0$, ТО

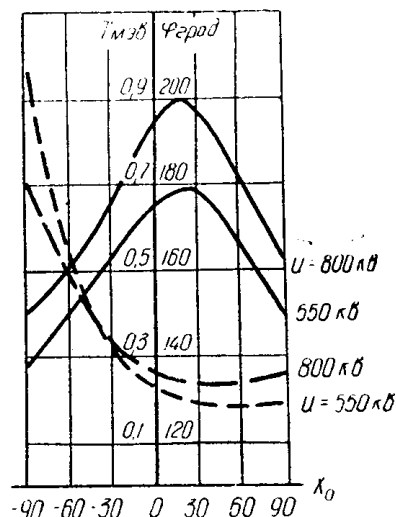
(ЕСЛИ $v - вт > 0$, ТО $(т - п - тф)/(v - вт)$)

ИНАЧЕ тп) ИНАЧЕ 0
 КОНЕЦ;
 КОНЕЦ; $\pi := \pi + \tau\phi$;
 ЕСЛИ $T - \tau\phi < \tau\tau$, ТО $L := 2 \times L$;
 $T := \tau\tau - \tau\phi > 0$; $c1 := c1 + c3$; НА M1;
 M2: $I := c1 \times r$;
 M4:
 КОНЕЦ.

Результаты вычислений

Результаты вычислений по данной программе приведены на рис. 1. Расчет проводился для электронов с начальной кинетической энергией 250 Кэв, влетающих в электрическое поле с $\lambda = 11$ см и расстоянием между электродами 3, 4 см. Область углов влета χ_0 менялась от $-\pi/2$ до $+\pi/2$ с шагом 10° . На рис. 1 приведена зависимость угла пролета $\phi = \chi - \chi_0$ и кинетической энергии T на выходе из поля от угла влета χ_0 для разных значений амплитуды напряжения между электродами U .

Рис. 1. Зависимость кинетической энергии T (сплошная линия) на выходе ускоряющего промежутка и угла пролета ϕ от угла влета χ_0 для $h=3,4$ см, $\lambda=11$ см, $\beta_0=0,740$ для различных значений напряжения U вдоль оси ускоряющего промежутка.



При напряжении $U=800$ кВ разброс по энергиям $\Delta T = 0,1 T_{\max}$ имеют электроны, влетающие в диапазоне входных углов от -8 до $+53^\circ$. Если ток пушки на энергию 250 кВ непрерывный и равен I , то ток на выходе ускоряющей системы для данного ΔT будет равен $0,169 I$.

Для значений напряжения 550, 350, 250 кВ значения токов на выходе будут 0,186; 0,200; 0,213 I соответственно.

В заключение авторы считают своей приятной обязанностью выразить благодарность Чучалину И. П. за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сб. «Миллиметровые и субмиллиметровые волны». Под редакцией Р. Г. Мирманова, М., ИЛ, 1959.
2. Система Альфа. Под редакцией А. П. Ершова. М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1965.
3. А. С. Кронрод. Узлы и веса квадратурных формул. М., «Наука», 1964.
4. Я. С. Дымарский, Н. Н. Лозинский [и др.]. Справочник программиста. Т. 1, 2. Л., Судпромгиз, 1963, 1964.