ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 232 1975

РАСЧЕТ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Р. Г. ЗИЯКАЕВ, А. В. ОВЧИННИКОВ

(Представлена семинаром лаборатории высоких энергий НИИ ЯФЭА)

При изучении движения релятивистских электронов в группирователях, в установках для генерирования миллиметровых и субмиллиметровых волн, в однорезонаторных ускорителях и т. д. необходимо решать уравнение

$$\omega\frac{dmv}{dx}=eE_0\sin x, \tag{1}$$

где ω — угловая частота электрического поля,

$x=\omega t$ — текущая фаза напряжения.

E_0 — напряженность электрического поля,

При ускорении электронов цилиндрическим резонатором, в котором возбуждается волна типа E_{010}, уравнения движения электронов также можно свести к уравнению (1), в случае, когда радиус электронного пучка много меньше радиуса резонатора [1] и уравнение (1) можно записать для этого случая в виде

$$\omega\frac{dmv}{dx}\approx\frac{eU_0}{h}\sin x, \tag{2}$$

где h — высота резонатора;

U_0 — амплитудное значение напряжения вдоль оси резонатора.

Интегрирование уравнения (2) приводит к уравнению

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}}+\left(\frac{eU_0}{m_0c^2}\right)\left(\frac{\lambda}{2\pi h}\right)(\cos x_0-\cos x)=A(x), \tag{3}$$

где $\beta=v/c$ — отношение скорости электрона и скорости света;

$\beta_0=v_0/c$ — отношение начальной скорости электрона к скорости света;

$E_0=m_0c^2$ — энергия покоя электрона;

λ — длина волны в резонаторе;

x_0 — фаза влета электрона в резонатор.

Для определения фазы вылета электрона из резонатора надо решить уравнение:

$$\frac{\omega h}{c}-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{A}{\sqrt{1+A^2}}dx=0, \qquad (4)$$

где неизвестная фаза вылета x является верхним пределом интегрирования.

Для значения x, которое получается при решении уравнения (4), обычно требуется знать величину $\beta=v/c$ и значение кинетической энергии электрона, которые определяются по формулам

$$\beta=\frac{A(x)}{\sqrt{1+A^2(x)}} \qquad (5)$$

$$\text{и}\quad T=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right), \qquad (6)$$

где T — кинетическая энергия электрона в момент вылета из резонатора.

Ниже приводится алгоритм для решения уравнения (4), к которому сводится уравнение (1). Алгоритм записан на входном языке альфа-транслятора [2].

Описание алгоритма

Запишем уравнение (4) в виде

$$g-\int\limits_{x_0}^{x_0-g}\frac{A}{\sqrt{1+A^2}}dx-\int\limits_{x_0+g}^{x}\frac{A}{\sqrt{1+A^2}}dx=0, \qquad (7)$$

где $g=\omega h/c$ — угол пролета расстояния h электронами, движущимися со скоростью света.

Первый интеграл уравнения (7) считается один раз, и к нему добавляются значения интегралов на следующих промежутках длиной $ш_1$ до тех пор, пока левая часть уравнения (5) не станет меньше 0. Как только это будет достигнуто, последний промежуток интегрирования длиной $ш_1$ разбивается на две части и вычисляется интеграл на меньшем промежутке. Разбиение последнего промежутка продолжается до тех пор, пока значение x не будет определено с заданной точностью м.

Значение угла вылета x определяется для диапазонов углов влета от x_1 до x_2 с шагом ш. Если время нахождения электрона в поле больше 2π, то счет этого варианта прекращается и начинается счет для нового значения угла влета.

В программе должны быть заданы численные значения следующим величинам:

$$a=\frac{\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}}\quad\text{и}\quad b=\left(\frac{eU}{m_0c^2}\right)\left(\frac{\lambda}{2\pi h}\right)-$$

коэффициенты в уравнении (3):

x_1, x_2 — нижний и верхний пределы значений углов влета;

$g=\omega h/c$ — угол пролета расстояния h электронами, движущимися со скоростью света;

м — абсолютная точность определения углов вылета.

С перфокарт вводятся численные значения величин а, в, ш, $ш_1$, где а и в — коэффициенты уравнения (3);

ш — шаг, с которым задаются значения углов влета;

$ш_1$ — начальный шаг для поиска углов вылета.

```
НАЧАЛО ЦЕЛЫЙ и; МАССИВ к [1:4];
      ВЕЩЕСТВ а, в, хо, х, ш, ш 1, с, п, И, г, Л, бета, Т;
      ВЕЩЕСТВ ПРОЦЕД А (х);
      А:=а+вх (cos (хо) — cos (х));
      ВЕЩЕСТВ ПРОЦЕД ф (х);
      {веществ р; р:=А (х); ф:=р/sgrt (1+р↑2)}
М:    ввод (к); вывод (к); (а, в, ш, ш1):=к[ ];
        ДЛЯ хо:=х1 ШАГ ш ДО х² ЦИКЛ
          НАЧАЛО х:=хо+д;
            ИКРОН (хо, х,·01,·1, ф, 0, п, И);
              г:=0; с:=ш1;
М1:               Л:=д—И—г;
                    ЕСЛИ (Л<0)∧(с<м) ТО НА М3;
М2:                   ЕСЛИ х—хо>6.3 ТО НА М4;
                     ИКРОН (х, х+с,·01,·1, ф, о, п, г);
                       ЕСЛИ И+г<д ТО
                       {И:=И+г; х:=х+с; НА М2)
                         с:=с/2; НА М1;
М3                        бета:=ф (х);
                    Т:=·51098х(1/Sgrt(1—бета↑2) —1);
                                вывод (хо, х, бета, Т);
М4:        КОНЕЦ; вывод (ИСТИНА); НА М;
КОНЕЦ*
```

Описание процедуры ИКРОН

Чтобы не затруднять чтение программы, данная процедура и ее описание приводятся отдельно от основной программы. В связи с тем, что большая часть времени тратится на вычисление интегралов, были приняты меры для уменьшения времени просчета интегралов. Разработанный алгоритм пригоден для вычисления интегралов вида

$$I=\int_{a}^{b}\Phi(x)d(x) \tag{8}$$

и рекомендуется для негладких функций Ф (x).

На величины a и b не накладывается никаких ограничений, возможны случаи $a>b$, $b=a$, $b>a$. Вычисление интеграла производится с использованием «больших квадратурных формул» [4]

$$I=\sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{H}_k\sum \mathrm{B}_i\Phi(a_{Tk}+\mathrm{H}_k У_i)+R, \tag{9}$$

где $\mathrm{H}_i=a_{Ti+1}-a_{Ti}$ —шаг интегрирования;

R — погрешность вычислений.

Узлы и веса основной и уточняющей квадратур брались из работы [3], порядок квадратурных формул был подобран экспериментально и равен четырем.

Оператор обращения к процедуре имеет вид ИКРОН (а, в , м, н, ф, т, п, И),

где а и в — пределы интегрирования;

м — минимально допустимый шаг интегрирования;

н — начальный шаг интегрирования;

ф — подынтегральное выражение, описанное в программе как вещественная процедура;

т — требуемая абсолютная погрешность вычисления интеграла;

п — переменная, которой присваивается значение абсолютной погрешности, полученной в результате вычислений, т. е. фактическая абсолютная погрешность;

И — значение интеграла.

В данной процедуре уменьшение времени вычислений происходит за счет уточняющих квадратур [3], неравномерного распределения погрешности на промежутке интегрирования и за счет автоматического выбора шага. На каждом промежутке интегрирования подсчитывается текущая требуемая абсолютная погрешность вычислений $Т_{Т_k}$ и фактическая погрешность вычислений $Т_{фk}$, которая равна модулю разности значений интегралов на этом промежутке, вычисленных по 5 и 9 точкам. Если для двух соседних интегралов $Ф_{k+1}$ и $Ф_k$ $Т_{фk}<Т_{Tk}$, то шаг $Н_k$ удваивается. Если же $Т_{фk}>Т_{Tk}$, то шаг уменьшается вдвое, и интеграл $Ф_k$, подсчитанный с большей ошибкой, пересчитывается вновь. Уменьшение шага происходит только в том случае, если он не меньше, чем минимально допустимый шаг (т. е. всегда $Н>М$), в противном случае вычисления ведутся с полученным минимальным шагом.

```
     ПРОЦЕДУРА ИКРОН (а, в, м, н, ф, т, п, И),
     ЗНАЧЕНИЕ а, в, м, т,
     НАЧАЛО ВЕЩЕСТВ у, тп, с1, с2, с3, ат, вт, тт, тф, Л, г;
        ЦЕЛЫЙ к; ЛОГИЧЕСКОЕ Т; МАССИВ У, В, Б [1:9];
           Т:=ЛОЖЬ; Л:=н; У [1]:=·01179874;
                       У[2]:=·069431844; У[3]:=·179856891;
           У[4]:=·330009478; У[5]:=·5;
           [6]:=·669990521; У [7]=·820143108;
           У [8]:·930568155; У [9]:=·988280125;
           В[1]:=В[3]:=В[5]:=В[7]:=В[9]:=0;
           В[2]:=·173927422; В[4]:=·326072577;
           В [6]:=В [4]; В [8]:=В [2];
           Б[1]:=Б[9]:=·031488686;
           Б[2]:=Б[8]:=·085026802;
           В [3]:=Б [7]:=·133399170;
           Б[4]:=Б[6]:=·163474594;
           Б[5]:=·173221490;
           ЕСЛИ в>а, ТО г:=1 ИНАЧЕ
          ЕСЛИ в<а, ТО {г:=а; а:=в; в:=г; г:=—1} ИНАЧЕ
           {п:=И:=0; НА М4};
     П:=0; с1:=0; вт:=а; тп:=т/(в—а);
М1:   ЕСЛИ вт=в, ТО НА М2 ИНАЧЕ ат:=вт;
М3:   вт:=ат+Л;
     ЕСЛИ вт≥в, ТО {Л:=в — ат; вт:=в};
     тт:=тп×Л; с2:=с3:=0;
     ДЛЯ к:=1, ..., 9 ЦИКЛ
        НАЧАЛО у:=ф (ат+Л×У [к]);
                    с2:=с2+у×В[к]; с3:=с3+у×В[к];
        КОНЕЦ;
              с2:=с2×Л; с3:=с3×Л; тф:=abs(с3 — с2);
                                   ЕСЛИ тф>тт, ТО
        НАЧАЛО ЕСЛИ Л/2>М, ТО {Л:=Л/2; НА М3} ИНАЧЕ
              НАЧАЛО тп:=ЕСЛИ т — п — тф>0, ТО
        (ЕСЛИ в — вт>0, ТО (т — п — тф)/(в — вт)
```

```
        ИНАЧЕ тп) ИНАЧЕ 0
    КОНЕЦ;
    КОНЕЦ; п:=п+тф;
    ЕСЛИ Т   тф<тт, ТО Л:=2×Л;
      Т:=тт—тф>0; с1:=с1+с3; НА М1;
М2:   И:=с1×г;
М4:
КОНЕЦ.
```

Результаты вычислений

Результаты вычислений по данной программе приведены на рис. 1. Расчет проводился для электронов с начальной кинетический энергией 250 *Кэв,* влетающих в электрическое поле с $\lambda = 11$ *см* и расстоянием между электродами 3, 4 *см.* Область углов влета x_0 менялась от $-\pi/2$ до $+\pi/2$ с шагом 10°. На рис. 1 приведена зависимость угла пролета $\varphi = x - x_0$ и кинетической энергии Т на выходе из поля от угла влета x_0 для разных значений амплитуды напряжения между электродами U.

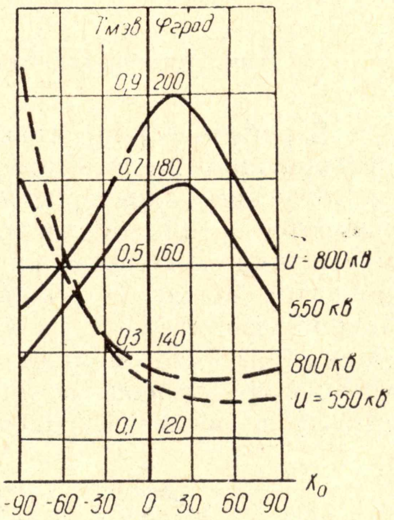

Рис. 1. Зависимость кинетической энергии Т (сплошная линия) на выходе ускоряющего промежутка и угла пролета φ от угла влета x_0 для $h = 3{,}4$ *см*, $\lambda = 11$ *см*, $\beta_0 = 0{,}740$ для различных значений напряжения U вдоль оси ускоряющего промежутка.

При напряжении $U = 800$ *кв* разброс по энергиям $\Delta T = 0{,}1 T_{max}$ имеют электроны, влетающие в диапазоне входных углов от -8 до $+53°$. Если ток пушки на энергию 250 *кв* непрерывный и равен I, то ток на выходе ускоряющей системы для данного ΔT будет равен 0,169 I.

Для значений напряжения 550, 350, 250 *кв* значения токов на выходе будут 0,186; 0,200; 0,213 I соответственно.

В заключение авторы считают своей приятной обязанностью выразить благодарность Чучалину И. П. за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сб. «Миллиметровые и субмиллиметровые волны». Под редакцией Р. Г. Мириманова, М., ИЛ, 1959.

2. Система Альфа. Под редакцией А. П. Ершова. М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1965.

3. А. С. Кронрод. Узлы и веса квадратурных формул. М., «Наука», 1964.

4. Я. С. Дымарский, Н. Н. Лозинский [и др]. Справочник программиста. Т. 1, 2. Л., Судпромгиз, 1963, 1964.