

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ  
МЕХАНИЗМОВ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКИХ РАБОТ ПРИ  
МОМЕНТАХ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПОЛОЖЕНИЯ И СКОРОСТИ  
ЗВЕНА ПРИВЕДЕНИЯ**

Ю. Я. КОВЫЛИН

Указанная в заглавии статьи задача возникает в связи с тем, что после ориентировочного предварительного определения момента инерции маховика (с помощью какого-либо приближенного метода \*) необходимо рассчитать ход кривой  $\omega(\varphi)$  и установить насколько отличается полученное значение коэффициента неравномерности движения звена приведения от заданного. Если различие велико, то принятое приближенное значение момента инерции маховика следует увеличить или уменьшить [1]. После этого расчет по определению закона движения повторяется по крайней мере еще один раз, чтобы убедиться в достаточности скорректированного значения момента инерции маховика для обеспечения движения звена приведения с заданным коэффициентом неравномерности. Вместе с тем извлекается вся информация о ходе кривой  $\omega(\varphi)$ , необходимая для проведения уточненных расчетов деталей механизма на прочность, долговечность и т. д.

Зависимость  $\omega(\varphi)$  в установившемся движении принципиально может быть найдена при помощи известных общих методов [1], [2]. Однако применение их на практике для решения этой задачи связано с рядом неудобств. Во-первых, начальные условия при расчете установившегося движения выбираются весьма ориентировочно. В результате этого для получения решения, отвечающего установившемуся режиму, приходится исследовать движение звена приведения в пределах угла поворота, большего, чем для одного цикла [2]. Во-вторых, после каждого изменения величины момента инерции маховика приходится повторять заново практически весь объем вычислений. В итоге общий объем работы, особенно при переменном приведенном моменте инерции механизма, получается довольно большим.

Излагаемый ниже метод динамической работы дает весьма простое и компактное решение всего комплекса задач по динамике установившегося движения механизмов, если заданные силы зависят от положения и скорости звена приведения.

Пусть приведенный к звену приведения момент сил задан функцией  $M = M^I(\varphi) + M^{II}(\omega)$ , а приведенный к тому же звену момент инерции звеньев (без маховика) — функцией  $I_{зв} = I_{зв}(\varphi)$ . Здесь  $\varphi$  и  $\omega$  — текущие значения угла, определяющего положение звена приведения, и угловой скорости его вращения.

\*) Точного метода определения момента инерции маховика при силах, зависящих от перемещений и скоростей, нет.

Пусть, далее,  $[\delta]$  — заданное допустимое значение коэффициента неравномерности движения звена приведения. Предположим, что, ориентируясь на это число, с помощью какого-либо метода удалось найти приближенную величину момента инерции маховика  $I_M$ , устанавливаемого на звене приведения. Теперь требуется рассчитать ход кривой  $\omega(\varphi)$  и определить фактическое (расчетное) значение коэффициента  $\delta$  неравномерности его движения.

Искомую угловую скорость представим как

$$\omega = \omega_{\text{ср}} + \Delta\omega, \quad (1)$$

где  $\Delta\omega$  — отклонение мгновенной угловой скорости  $\omega$  вращения звена приведения от ее среднего планиметрического (по углу  $\varphi$ ) значения  $\omega_{\text{ср}}$ .

Величина  $\omega_{\text{ср}}$  должна удовлетворять известному условию периодичности

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\Phi} M(\varphi, \omega_{\text{ср}} + \Delta\omega) d\varphi = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\Phi$  — угол поворота звена приведения, отвечающий одному периоду установившегося движения.

Подставив (1) в (2), найдем

$$M_{\text{ср}}^I + \frac{1}{\Phi} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\Phi} M^I(\omega_{\text{ср}} + \Delta\omega) d\varphi = 0, \quad (3)$$

где  $M_{\text{ср}}^I$  — среднее за период  $\Phi$  значение момента  $M^I(\varphi)$ , равное

$$M_{\text{ср}}^I = \frac{1}{\Phi} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\Phi} M^I(\varphi) d\varphi. \quad (4)$$

При достаточно часто встречающемся на практике случае [1], когда характеристика  $M^{II}(\omega)$  выражается линейной функцией скорости  $\omega$ , уравнение (3) может быть проинтегрировано до конца. Тем самым определяется точное значение средней планиметрической скорости.

При нелинейном характере функции  $M^{II}(\omega)$  величина  $\omega_{\text{ср}}$  может быть найдена только приближенно. Нетрудно показать, что если на рабочем участке кривой  $M^{II}(\omega)$ , заключенном между ординатами

$\omega = \omega_{\text{min}}$  и  $\omega = \omega_{\text{max}}$ , производная  $\frac{dM^{II}}{d\omega}$  не меняет знака (а это харак-

терно для всех современных машин), то средняя скорость установившегося движения в первом приближении может быть определена как

$$\omega_{\text{ср}} \approx \omega_3 \left[ 1 + 0,35 [\delta] \frac{M^{II}(\omega') + M^{II}(\omega'') + 2M_{\text{ср}}^I}{M^{II}(\omega') - M^{II}(\omega'')} \right]. \quad (5)$$

Здесь  $\omega_3$  — так называемая средняя энергетическая угловая скорость, определяемая уравнением

$$M_{\text{ср}}^I + M^{II}(\omega_3) = 0;$$

$$\omega' = \omega_3 (1 - 0,35 [\delta]);$$

$$\omega'' = \omega_3 (1 + 0,35 [\delta]).$$

Для определения зависимости  $\Delta\omega(\varphi)$  разделим угол  $\Phi$  на  $z$  одинаковых небольших участков  $\Delta\varphi$  и запишем уравнение кинетической энергии

$$\frac{I_{\kappa}\omega_{\kappa}^2}{2} - \frac{I_0\omega_0^2}{2} = A_{\kappa} \quad (\kappa = 1, 2, \dots, z). \quad (6)$$

Здесь  $\omega_0$  и  $\omega_{\kappa}$  — значения угловой скорости звена приведения в исходном (нулевом) и  $\kappa$ -м положениях;

$I_0$  и  $I_{\kappa}$  — величины приведенного момента инерции механизма (с учетом маховика) в тех же положениях;

$A_{\kappa}$  — работа приведенного момента сил  $M$  на перемещении звена приведения, равно  $\varphi_{\kappa} - \varphi_0$ .

Так как в режиме установившегося движения даже наибольшие отклонения скорости  $|\Delta\omega_{\max}|$  значительно меньше, чем  $\omega_{\text{ср}}$ , то с достаточной точностью имеем

$$\omega^2 \approx \omega_{\text{ср}}^2 + 2\omega_{\text{ср}}\Delta\omega. \quad (7)$$

На том же основании криволинейный рабочий участок заданной зависимости  $M^{\text{II}}(\omega)$  можно приближенно заменить прямой, проведенной через точку с координатами  $\omega = \omega_{\text{ср}}$  и  $M = -M_{\text{ср}}^{\text{I}}$ . Уравнение этой прямой

$$M_{*}^{\text{II}} = -M_{\text{ср}}^{\text{I}} + C\Delta\omega,$$

где  $C$  — угловой коэффициент, который может быть определен как

$$C = \left( \frac{dM^{\text{II}}(\omega)}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_{\text{ср}}}, \quad (8)$$

или

$$C \approx \frac{M^{\text{II}}(\omega'') - M^{\text{II}}(\omega')}{0,7[\delta]\omega_{\text{ср}}}. \quad (8')$$

Здесь

$$\omega' = \omega_{\text{ср}}(1 - 0,35[\delta]); \quad \omega'' = \omega_{\text{ср}}(1 + 0,35[\delta]).$$

Тогда работа  $A_{\kappa}$ , совершаемая приведенным моментом сил, будет равна

$$A_{\kappa} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_{\kappa}} M^{\text{I}}(\varphi) d\varphi - \kappa M_{\text{ср}}^{\text{I}} \Delta\varphi + C \int_{\varphi_0}^{\varphi_{\kappa}} \Delta\omega d\varphi.$$

Применив для вычисления последнего интеграла правило трапеций, найдем:

$$A_{\kappa} \approx \int_{\varphi_0}^{\varphi_{\kappa}} M^{\text{I}}(\varphi) d\varphi - \kappa M_{\text{ср}}^{\text{I}} \Delta\varphi + C\Delta\varphi \left( \sum_{i=0}^{\kappa-1} \Delta\omega_i - \frac{\Delta\omega_0}{2} + \frac{\Delta\omega_{\kappa}}{2} \right). \quad (9)$$

$$(\kappa = 1, 2, \dots, z).$$

Наконец, внося (7) и (9) в (6), после простых преобразований получим окончательно

$$\Delta\omega_{\kappa} \approx \frac{L_{\kappa} - L^{**} + C\Delta\varphi \sum_{i=0}^{\kappa-1} \Delta\omega_i}{I_{\kappa}\omega_{\text{ср}} - \frac{C\Delta\varphi}{2}}, \quad (10)$$

где для сокращения записи введены следующие обозначения:

$$L_{\kappa} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_{\kappa}} M^{\text{I}} d\varphi - \kappa M_{\text{ср}}^{\text{I}} \Delta\varphi - \frac{I_{\text{зв.}\kappa} \omega_{\text{ср}}^2}{2}; \quad (11)$$

$$L^{**} = -\frac{I_{зв. о} \omega_{ср}^2}{2} - \Delta\omega_0 \left( I_0 \omega_{ср} - \frac{C\Delta\varphi}{2} \right). \quad (12)$$

Функция  $L$  (ее удобно называть динамической работой) зависит только от  $\varphi$ . И поэтому для всех  $\varphi_k$  (от  $\varphi_0$  до  $\varphi_z$ ) ее значения легко могут быть вычислены непосредственно по исходным данным с учетом найденной раньше скорости  $\omega_{ср}$ .

Через  $L^{**}$  обозначена некоторая постоянная величина (12), зависящая от неизвестного пока отклонения  $\Delta\omega_0$ , которым следует задаться. В первом приближении величину  $\Delta\omega_0$  можно определить как

$$\Delta\omega_0 \approx -\frac{0,5 I_{зв. о} \omega_{ср}^2 + L_{ср}}{I_{ср} \omega_{ср}}, \quad (13)$$

где

$$L_{ср} = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^z L_k;$$

$$I_{ср} = I_m + I_{зв. ср}; \quad I_{зв. ср} = 0,5 (I_{зв. min} + I_{зв. max}).$$

Формула (13) может быть получена из (10), если в последней положить  $C = 0$  и  $I_k = I_{ср}$ .

Так как вычисленное таким образом значение  $\Delta\omega_0$  не равно точно искомому отклонению, то это неизбежно приведет к тому, что величина  $\Delta\omega_z$  отклонения скорости в конце рассматриваемого периода установившегося движения не будет точно равна принятому значению  $\Delta\omega_0$ . Этому в некоторой степени способствует также накопление ошибки суммы, стоящей в числителе (10)\*).

Если невязка  $\Delta\omega_z - \Delta\omega_0$  велика, то это свидетельствует о значительном несоответствии приближенного значения  $\Delta\omega_0$ . В таком случае следует повторить расчет при помощи тех же формул (10) ÷ (12), приняв теперь  $\Delta\omega_0$  равным  $\Delta\omega_z$ . При необходимости вычисления можно продолжать до тех пор, пока разность  $\Delta\omega_z - \Delta\omega_0$  не уменьшится до допустимого значения. Эти уточняющие расчеты требуют минимальной затраты труда, так как найденные в первом приближении значения динамической работы  $L$  и знаменателя в формуле (10) остаются теми же и в следующих приближениях. Однако, как показывают многочисленные примеры расчета установившегося движения по изложенному методу, надобность в повторении расчетов возникает нечасто.

Оставшуюся невязку можно распределить по линейному закону по всем значениям  $\Delta\omega_k$  в пределах периода. Приняв, что величина  $\Delta\omega_z$  ближе к истинному отклонению скорости, чем  $\Delta\omega_0$ , получим уточненно

$$\Delta\omega_k^{yt} = \Delta\omega_k + \frac{\Delta\omega_z - \Delta\omega_0}{z} (z - k), \quad (14)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, z),$$

где через  $\Delta\omega_0$ ,  $\Delta\omega_k$  и  $\Delta\omega_z$  обозначены отклонения скорости, отвечающие последнему приближению.

Исследовав найденную периодическую зависимость  $\Delta\omega(\varphi)$ , определим коэффициент неравномерности движения звена приведения по формуле

$$\delta = \frac{\Delta\omega_{max} - \Delta\omega_{min}}{\omega_{ср}}.$$

\*) Такие же последствия будут иметь место и при использовании любого другого метода расчета.

Если значение  $\delta$  мало отличается от заданного  $[\delta]$ , то найденную приближенную величину  $I_M$  можно признать удовлетворяющей поставленным условиям. Если же в результате поверочного расчета разница между  $\delta$  и  $[\delta]$  окажется больше допустимой, то величину момента инерции маховика следует уточнить. При этом можно предположить, что известная [1] гиперболическая зависимость  $I_{\text{ср}} \delta = \text{idem}$  приближенно справедлива и в случае, когда  $M = M(\varphi, \omega)$ . Тогда получим

$$I_M^{\text{ут}} \approx \frac{\delta}{[\delta]} (I_M + I_{\text{зв. с.}}) - I_{\text{зв. ср.}}$$

После определения величины  $I_M^{\text{ут}}$  необходимо еще раз определить ход кривой  $\Delta\omega(\varphi)$  при помощи формул (10)–(14), что потребует лишь простейших и нетрудоемких дополнительных расчетов.

В заключение отметим, что надобность в корректировке величины  $I_M$  и упомянутом уточнении хода кривой  $\Delta\omega(\varphi)$  практически возникает нечасто, если в качестве приближенного значения принимать

$$I_M \approx \frac{L_{\text{max}} - L_{\text{min}}}{[\delta] \omega_{\text{ср}}^2} - I_{\text{зв. ср.}}$$

что соответствует известному методу Н. И. Мерцалова и К. Э. Рериха (при  $M^{\text{II}} = -M_{\text{ср}}^{\text{I}}$ ) в интерпретации автора [3].

Таким образом, используя функцию  $L(\varphi)$ , впервые введенную в практику Н. И. Мерцаловым и К. Э. Рерихом для случая  $M = M(\varphi)$  и названную выше динамической работой, можно весьма эффективно решать весь комплекс задач динамики установившегося движения и при  $M = M(\varphi, \omega)$ .

Изложенный метод легко распространить на общий случай задания зависимости  $M(\varphi, \omega)$ , когда она не может быть представлена суммой  $M^{\text{I}}(\varphi) + M^{\text{II}}(\omega)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Артоболовский. Теория механизмов. М., «Наука», 1967.
2. Г. Г. Баранов. Курс теории механизмов и машин. М., «Машиностроение», 1967.
3. Ю. Я. Ковылин. О расчете маховика по методу проф. Н. И. Мерцалова и проф. К. Э. Рериха. Изв. вузов СССР, «Машиностроение», М., № 10, 1960.