ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 243 1972

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

В. М. ОСИПОВ, А. Н. БАРКОВСКИЙ

(Представлена научно-техническим семинаром АВТФ ТПИ)

На основании интерполяционного метода решения дифференциальных уравнений рассматривается задача анализа линейных систем с переменными параметрами.

Входные и выходные сигналы системы представляются в виде «точечных» векторов, координаты которых есть значения реальных непрерывных процессов в некоторых точках (узлах интерполяции). Вводится понятие матрицы преобразования системы, устанавливающей простую алгебраическую связь между точечными векторами входного и выходного сигналов. Показывается, что основные вопросы анализа нестационарных систем могут быть решены с помощью довольно простых и однообразных алгоритмов, удобных как при использовании цифровых вычислительных машин, так и при расчетах вручную.

Интерполяционный метод решения дифференциальных уравнений

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Ly = \frac{d^n y}{dt^n} + c_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + c_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + c_n(t)y = f(t) \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$\left.\frac{d^\nu y}{dt^\nu}\right|_{t=0} = y^{(\nu)}{}_0\,;\ (\nu = 0,1,2,\ldots, n-1)\,. \qquad (2)$$

Приближенное решение уравнения (1) ищется в виде

$$y_n(t) = \psi_0(t) + \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k(t)\,, \qquad (3)$$

где $\psi_0(t)$ — функция, удовлетворяющая заданным начальным условиям;
$\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, ..., $\varphi_m(t)$ — заданная система функций, удовлетворяющая нулевым начальным условиям.

Общая идея интерполяционного метода заключается в том, что коэффициенты $a_k (k=0, 1, 2, ..., m)$, входящие в состав приближенного решения (3), находятся из условия обращения в нуль невязки $Ly_n - f$ в некоторых точках, называемых узлами интерполяции. Это приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[\psi_0(t) + \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k(t)\right]\Bigg|_{=t_i} +$$
$$+\left\{\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu(t)\frac{d^{n-\nu}}{dt^{n-\nu}}\left[\psi_0(t) + \sum_{k=0}^{m} a_k\varphi_k(t)\right]\right\}\Bigg|_{t=t_i} = f(t_i);$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots, m+1)\,. \qquad (4)$$

Естественно ожидать, что сходимость и точность метода будут существенно зависеть от выбора системы функций в приближенном решении (3) и от выбора узлов интерполяции. Исходя из этих соображений, в качестве координатной системы функций $\varphi_k(t)$ $(k=0, 1, \ldots, m)$ выбирается система ортогональных экспоненциальных полиномов Чебышева [1], а в качестве узлов интерполяции — нули первого из отброшенных полиномов. При этом приближенное решение (3) примет вид

$$y_n(t) = Ae^{-at} + B(e^{-at} - 1) + C(e^{-at} - 1)^2 + \ldots +$$
$$+ E(e^{-at} - 1)^{n-1} + (e^{-at} - 1)^n \sum_{k=0}^{m} a_k T^*_k(t)\,, \qquad (5)$$

где A, B, C, ..., E — постоянные, определяемые из начальных условий;

$T^*_k(t)$ — экспоненциальные полиномы Чебышева 1-го рода [1].

В дальнейшем для простоты будем полагать, что начальные условия (2) являются нулевыми. Тогда

$$y_n(t) = (e^{-at} - 1)^n \sum_{k=0}^{m} a_k T^*_k(t)\,. \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (1) и производя несложные преобразования, получаемое дифференциальное уравнение можно привести к виду

$$\varphi_0^1(t)\left[\sum_{k=0}^{m} a_k T^*_k(t)\right]^{(n)} + \varphi^1_1(t)\left[\sum_{k=0}^{m} a_k T^*_k(t)\right]^{(n-1)} + \ldots +$$
$$+ \varphi^1_n(t)\left[\sum a_k T^*_k(t)\right] = f(t)\,. \qquad (7)$$

Далее, следуя общей идее интерполяционного метода, мы должны составить систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных параметров $a_0, a_1, \ldots, a_m$.

Используя свойства экспоненциальных полиномов и учитывая их ортогональность в смысле суммирования по узлам интерполирования [2], можно показать, что искомая система алгебраических уравнений в векторно-матричной форме будет иметь вид

$$(-a)^n M_0 I^{TT}_{m+1} D^n A + (-a)^{n-1} M_1 I^{TT}_{m+1} D^{n-1} A + \ldots +$$
$$+ (-a) M_{n-1} I^{TT}_{m+1} DA + M_n I^{TT}_{m+1} A = F\,, \qquad (8)$$

где

$M_0, \ldots, M_n$ — диагональные матрицы вида

$$M_k = \mathrm{diag}\,\{\varphi^1_k(t_1), \ldots, \varphi^1_k(t_{m+1})\}\,.$$

I^{TT}_{m+1} — так называемая интерполяционная матрица порядка $m+1$, элементы которой определяются выражением

$$i_{\mu\nu} = T^*_{\nu-1}(t_\mu);\ (\mu = 1, 2, \ldots, m+1)\ (\nu = 1, 2, \ldots, m+1)\,,$$

D — матрица дифференцирования вида

$$D = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \dots & m\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 2\cdot 2 & \dots & 2m \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 2m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & m-1 & 2m \\ 0 & \dots & \dots & \dots & m \end{bmatrix}$$

A — вектор-столбец искомых коэффициентов

$$A = \{a_0, a_1, \dots a_m\}$$

$$F = \{f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_{m+1})\}$$

a — параметр полиномов Чебышева [1].

Из (8) легко находим неизвестный вектор

$$A = [(-a)^n M_0 I^{TT}{}_{m+1} D^n + (-a)^{n-1} M_1 I^{TT}{}_{m+1} D^{n-1} + \dots + M_n I^{TT}{}_{m+1}]^{-1} F. \tag{9}$$

Используя далее (6), можно получить аналитическое выражение приближенного решения.

Как показали непосредственные расчеты, обратная матрица выражения (9) оказывается неустойчивой. С целью преодоления такого рода некорректности эффективным оказалось использование переопределенной системы алгебраических уравнений с последующей обработкой ее методом наименьших квадратов. При этом векторно-матричное уравнение будет иметь вид

$$[(-a)^n M'_0 I^{TT}{}_{m+j+1,\, m+1} D^n + (-a)^{n-1} M'_1 I^{TT}{}_{m+j+1,\, m+1} D^{n-1} + \dots +$$
$$+ M'_n I^{TT}{}_{m+j+1,\, m+1}]\, A = F',$$

где M_0', M_1', ..., M_n' — диагональные матрицы вида

$$M'_k = \mathrm{diag}\,\{\varphi^1{}_k(t_1), \varphi^1{}_k(t_2), \dots, \varphi^1{}_k(t_{m+j+1})\} \tag{10}$$

$$F' = \{f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_{m+j+1})\}.$$

$I^{TT}{}_{m+j+1,\, m+1}$ — интерполяционная матрица порядка $m+j+1$, в которой отброшены последние j столбцов (предполагается, что переопределение произведено на j уравнений).

Если обозначить

$$[(-a)^n M'_0 I^{TT}{}_{m+j+1,\, m+1} D^n + (-a)^{n-1} M'_1 I^{TT}{}_{m+j+1,\, m+1} D^{n-1} + \dots +$$
$$+ M'_n I^{TT}{}_{m+j+1,\, m+1}] = B,$$

то задача решения уравнения (10) сводится к вычислению вектора A по формуле

$$A = (\tilde{B}B)^{-1}\tilde{B}F'. \tag{11}$$

где $\tilde{B}$ — матрица, равная транспонированной матрице B.

Матрица преобразования системы. Определение матрицы преобразования различных соединений звеньев

Будем считать, что поведение исследуемой нестационарной динамической системы описывается дифференциальным уравнением вида (1). Тогда задача определения реакции системы на входной сигнал $f(t)$ сводится к решению этого уравнения. При интерполяционном методе решения мы представляем входной сигнал системы в виде вектора, координатами которого являются значения функции $f(t)$ в узлах интерполяции (см. (10).

$$F' = \{f(t_1), f(t_2), \ . \ . \ . \ , f(t_{m+j+1})\} . \qquad (12)$$

С помощью метода интерполирования [2] по найденному вектору коэффициентов (11) решения (6) нетрудно получить вектор приближенных значений выходного сигнала системы в тех же узлах интерполяции, где

$$Y_n - \eta I^{TT}{}_{m+j+1,\, m+1} A = \eta I^{TT}{}_{m+j+1,\, m+1} (\widetilde{B}B)^{-1} \widetilde{B} F' , \qquad (13)$$

η — диагональная матрица, которая в соответствии с (6) имеет вид

$$\eta = \mathrm{diag}\, \{(e^{-at_1} - 1)^n, (e^{-at_2} - 1)^n, \ . \ . \ . \ , (e^{-at_{m+j+1}} - 1)^n\} ,$$

Y_n — вектор выходного сигнала системы

$$Y_n = \{y_n(t_1), y_n(t_2)', \ . \ . \ . \ , y_n(t_{m+j+1})\} . \qquad (14)$$

Обозначив

$$\eta I^{TT}{}_{m+j+1, m+1} (\widetilde{B}B)^{-1} \widetilde{B} = W ,$$

окончательно найдем

$$Y_n = WF^1. \qquad (15)$$

Назовем матрицу W матрицей преобразования системы.

Таким образом, если для заданной динамической системы (1) входным сигналом считать вектор (12), а выходным — вектор (14), то, согласно (15), существует матрица W, устанавливающая связь между входным и выходным сигналами системы. Эта матрица, как видно, не зависит от приложенного воздействия, а целиком определяется структурой исходного дифференциального уравнения, описывающего систему, и, следовательно, характеризует свойства самой системы. Зная матрицу преобразования, можно с помощью элементарной операции матричного умножения найти вектор приближенных значений реакции исследуемой системы на любой входной сигнал, заданный в виде точечного вектора (12).

Матрицы преобразования различных соединений звеньев могут быть найдены по матрицам преобразования звеньев с помощью несложных алгебраических операций. Так, для последовательного соединения m звеньев, имеющих матрицы преобразования W_1, W_2, ..., W_m,

$$W = W_m W_{m-1} \ ..., \ W_1, \qquad (16)$$

причем в силу некоммутативности произведения матриц перестановка матриц в полученном выражении является недопустимой.

Для параллельного соединения m звеньев с матрицами преобразования W_1, W_2, ..., W_m

$$W = W_1 + W_2 + ... + W_m. \qquad (17)$$

Матрица преобразования системы, охваченной обратной связью, определяется формулой

$$W = (E + W_1 \cdot W_2)^{-1} W_1, \qquad (18)$$

где

W_1 — матрица преобразования прямой цепи;

W_2 — матрица преобразования звена обратной связи;

E — единичная матрица.

Выражения (16), (17), (18) напоминают аналогичные соотношения для систем с постоянными параметрами.

Определение вероятностных характеристик выходных процессов нестационарных систем

Как следует из изложенного выше, при известной матрице преобразования системы, описываемой уравнением (1), выходной случайный вектор Y_n может быть найден по входному случайному вектору F' по формуле (15).

Для определения корреляционной функции выходного сигнала системы прежде всего восстановим его как функцию времени по своему точечному вектору, воспользовавшись процессом интерполирования.

Коэффициенты ряда Фурье—Чебышева находим по выражению [2]

$$A = \frac{2}{m+j+1}\widetilde{T}^{TT}{}_{m+j+1}Y_n = \frac{2}{m+j+1}\widetilde{T}^{TT}{}_{m+j+1}WF'. \tag{19}$$

Тогда случайную функцию выходного процесса системы можно приближенно представить в виде

$$y(t) = \widetilde{T}(t)A = \widetilde{T}(t)\frac{2}{m+j+1}\widetilde{T}^{TT}{}_{m+j+1}WF'_t, \tag{20}$$

где $\widetilde{T}(t)$ — вектор-строка полиномов Чебышева

$$\widetilde{T}(t) = \{T^*{}_0(t), T^*{}_1(t), \dots, T^*{}_{m+j}(t)\}.$$

Индекс t при векторе F' означает, что случайная функция $f(t)$, из которой образован вектор F' также является функцией аргумента t. Аналогично найдем

$$y(\tau) = \widetilde{T}(\tau)\frac{2}{m+j+1}\widetilde{T}^{TT}{}_{m+j+1}WF'_\tau \tag{21}$$

или, что равносильно,

$$y(\tau) = \frac{2}{m+j+1}\widetilde{F}'_\tau\widetilde{W}\widetilde{T}^{TT}{}_{m+j+1}T(\tau), \tag{22}$$

где

$T(\tau)$ — вектор-столбец полиномов Чебышева,

$\widetilde{F}'(\tau)$ — вектор-строка.

Теперь образуем произведение

$$y(t)y(\tau) = \widetilde{T}(t)\frac{2}{m+j+1}\widetilde{T}^{TT}{}_{m+j+1}WF'_t\frac{2}{m+j+1}\widetilde{F}'_\tau\widetilde{W}\widetilde{T}^{TT}{}_{m+j+1}T(\tau)$$

и усредним его по множеству реализаций

$$\overline{y(t)\,y(\tau)} = \frac{4}{(m+j+1)^2}\widetilde{T}(t)\widetilde{T}^{TT}{}_{m+j+1}W\cdot\overline{F'_t\widetilde{F}'_\tau}\,\widetilde{W}\widetilde{T}^{TT}{}_{m+j+1}T(\tau). \tag{23}$$

Левая часть полученного выражения есть корреляционная функция выходного процесса исследуемой системы $K_y(t,\tau)$. Усредненное произведение вектора-столбца F'_t на вектор-строку $\widetilde{F}'_\tau$ представляет собой матрицу корреляционных моментов вида

$$K_f(t_i,\tau_i) = \begin{vmatrix} K_f(t_1,\tau_1) & K_f(t_1,\tau_2) & \dots & K_f(t_1,\tau_{m+j+1}) \\ K_f(t_2,\tau_1) & K_f(t_2,\tau_2) & \dots & K_f(t_2,\tau_{m+j+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_f(t_{m+j+1},\tau_1) & K_f(t_{m+j+1},\tau_2) & \dots & K_f(t_{m+j+1},\tau_{m+j+1}) \end{vmatrix}$$

С учетом этого выражения (23) запишем в следующей форме:

$$K_{\mathrm{y}}(t, \tau) = \frac{4}{(m + \mathrm{j} + 1)^2} \widetilde{T}(t) \widetilde{I}^{\mathrm{TT}}{}_{\mathrm{m+j+1}} W K_{\mathrm{f}}(t_{\mathrm{i}}, \tau_{\mathrm{i}}) \widetilde{W} \widetilde{I}^{\mathrm{TT}}{}_{\mathrm{m+j+1}} T(\tau). \quad (24)$$

Для нахождения математического ожидания выходного случайного процесса достаточно проинтегрировать интерполяционным методом исходное дифференциальное уравнение системы (1) при $f(t) = m_{\mathrm{f}}(t)$ — математическое ожидание входного случайного сигнала.

Можно показать, что определение статистических характеристик выходного процесса системы, вызванного приложением нескольких случайных воздействий, производится по формулам, аналогичным (24).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Осипов. Экспоненциальные полиномы и разложение некоторых типовых сигналов. «Изв. ТПИ», т. 180. Томск, 1970.
2. В. М. Осипов. Приближение функций времени методом интерполирования. «Изв. ТПИ», т. 191. Томск, 1969.