ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 235 1973

УПРОЩЕННЫЙ ПРЯМОЙ МЕТОД РАСЧЕТА УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ И ЕГО СРАВНЕНИЕ С ДРУГИМИ МЕТОДАМИ

Ю. Я. КОВЫЛИН, Н. Д. ГРЕБЕНЕВА

Будем рассматривать движение механизмов с одной степенью свободы под действием сил, зависящих только от положения звена приведения. Тогда приращение кинетической энергии механизма на перемещении звена приведения из исходного положения, определяемого координатой $\varphi = \varphi_0$, в текущее положение, отвечающее координате $\varphi = \varphi_i$ $(i = 0, 1, 2, 3, \ldots, z)$, определится известным [1] уравнением

$$\frac{I_i \omega_i^2}{2} - \frac{I_0 \omega_0^2}{2} = A_i. \quad (1)$$

Здесь ω_0, ω_i — значения угловой скорости звена приведения в его исходном и текущем положениях;

I_0, I_i — значения приведенного к звену приведения момента инерции механизма в тех же положениях;

$A_i = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_i} M(\varphi)\, d\varphi$ — работа приведенного к звену приведения момента сил $M(\varphi)$ на перемещении $\varphi_i - \varphi_0$ этого звена.

Пусть $I_i = I(\varphi_i)$ и $A_i = A(\varphi_i)$ заданы на всем периоде $\varphi_z - \varphi_0$ изменения угловой скорости вращения звена приведения.

Причем

$$A_z \equiv \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_z} M(\varphi)\, d\varphi = 0$$

в согласии с известными [1] условиями периодичности.

Требуется определить закон изменения угловой скорости вращения звена приведения в режиме установившегося движения с заданной средней угловой скоростью, равной $\omega_{ср}$.

Эта задача, часто встречающаяся в приложениях, не имеет точного решения.

С. Н. Кожевников [2] дает следующее приближенное решение. Задаваясь рядом произвольных значений коэффициента неравномерности движения звена приведения δ', δ'', $\delta''', \ldots$, находят соответствующие потребные значения приведенного к этому звену момента инерции маховика $I'_м$, $I''_м$, $I'''_м$,..., используя известный графический метод Виттенбауэра в сочетании с обычным для этого метода допущением

$$\omega_{ср} \simeq \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}. \quad (2)$$

Затем, в координатах $(\delta, I_м)$ вычерчивают кривую найденной зависимости $I_м = I_м(\delta)$ и находят ее пересечение с прямой, проведенной на уровне $I_м$, фактически имеющегося в механизме. Тем самым определяется величина коэффициента δ.

Дальнейшие операции по определению зависимости $\omega = \omega(\varphi)$ производятся в полном соответствии с упомянутым графическим методом Виттенбауэра.

Описанная методика не нашла широкого распространения в силу наличия значительных недостатков, главнейшие из которых состоят в том, что:

а) допущение (2) во многих случаях является слишком грубым, особенно в применении к механизмам с относительно легким маховиком и при «импульсном» характере изменения приложенных сил;

б) положенный в основу решения метод Виттенбауэра допускает только графическую реализацию, в связи с чем невозможно использование численных методов, допускающих эффективное применение вычислительных машин (кроме подготовки исходных данных);

в) начало координат кривой Виттенбауэра $A = A(I)$ обычно лежит далеко за пределами чертежа. Поэтому достаточно точное определение угловых коэффициентов прямых, которые надлежит проводить через указанную точку для определения скорости движения звена приведения, становится невозможным.

Перечисленные недостатки целиком предопределяются внутренними свойствами метода Виттенбауэра, который, можно сказать, медленно, но верно сходит со сцены, уступая методам, допускающим численное решение. Сюда в первую очередь следует отнести метод, развитый Е. М. Гутьяром [3], свободный от недостатков, отмеченных в пунктах *б* и *в*. Однако применение этого метода, вместо метода Виттенбауэра, в рамках изложенного выше плана анализа установившегося движения по [2], не избавляет от необходимости использования допущения (2) и, кроме того, резко увеличивает трудоемкость.

Другой известный энергетический метод, основанный на идеях Н. И. Мерцалова [4] и К. Э. Рериха [5] и развитый в работе М. И. Бать [6], в противоположность описанному методу, обладая низкой трудоемкостью, позволяет решить поставленную задачу, не базируясь на допущении (2). Однако этот метод в отдельных случаях может дать значительную ошибку [7], которую, оставаясь в рамках этого метода, не представляется возможным уменьшить.

Более точный, но и значительно более трудоемкий метод дается в работе В. А. Юдина и Э. Э. Кольмана-Иванова [8]. Но этот метод не связан прямо с решением задачи об определении момента инерции маховика, что является его существенным недостатком.

В том случае, когда не предъявляется высоких требований к точности решения, зависимость $\omega(\varphi)$ может быть приближенно определена непосредственно из уравнения (1), если вместо неизвестной величины ω_0 подставить туда заданное значение $\omega_{ср}$. Это наиболее простое решение задачи дается в работе А. М. Антовиля [9]. Важным достоинством способа является также его низкая трудоемкость.

Непосредственно используя уравнение (1), можно было бы найти сколь угодно точное решение задачи, если применить метод последовательных приближений. В рамках этого метода решение по способу [9] будет лишь первым приближением. Чтобы получить решение во втором приближении, необходимо сначала найти среднюю скорость и уклонение мгновенной скорости от найденного среднего значения для исходного положения механизма по результатам первого приближения, а затем повторить расчет по уравнению (1), приняв теперь значение ω_0, равным сумме **заданной** средней скорости и найденного только что уклонения. Аналогично строятся более высокие приближения.

Хорошие результаты получаются уже во втором приближении. При этом трудоемкость еще сравнительно небольшая. Но, как и метод В. А. Юдина и Э. Э. Кольмана-Иванова, этот метод также не связан прямо с расчетом маховика.

Рассмотрим метод, сочетающий в себе простоту грубых методов с высокой точностью метода последовательных приближений. Эффективность метода повышается благодаря наличию оценки предельной погрешности и пригодности его для определения момента инерции маховика.

Из (1) находим

$$\omega_i = \sqrt{\frac{I_0 \omega_0^2 + 2A_i}{I_i}}. \tag{3}$$

Преобразуем выражение, стоящее в (3) под радикалом, прибавив и вычтя количество $I_i \omega_{ср}^2$ и представив в числителе

$$I_i = I_м + I_{зв.\,i}, \tag{4}$$

где $I_{зв.\,i}$ — приведенный момент инерции звеньев механизма без маховика:

$$\omega_{ср}^2 + 2\,\frac{\dfrac{I_0\omega_0^2}{2} - \dfrac{I_м \omega_{ср}^2}{2} - \dfrac{I_{зв.\,i}\,\omega_{ср}^2}{2} + A_i}{I_i} = \omega_{ср}^2 + 2\,\frac{L_i - L^*}{I_i}.$$

Здесь введены обозначения:

$$L_i = A_i - \frac{I_{зв.\,i}\,\omega_{ср}^2}{2},$$

$$L^* = \frac{I_м \omega_{ср}^2}{2} - \frac{I_0 \omega_0^2}{2} = \mathrm{idem}.$$

Теперь выражение (3) перепишем в виде

$$\omega_i = \omega_{ср}\sqrt{1 + 2\,\frac{L_i - L^*}{I_i \omega_{ср}^2}}. \tag{5}$$

Представим правую часть (5) как результат разложения в биномиальный ряд

$$\omega_i = \omega_{ср}\left[1 + \frac{L_i - L^*}{I_i \omega_{ср}^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{L_i - L^*}{I_i \omega_{ср}^2}\right)^2 + \dots\right],$$

откуда, положив $\omega_i = \omega_{ср} + \Delta\omega_i$, получим

$$\Delta\omega_i = \frac{L_i - L^*}{I_i \omega_{ср}} - \frac{1}{2\omega_{ср}}\left(\frac{L_i - L^*}{I_i \omega_{ср}}\right)^2 + \dots \tag{6}$$

Так как в случаях, имеющих практическое значение, второе слагаемое под радикалом (5) по абсолютной величине значительно меньше единицы, то записанный ряд сходится очень быстро. Поэтому для практических расчетов достаточно ограничиться выписанными членами. Обозначив количество, равное первому слагаемому в (6), через $\Delta\omega_i^I$, выразим второй член через эту величину.

Тогда получим

$$\Delta\omega_i \approx \frac{L - L^*}{I_i \omega_{ср}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(\Delta\omega_i^I)^2}{\omega_{ср}}. \tag{7}$$

Далее, полагая среднюю угловую скорость равной среднему планиметрическому (по углу φ) ее значению, из условия периодичности

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_z} \Delta\omega(\varphi)\, d\varphi \simeq \frac{\varphi_z - \varphi_0}{z} \sum \Delta\omega_i = 0$$

с учетом (7) находим

$$L^* = \frac{\sum L_i/I_i - \frac{1}{2} \sum (\Delta\omega_i^{\mathrm{I}})^2}{\sum 1/I_i}. \tag{8}$$

Здесь и далее суммирование ведется по индексу i, пробегающему значения $i = 0, 1, 2, \ldots, z-1$.

Значение L^* из (8) подставим в (7); после простых преобразований вместо системы (7) $\div$ (8) получим новую систему

$$\Delta\omega_i = \frac{L_i - L^{**}}{I_i \omega_{\text{ср}}} + \frac{1}{2\omega_{\text{ср}}} \left[\frac{\sum (\Delta\omega_i^{\mathrm{I}})^2}{I_i \sum 1/I_i} - (\Delta\omega_i^{\mathrm{I}})^2 \right], \tag{9}$$

$$L^{**} = \frac{\sum L_i/I_i}{\sum 1/I_i}. \tag{10}$$

Так как $|\Delta\omega|_{\max} \ll \omega_{\text{ср}}$, то, очевидно, уклонения $\Delta\omega_i$ угловой скорости обязаны, главным образом, изменению первого слагаемого в правой части (9), мало отличающегося от первого члена в (6), величина которого обозначена через $\Delta\omega_i^{\mathrm{I}}$. Поэтому можно приближенно принять

$$\Delta\omega_i^{\mathrm{I}} \approx \frac{L_i - L^{**}}{I_i \omega_{\text{ср}}}. \tag{11}$$

Второе слагаемое в правой части (9) (обозначим его $\Delta\omega_i^{\mathrm{II}}$) играет роль малой поправки и равно

$$\Delta\omega_i^{\mathrm{II}} = \frac{1}{2\omega_{\text{ср}}} \left[\frac{\sum (\Delta\omega_i^{\mathrm{I}})^2}{I_i \sum 1/I_i} - (\Delta\omega_i^{\mathrm{I}})^2 \right]. \tag{12}$$

Наконец, в соответствии с (9), (11) и (12) имеем

$$\Delta\omega_i \approx \Delta\omega_i^{\mathrm{I}} + \Delta\omega_i^{\mathrm{II}}. \tag{13}$$

Детальный анализ показывает, что предельная относительная ошибка величины $\Delta\omega_i$ при определении ее из (9) $\div$ (13) не больше $\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{\text{ср}}}\right)^2_{\max}$, что всегда допустимо.

Рассмотрим обратную задачу — расчет маховика.

Пусть заданы $A = A(\varphi)$, $I_{\text{зв}} = I_{\text{зв}}(\varphi)$, $\omega_{\text{ср}}$ и допустимое значение коэффициента неравномерности вращения звена приведения $[\delta]$.

Требуется определить момент инерции маховика $I_{\text{м}}$, обеспечивающий заданную равномерность движения.

Положив в (11) $\quad I_i \approx I_{\text{м}} + I_{\text{зв. ср}}$,

где

$$I_{\text{зв. ср}} = \frac{I_{\text{зв. max}} + I_{\text{зв. min}}}{2},$$

получим

$$\Delta\omega_i \approx \frac{L_i - L^{**}}{(I_{\text{м}} + I_{\text{зв. ср}})\, \omega_{\text{ср}}}.$$

Так как L^{**}, $I_{ср}$ и $\omega_{ср}$ постоянны, то

$$\Delta\omega_{max} \approx \frac{L_{max} - L^{**}}{(I_м + I_{зв.\,ср})\,\omega_{ср}},$$

$$\Delta\omega_{min} \approx \frac{L_{min} - L^{**}}{(I_м + I_{зв.\,ср})\,\omega_{ср}}.$$

Коэффициент неравномерности вращения, как известно, равен

$$\delta = \frac{\Delta\omega_{max} - \Delta\omega_{min}}{\omega_{ср}}.$$

Подставив сюда найденные приближенные значения $\Delta\omega_{max}$ и $\Delta\omega_{min}$ и положив $\delta = [\delta]$, получим:

$$I_м \approx \frac{L_{max} - L_{min}}{[\delta]\,\omega_{ср}^2} - I_{зв.\,ср}. \qquad (14)$$

Этот результат совпадает с решением по методу Н. И. Мерцалова — К. Э. Рериха, уточненному в работе Ю. Я. Ковылина [7].

Согласно предыдущему, предельная относительная ошибка величины $I_{ср}$, определяемой из (14), составляет порядка $\frac{\Delta I_{max}}{I_{ср}} + \frac{|\Delta\omega|_{max}}{2\omega_{ср}}$ и, как правило, не имеет существенного значения, так как величина δ строго не нормирована.

Метод	Наибольшая относительная ошибка, %	Средняя квадратичная ошибка, % от среднего квадратичного уклонения	Ошибка размаха угловой скорости, % от ее точного значен.	Относительная трудоемкость, %	Связь с расчетом маховика	Возможность продолжения итерации
Упрощенный прямой метод. Первое приближение — формула (11)	6,7	5,2	5,2	60	есть	есть
Упрощенный прямой метод. Улучшенное первое приближение — формула (13)	1,0	0,7	0,8	100	есть	есть
Метод В. А. Юдина и Э. Э. Кольмана-Иванова	2,1	5,8	0,00	120	нет	есть
Метод Н. И. Мерцалова — К. Э. Рериха-М. И. Бать	16,4	14,6	13,1	40	есть	нет
Метод последовательных приближений. Первое приближение	13,7	22,5	0,5	55	нет	есть
Метод последовательных приближений. Второе приближение	1,0	1,6	0,05	105	нет	есть

С другой стороны, для проведения уточненных расчетов деталей механизма на прочность, долговечность и т. д., имеется необходимость в достаточно точной информации о действительном ходе кривой $\Delta\omega(\varphi)$. Для этого можно применять (9) $\div$ (13), подставив туда I_i, согласно (4), где вместо $I_м$ следует использовать найденное только что приближенное его значение.

Этот расчет позволяет уточнить характер зависимости $\Delta\omega(\varphi)$ на всем периоде $\varphi_z - \varphi_0$ и определить фактическое значение δ.

Сравнив его с допустимым, можно уточнить потребную величину момента инерции маховика

$$I_{м.\,ут} \approx \frac{\delta}{[\delta]} (I_м + I_{зв.\,ср}) - I_{зв.\,ср}.$$

Здесь $I_м$ — приближенное значение по (14).

Для сравнения рассмотренного метода с другими, известными по литературе энергетическими методами, был проведен расчет конкретной задачи, представляющей достаточно трудный вариант для всех методов (большая степень неравномерности движения, $\delta = 0{,}202$, значительная переменная, составляющая в приведенном моменте инерции,

$$\frac{2(I_{max} - I_{min})}{I_{max} + I_{min}} = 0{,}478\,.$$

Результаты расчетов сведены в таблицу.

Сравнительные оценки убеждают в преимуществе изложенного выше метода, у которого точность на уровне самых точных методов, средняя трудоемкость и имеется непосредственная связь с расчетом маховика.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Артоболевский. Теория механизмов. М., «Наука», 1967.
2. С. Н. Кожевников. Теория механизмов и машин. Киев, Машгиз, 1954.
3. Е. М. Гутьяр. Уточнение расчета массы маховика по методу проф. Н. И. Мерцалова. «Вестник металлопромышленности», № 3, 1939.
4. Н. И. Мерцалов. Динамика механизмов. М., 1914.
5. К. Э. Рерих. Теория регулирования машин. ч. I. Петроград, 1916.
6. М. И. Бать. К вопросу о расчете маховика. Труды семинара по теории машин и механизмов. Вып. 55. М., Изд. АН СССР, 1954.
7. Ю. Я. Ковылин. О расчете маховика по методу проф. Н. И. Мерцалова и проф. К. Э. Рериха. Изв. вузов СССР. «Машиностроение», М., № 10, 1960.
8. В. А. Юдин, Э. Э. Кальман-Иванов. Исследование динамики поршневых компрессоров в связи с их интенсификацией. Тр. МИХМ, т. XXIV, 1962.
9. А. М. Антовиль. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин. Учебное пособие для студентов заочных машиностроительных вузов и факультетов. М., «Советская наука», 1955.