

- осложненных условиях путем применения магнитных устройств // Нефтяное хозяйство. – 1997. – № 7. – С. 46–47.
5. Пивоварова Н.А., Унгер Ф.Г., Туманян Б.П. Влияние обработки постоянным магнитным полем на парамагнитную активность нефтяных систем // Химия и технология топлив и масел. – 2002. – № 1. – С. 30–32.
 6. Лесин В.И., Дюнин А.Г., Хавкин А.Я. Изменение физико-химических свойств водных растворов под влиянием электромагнитного поля // Журнал физической химии. – 1993. – Т. 67. – № 7. – С. 1561–1562.
 7. Борсуцкий З.Р., Ильясов С.Е. Исследования механизма магнитной обработки нефтей на основе результатов лабораторных и промысловых испытаний // Нефтепромысловое дело. – 2002. – № 8. – С. 28–37.
 8. Пат. 2153126 РФ. МКИ² C01F 111/22. Устройство для защиты трубопроводов от коррозии / В.М. Кондаков, А.Н. Качуровский, А.Л. Бушковский, В.А. Кольцов, Л.В. Прасс, В.Н. Лялин. Заявлено 28.09.1998; Опубл. 20.07.2000, Бюл. № 20. – 16 с.: 7 ил.
 9. Спектроскопия оптического смешения и корреляция фотонов / Под ред. Г. Камминса, Э. Пайка. – М.: Мир, 1978. – 574 с.
 10. Посадов И.А., Поконова Ю.В. Структура нефтяных асфальтенов. – Л.: ЛТИ, 1977. – 76 с.
 11. Лоскутова Ю.В., Юдина Н.В. Влияние постоянного магнитного поля на реологические свойства высокопарафинистых нефтей // Коллоидный журнал. – 2003. – Т. 65. – № 4. – С. 510–515.
 12. Лоскутова Ю.В., Юдина Н.В. Реологическое поведение нефтей в магнитном поле // Инженерно-физический журнал. – 2006. – Т. 79. – № 1. – С. 102–110.
 13. Лоскутова Ю.В. Влияние магнитного поля на реологические свойства нефтей: Дис. ... канд. хим. наук. – Томск, 2003. – 144 с.

УДК 533.6.011

О ВЫБОРЕ ФУНКЦИОНАЛА ДЛЯ ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

В.М. Галкин

Томский политехнический университет
E-mail: vlg@tpu.ru

Рассматривается численное решение прямым методом вариационной задачи о построении сверхзвукового сопла с равномерным потоком на выходе. Предложен способ выбора минимизируемого функционала. Проведено сравнение с результатом, полученным другим методом.

1. Введение

Известно, что если возможна численная (программная) реализация некоторой задачи, то эта реализация может быть сделана неединственным способом. В этом смысле не являются исключением и прямые численные методы решения вариационных задач, когда решение получается в результате минимизации определенного функционала. При этом для класса вариационных задач, к числу которых относятся и газодинамические задачи, некоторые численные реализации могут приводить к тому, что область определения будет являться неодносвязным множеством.

В качестве характерного примера рассмотрим задачу, решаемую прямым методом, о численном построении сверхзвукового сопла с равномерным потоком на выходе. Отметим, что к этому близка задача о сопле максимальной тяги [1]. Пусть в некотором сопле, профиль которого определяется варьируемыми переменными, рассчитывается поле течения, а по найденному полю вычисляется функционал, характеризующий неравномерность потока на выходе из сопла и имеющий минимальное значение тогда, когда поток равномерный.

В основу численной реализации указанной задачи могут быть положены два основных подхода. Первый использует тот факт, что поток остается

сверхзвуковым и возможно использование простых в реализации и быстрых в расчете маршевых схем; второй подход допускает существование дозвуковых течений и, соответственно, требуется применение гораздо более сложных и более медленных численных методов. Пусть в основу первой численной реализации положен метод характеристик [2]. Тогда очевидно, что если в некоторых контурах не будет реализовываться полностью сверхзвуковое течение, то это приведет к аварийному останову (авосту). Следствием этого будет неодносвязность области определения, поскольку функционал, использующий параметры потока на выходе из сопла, вычислить нельзя. Второй подход, учитывающий появление дозвукового течения и использующий, например, метод установления и схему Годунова [3], лишен этого недостатка, однако интеллектуальные и временные затраты по сравнению с методом характеристик возрастают на порядок.

В работе [4] наряду с методом характеристик, позволяющим быстро получать решение, предложен функционал, который, в частности, использует значения параметров течения, найденные на каждой характеристике C^* . Это позволяет даже при наличии авостов продолжить функционал на односвязную область.

В данной статье, которая является развитием работы [4], предлагается вычислять функционал

$$\begin{cases} \frac{y_3^j - y_2}{x_3^j - x_2} = \operatorname{tg}(\theta_{23} - \alpha_{23}), \\ \frac{y_3^j - y_1}{x_3^j - x_1} = \operatorname{tg}(\theta_{13} + \alpha_{13}), \\ \theta_3^j - \theta_1 + \frac{\cos^2 \alpha_{13}}{(\gamma + 1)/2 - \cos^2 \alpha_{13}} (\alpha_3^j - \alpha_1) + \\ + \frac{\sin \alpha_{13} \sin \theta_{13}}{y_{13} \cos(\theta_{13} + \alpha_{13})} (x_3^j - x_1) = 0, \\ \theta_3^j - \theta_2 - \frac{\cos^2 \alpha_{23}}{(\gamma + 1)/2 - \cos^2 \alpha_{23}} (\alpha_3^j - \alpha_2) - \\ - \frac{\sin \alpha_{23} \sin \theta_{23}}{y_{23} \cos(\theta_{23} - \alpha_{23})} (x_3^j - x_2) = 0, \end{cases}$$

здесь $j=1,2,\dots$ – номер итерации. Обозначим $p=\alpha, \theta, x, y$, тогда $p_{13}=(p_1+p_3^{j-1})/2$, $p_{23}=(p_2+p_3^{j-1})/2$. Полученная система решалась итерационно до выполнения условия $\max |p_3^j - p_3^{j-1}| < 10^{-8}$. На начальной итерации полагалось $p_3^0=(p_1+p_2)/2$. Так как на оси $\theta=0$, $y=0$, а на стенке $\theta=\arctg(f'(x))$ и $y=f(x)$, то в данной системе уравнений производились очевидные упрощения.

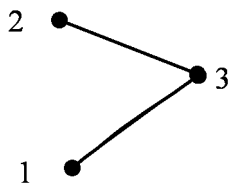


Рис. 2. Схема расчета: 13 – отрезок характеристики C_1^+ ; 23 – отрезок характеристики C_2

Таким образом, от оси к стенке, по известной характеристике C_i^+ рассчитывается следующая характеристика C_{i+1}^+ , где индексы i и $i+1$ – порядковые номера вычисляемых характеристик. Расчет производится до тех пор, пока очередная характеристика C_i^+ не приходит в точку «б». В качестве начальных условий используются $\theta_m=0$ и $M_m=1,001$ на начальной характеристике ae . Такие начальные условия достаточно часто применяют вместо плоской звуковой линии [5]. Отметим, что для вычисления интегралов использовалась формула трапеции.

Выбор функционала. В [4] использовался функционал, который рассчитывался вдоль характеристики (рис. 1):

$$J = \sqrt{\int_c^b \theta^2 dl}. \quad (5)$$

Если при вычислении характеристики C_{i+1}^+ происходил авост, то формула (5) заменялась выражением:

$$J = (x_b - x_i) + \sqrt{\int_k^l \theta^2 dl} + \int_a^b \varphi(x) dx, \quad \varphi(x) = \begin{cases} |f(x)|, & f'(x) < 0 \\ 0, & f'(x) \geq 0 \end{cases}, \quad (6)$$

где первый интеграл вычислялся вдоль последней рассчитанной характеристики C_i^+ , а второй – суммировал площадь участков контура сопла с отрицательными углами наклона. Если авост произошел при расчете характеристики C_1^+ , то $x_i=0$ и $\theta=0$ вдоль начальной характеристики C_2^+ . В результате функционал (6) приобретает вид:

$$J = x_b + \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (7)$$

Как видно, способ вычисления функционала (5–7), предложенный в [4], достаточно сложен. И, кроме этого, замена формулы (5) на формулу (6) приводит к тому, что функционал, сохраняя непрерывность, в общем случае может стать недифференцируемым.

В данной работе предлагается другой подход. Рассмотрим два функционала

$$J_1 = \sqrt{\frac{1}{L} \int_{C_i^+} \theta^2 dl}, \quad J_2 = \sqrt{\frac{1}{L} \int_{C_i^+} ((\alpha - \alpha_0)/\alpha_m)^2 dl}, \quad L = \int_{C_i^+} dl, \quad (8)$$

которые вычисляются вдоль произвольной характеристики C_i^+ . Выбор функционалов (8) обусловлен следующими соображениями.

Пусть сопло с известным M_0 удовлетворяет условиям задачи. Тогда, как видно на рис. 3, первый функционал из (8) имеет два минимума $J_1=0$. Первому минимуму на характеристике ae соответствует $\theta=0$ и $\alpha_m=\arcsin(1/M_m)$. Второму минимуму на характеристике cb соответствует $\theta=0$ и $\alpha_0=\arcsin(1/M_0)$. Как следует из уравнений (1), только второй минимум является необходимым и достаточным условием решения задачи. Очевидно, что использование первого функционала не гарантирует единственности решения.

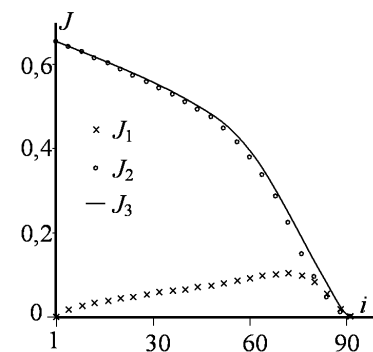


Рис. 3. Значение функционалов вдоль характеристик C_i^+ , i – номер характеристики

Второй функционал из (8), в отличие от первого, имеет единственный минимум $J_2=0$ на характеристике cb (рис. 3), чему соответствует $\alpha=\alpha_0$. Однако этот минимум является необходимым, но не достаточным условием решения задачи, поскольку может не выполняться условие $\theta=0$. Комбинация J_1 и J_2 дает следующий функционал:

$$J_3 = \sqrt{\frac{1}{L} \int_{c_i^*} [((\alpha - \alpha_0)/\alpha_{in})^2 + \theta^2] dl}. \quad (9)$$

который имеет единственный минимум $J_3=0$ на характеристике cb (рис. 3). Так как этот минимум является необходимым и достаточным условием решения задачи и ему соответствует $\theta=0$ и $\alpha=\alpha_0$, то далее будет использоваться функционал (9).

При вычислении функционала (9) воспользуемся приемом, предложенным в [4], и если при вычислении характеристики C_{i+1}^* происходит авост, то функционал (9) вычисляется вдоль уже рассчитанной характеристики C_i^* .

Если сопло имеет отрицательный наклон сопла $f'(x_a) < 0$ в точке «а», то авост происходит при вычислении характеристики C_2^* , и функционал (9) вычисляется на начальной характеристике ae . Поскольку при вычислении параметров течения в угловой точке «а» используется формула Прандтля-Майера (2), то можно использовать эту формулу и для вычисления α_2 при $\theta_2 < 0$. В этом случае найденные значения α_2 не имеют физического смысла, т.к. этому соответствует дозвуковое течение. Однако в силу своей непрерывности (рис. 4) функция $\alpha_2(\theta_2)$ позволяет продолжить функционал (9) на односвязную область в случае отрицательного наклона сопла $f'(x_a) < 0$ и обеспечить функционалу непрерывность и дифференцируемость. Как показали расчеты, при вычислении по формуле трапеции функционала на начальной характеристике ae достаточно брать только две точки – «а» и «е».

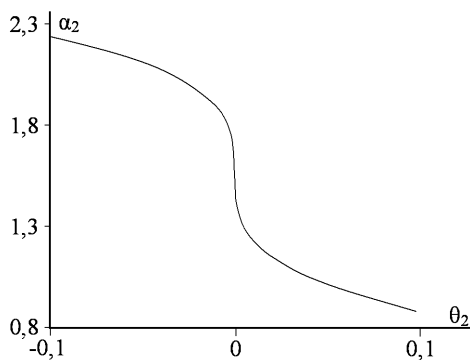


Рис. 4. Зависимость $\alpha_2 = \alpha_2(\theta_2)$

Поскольку на входе в сопло граничные условия не меняются, а параметры течения определяются только профилем сопла (4), то значение функционала (9) будет неявно зависеть от этого профиля. Таким образом, задача нахождения профиля сопла $f(x)$, доставляющего экстремум функционалу (9), сводится к поиску точки $(c_1, \dots, c_N)$, в которой функция многих переменных $J_3 = J_3(c_1, \dots, c_N)$ имеет экстремум. Для нахождения минимума этой функции использовался квазиньютоновский метод Бройдена из [6].

5. Численные результаты

Число N варьируемых переменных c_i менялось от 1 до 10, начальное значение $c_i=0$. На характери-

стике ae задавалось 50 точек. Координаты точек «а» и «б»: (0; 1) и (3,576; 1,299). Этим значениям соответствует найденное из [2] эталонное сопло с угловой точкой и числом Маха на выходе $M_0=2$.

Сравнение решения для обоих функционалов с эталонным соплом показало, что при $N=10$ ординаты сопел отличались в четвертом знаке после запятой, а максимальная относительная погрешность по составу составила 0,02 %.

На рис. 5 представлены результаты минимизации в виде окончательных значений функционалов для различного числа N . Таблица демонстрирует влияние числа коэффициентов и используемого функционала как на число прямых расчетов, так и на количество авостов. Из представленных результатов видно, что предложенный функционал (9), несмотря на простоту, по эффективности не уступает функционалу (5–7), предложенному в [4].

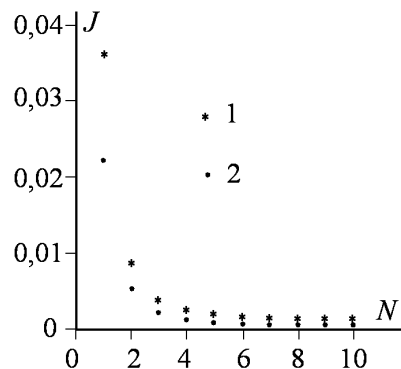


Рис. 5. Минимизация функционалов: 1) формулы (5–7) из [4], 2) предлагаемая формула (9)

Таблица. Минимизация функционалов. В числителе – число прямых расчетов, в знаменателе – авостов

№	Формулы (5–7) [4]	Предлагаемая формула (9)
1	13/2	17/2
2	36/3	39/4
3	63/4	69/5
4	98/4	99/5
5	135/5	115/7
6	150/7	166/7
7	199/7	203/6
8	273/6	304/7
9	385/8	320/8
10	444/7	492/9

Заключение

Проведенные численные исследования показывают, что предложенный функционал достаточно прост в реализации, при наличии авостов имеет продолжение на односвязную область и сохраняет дифференцируемость, а по эффективности не уступает ранее рассмотренному в работе [4] функционалу. Сравнение профиля найденного сопла с эталонным профилем показало, что при 10 варьируемых переменных максимальная относительная погрешность по ординате составляет 0,02 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики. — М.: Наука, 1979. — 448 с.
2. Кацкова О.Н. Расчет равновесных течений газа в сверхзвуковых соплах. — М.: ВЦ АН СССР, 1964. — 61 с.
3. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976. — 400 с.
4. Галкин В.М., Волков Ю.С. Сравнение базисных функций в прямой задаче профилирования сверхзвуковой части сопла // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2004. — Т. 7. — № 4(20). — С. 48–58.
5. Крайко А.Н., Тилляева Н.И. Оптимальное профилирование контура сверхзвуковой части тарельчатого сопла // Механика жидкости и газа. — 2000. — № 6. — С. 172–184.
6. Дэннис Дж. мл., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. — М.: Мир, 1988. — 440 с.

УДК 536.21+692.2:691.327:666.973.2:666.64-492.3

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ТЕПЛОПЕРЕНОС В НЕОДНОРОДНОЙ КЕРАМЗИТОБЕТОННОЙ СТЕНЕ

А.Н. Хуторной, А.Я. Кузин, Н.А. Цветков, Т.А. Мирошниченко, А.В. Колесникова

Томский государственный архитектурно-строительный университет

E-mail: kaftgs@tsuab.ru

С помощью математического моделирования исследовано тепловое состояние неоднородного трехслойного керамзитобетонного фрагмента стены с фасадным утеплением на гибкой связи. Установлен характер распределения полей температуры в керамзитобетонной конструкции. Выполнена оценка зоны влияния гибкой связи на температурное поле стены. Разработанная численная методика позволяет проводить тепловую экспресс-диагностику наружных неоднородных керамзитобетонных стен с различными теплофизическими и геометрическими характеристиками материалов системы в реальных условиях эксплуатации.

Вопросы энергосбережения относятся к приоритетным направлениям развития науки, технологий и техники Российской Федерации. Очевидно, что решение этих вопросов должно иметь комплексный характер. В работе [1] выполнена оценка энергоэффективности комплекса энергосберегающих мероприятий в нескольких зданиях общественного назначения г. Москвы. Суммарная экономия энергии оказалась весьма значительной (56...63 %), при этом доля утепления несветопрозрачных ограждений составила 16...20 %. Там же [1] подчеркнута важность энергосберегающих мероприятий, связанных с утеплением несветопрозрачных ограждений, как обеспечивающих суммарное снижение энергопотребления здания не менее чем в 2 раза. В этой связи разработка способов повышения теплоэффективности наружных стен существующих зданий и разработка новых конструкций с повышенными теплозащитными свойствами является объективной необходимостью.

Повысить уровень теплозащиты наружных стен зданий можно за счет устройства в толще конструкции пустот, заполненных эффективным утеплителем [2]. Однако, как показано в работе [3], для ряда климатических зон такое решение может быть не достаточным. С целью обеспечения требованиям СНиП II-3-79* «Строительная теплотехника» возникает необходимость в устройстве дополнительного утепления ограждающих конструкций, которое может быть реализовано с помощью фасадных систем утепления на гибких связях.

Физико-математическая постановка задачи. Рассмотрим нестационарный теплоперенос через трехслойную неоднородную конструкцию, состоящую из керамзитобетона — 1 с вертикальной пустотой, заполненной утеплителем — 4, утеплителя фасадной системы утепления — 2 и обшивки — 3 (рис. 1). Керамзитобетон с обшивкой соединены гибкой связью (коннектором) — 5. Форма керамзитобетона, внутреннего утеплителя, коннектора, утеплителя фасадной системы утепления и обшивки — прямые параллелепипеды, поперечные и продольные сечения которых в общем случае представляют собой разносторонние прямоугольники. Известны теплофизические характеристики ($\lambda_i, \rho_i, c_i, i=1,5$) материалов системы, ее геометрические размеры, температуры наружной ($t_{g,e}$) и внутренней ($t_{g,ins}$) сред, коэффициенты теплоотдачи на наружной (α_w) и внутренней (α_0) поверхностях ограждения [4].

Необходимо рассчитать поля температур и плотностей тепловых потоков в сечениях неоднородной керамзитобетонной стены с фасадным утеплением.

Теплоперенос в неоднородном керамзитобетонном фрагменте стены описывается в декартовой системе координат трехмерными нелинейными нестационарными уравнениями теплопроводности

$$(\rho c)_i \frac{\partial t_i}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_{x,i} \frac{\partial t_i}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda_{y,i} \frac{\partial t_i}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda_{z,i} \frac{\partial t_i}{\partial z}),$$

$$i = \overline{1,5}. \quad (1)$$