

УДК 519.2:621.391

КОЛИЧЕСТВО ИНФОРМАЦИИ ПО ШЕННОНУ В СОВМЕСТНОЙ ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИИ, ИНТЕРПОЛЯЦИИ И ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ПО НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ С ПАМЯТЬЮ

Н.С. Демин, С.В. Рожкова*

Томский государственный университет

*Томский политехнический университет

E-mail: svrhm@rambler.ru

Рассматривается информационный аспект совместной задачи фильтрации, интерполяции и экстраполяции стохастических процессов по непрерывно-дискретным наблюдениям с фиксированной памятью. Исследуется структура количества информации.

1. Введение

В [1] был введен и исследован комплекс задач обобщенной скользящей экстраполяции (как наиболее общий вид экстраполяции) стохастических процессов с непрерывным временем по совокупности реализаций процессов с непрерывным и дискретным временем, которые зависят не только от текущих, но и от произвольного числа прошлых значений ненаблюдаемого процесса. В связи с тем, что всякое оценивание связано с извлечением информации из наблюдений, то любая статистическая задача имеет информационный аспект [2]. В [3, 4] рассмотрен информационный аспект задачи фильтрации в случае наблюдений без памяти и с памятью единичной кратности, в [5] – совместной задачи фильтрации и обобщенной экстраполяции в случае произвольной памяти, в [6] – исследована структура в совместной задаче фильтрации и экстраполяции с произвольной памятью, а в [7, 8] – в совместной задаче фильтрации и интерполяции. В данной работе рассматриваются вопросы нахождения шенноновских мер количества информации в совместной задаче фильтрации, интерполяции и экстраполяции по непрерывно-дискретным наблюдениям с произвольной памятью. Используемые обозначения: $M\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $P\{\cdot\}$ – вероятность события; $N\{y; a; B\}$ – гауссовская плотность.

2. Постановка задачи

Ненаблюдаемый n -мерный процесс x_t и наблюдаемый l -мерный процесс z_t определяются стохастическими дифференциальными уравнениями

$$dx_t = f(t, x_t)dt + \Phi_1(t)dw_t, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$dz_t = h(t, x_t, x_{t_1}, \dots, x_{t_N}, z)dt + \Phi_2(t, z)dv_t, \quad (2)$$

а наблюдаемый q -мерный процесс $\eta(t_m)$ с дискретным временем имеет вид

$$\eta(t_m) = g(t_m, x_{t_m}, x_{t_1}, \dots, x_{t_N}, z) + \Phi_3(t_m, z)\xi(t_m), \quad (3)$$
$$m = 0, 1, \dots,$$

где $0 < t_N < t_1 < t_m \leq t$, т. е. память фиксированная [1]. Предполагается: 1) w_t и v_t являются стандартными винеровскими процессами размеров r_1 и r_2 , $\xi(t_m)$ – стандартная белая гауссовская последовательность размера r_3 ; 2) $x_0, w_t, v_t, \xi(t_m)$ – статистически независимы; 3) $f(\cdot), h(\cdot), g(\cdot), \Phi_1(\cdot), \Phi_2(\cdot), \Phi_3(\cdot)$ непрерывны по всем аргументам; 4) $Q(\cdot) = \Phi_1(\cdot)\Phi_1^T(\cdot) > 0$, $R(\cdot) = \Phi_2(\cdot)\Phi_2^T(\cdot) > 0$, $V(\cdot) = \Phi_3(\cdot)\Phi_3^T(\cdot) > 0$; 5) задана начальная плотность $p_0(x) = dP\{x_0 \leq x\}/dx$.

В целях более компактной записи математических выражений введем оператор

$$L_{\sigma, y}[\varphi_1(\sigma, y); \varphi_2(\sigma, y)] = \frac{\varphi_1(\sigma, y)}{\varphi_2(\sigma, y)} L_{\sigma, y}[\varphi_2(\sigma, y)] - \varphi_2(\sigma, y) L_{\sigma, y}^* \left[\frac{\varphi_1(\sigma, y)}{\varphi_2(\sigma, y)} \right], \quad (4)$$

где $L_{\sigma,y}[\varphi(\sigma,y)]$ и $L_{\sigma,y}^*[\varphi(\sigma,y)]$ – прямой и обратный операторы Колмогорова, соответствующие процессу (1), и расширенные переменные

$$\tilde{x}_\tau^N = \begin{bmatrix} x_{\tau_1} \\ \vdots \\ x_{\tau_N} \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_s^L = \begin{bmatrix} x_{s_1} \\ \vdots \\ x_{s_L} \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix},$$

$$\tilde{x}^L = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^L \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_{N+L+1} = \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x}_N \\ \tilde{x}^L \end{bmatrix}.$$

Ставится задача: найти информационное количество

$$I'_{\tau,t,s}[\tilde{x}_\tau^N, x_t, \tilde{x}_s^L; z'_0, \eta_0^m] = M \left\{ \ln \frac{p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x; \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L)} \right\} \quad (5)$$

о текущих x_t , прошлых $\tilde{x}_\tau^N = \{x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \dots, x_{\tau_N}\}$ и будущих $\tilde{x}_s^L = \{x_{s_1}, x_{s_2}, \dots, x_{s_L}\}$ значениях ненаблюдаемого процесса, которые содержатся в совокупности реализаций $z'_0 = \{z(\sigma); 0 \leq \sigma \leq t\}$ и $\eta_0^m = \{\eta(t_0), \eta(t_1), \dots, \eta(t_m)\}$ наблюдаемых процессов (2), (3), где

$$p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x; \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L) = \partial^{N+L+1} \mathbf{P} \{x_t \leq x; \tilde{x}_\tau^N \leq \tilde{x}_N; \tilde{x}_s^L \leq \tilde{x}^L\} / \partial x \partial \tilde{x}_N \partial \tilde{x}^L, \quad (6)$$

$$p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x; \tilde{x}_s^L) = \partial^{N+L+1} \mathbf{P} \{x_t \leq x; \tilde{x}_\tau^N \leq \tilde{x}_N; \tilde{x}_s^L \leq \tilde{x}^L \mid z'_0, \eta_0^m\} / \partial x \partial \tilde{x}_N \partial \tilde{x}^L. \quad (7)$$

3. Общий случай

Утверждение 1. Плотность (7) на интервалах $t_m \leq t < t_{m+1}$ определяется уравнением

$$d_t p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x; \tilde{x}_s^L) = \mathbf{L}_{t,x} [p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x; \tilde{x}_s^L); p_t(x; \tilde{x}_N)] dt + p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x; \tilde{x}_s^L) [h(t, x, \tilde{x}_N, z) - \overline{h(t, z)}]^T R^{-1}(t, z) [dz_t - \overline{h(t, z)}] \quad (8)$$

с начальным условием

$$p'_{\tau,t_m,s}(\tilde{x}_\tau^N; x; \tilde{x}_s^L) = [c(x, \tilde{x}_N; \eta(t_m), z) / c(\eta(t_m), z)] p_{\tau,t_m,s}^{t_m-0}(\tilde{x}_\tau^N; x; \tilde{x}_s^L), \quad (9)$$

$$p_t(x; \tilde{x}_N) = \partial^{N+1} \mathbf{P} \{x_t \leq x; \tilde{x}_\tau^N \leq \tilde{x}_N \mid z'_0, \eta_0^m\} / \partial x \partial \tilde{x}_N, \quad \overline{h(t, z)} = M \{h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z) \mid z'_0, \eta_0^m\}, \quad (10)$$

$$c(x, \tilde{x}_N, \eta(t_m), z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\eta(t_m) - g(t_m, x, \tilde{x}_N, z)]^T \times \right. \\ \left. \times V^{-1}(t_m, z) [\eta(t_m) - g(t_m, x, \tilde{x}_N, z)] \right\},$$

$$c(\eta(t_m), z) = M \{c(x_{t_m}, \tilde{x}_\tau^N, \eta(t_m), z) \mid z'_0, \eta_0^{m-1}\},$$

$$\text{а } p'_{\tau,t_m,s}(\tilde{x}_\tau^N; x; \tilde{x}_s^L) = \lim_{t \uparrow t_m} p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x; \tilde{x}_s^L) \text{ при } t \uparrow t_m.$$

Данное утверждение следует из Теоремы 1 и Следствия 1 в [1].

Теорема. 1. Количество информации (5) на интервалах $t_m \leq t < t_{m+1}$ определяется уравнением

$$\frac{dI'_{\tau,t,s}[\tilde{x}_\tau^N, x_t, \tilde{x}_s^L; z'_0, \eta_0^m]}{dt} = \frac{1}{2} \text{tr} [M [R^{-1}(t, z) [h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z) - \overline{h(t, z)}] \times \\ \times [h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z) - \overline{h(t, z)}]^T] + \\ + \text{tr} \left[Q(t) M \left\{ \left[\frac{\partial \ln p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} - \frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right)^T \right] \right\} - \\ - \text{tr} \left[Q(t) M \left\{ \left[\frac{\partial \ln p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x_t; \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \frac{\partial \ln p(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{\partial \ln p(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right)^T \right] \right\} - \\ - \frac{1}{2} \text{tr} \left[Q(t) M \left\{ \frac{\partial \ln p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} \left(\frac{\partial \ln p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} \right)^T - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial \ln p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x_t; \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} \left(\frac{\partial \ln p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x_t; \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} \right)^T \right\} \right] \quad (11)$$

с начальным условием

$$I'_{\tau,t_m,s}[\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}, \tilde{x}_s^L; z'_0, \eta_0^m] = I'_{\tau,t_m,s}^{t_m-0}[\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}, \tilde{x}_s^L; z'_0, \eta_0^{m-1}] + \Delta I'_{\tau,t_m,s}[\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}, \tilde{x}_s^L; z'_0, \eta(t_m)], \quad (12)$$

где

$$p(t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N) = \partial^{N+1} \mathbf{P} \{x_t \leq x; \tilde{x}_\tau^N \leq \tilde{x}_N\} / \partial x \partial \tilde{x}_N,$$

$$\Delta I'_{\tau,t_m,s}[\cdot] = M \left\{ \frac{c(x_{t_m}, \tilde{x}_\tau^N, \eta(t_m), z)}{c(\eta(t_m), z)} \right\},$$

$$\text{а } I'_{\tau,t_m,s}^{t_m-0}[\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}, \tilde{x}_s^L; z'_0, \eta_0^{m-1}] = \lim_{t \uparrow t_m} I'_{\tau,t,s}[\cdot] \text{ при } t \uparrow t_m.$$

Доказательство. Совместная априорная плотность (6) определяется уравнением

$$d_t p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x; \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L) = \mathbf{L}_{t,x} [p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x; \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L); p(t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N)] dt,$$

которое следует из (8). Обновляющий процесс $\tilde{z}_t$, дифференциал которого имеет вид $d\tilde{z}_t = dz_t - \overline{h(t, \tilde{z})} dt$, является таким, что $Z_t = (\tilde{z}_t, F_t)$ есть винеровский процесс с $M\{\tilde{z}_t, \tilde{z}_t^T | F_t\} = \int_0^t R(\tau, z) d\tau$ [9]. Тогда дифференцирование по формуле Ито дает, что

$$\begin{aligned}
 & d_t \ln \frac{p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L)}{p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x; \tilde{s}_L, \tilde{x}^L)} = \\
 & = \frac{1}{p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L)} \mathbf{L}_{t,x} [p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L); p_t(x; \tilde{x}_N)] dt - \\
 & \quad - \frac{1}{p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x; \tilde{s}_L, \tilde{x}^L)} \times \\
 & \quad \times \mathbf{L}_{t,x} [p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x; \tilde{s}_L, \tilde{x}^L); p(t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N)] dt - \\
 & \quad - \frac{1}{2} [h(t, x, \tilde{x}_N, z) - \overline{h(t, z)}]^T \times \\
 & \quad \times R^{-1}(t, z) [h(t, x, \tilde{x}_N, z) - \overline{h(t, z)}] dt + \\
 & \quad + [h(t, x, \tilde{x}_N, z) - \overline{h(t, z)}]^T R^{-1}(t, z) [dz_t - \overline{h(t, z)}].
 \end{aligned}$$

Применяя к последнему выражению формулу Ито-Вентцеля, получаем аналогично [3, 4, 7], что

$$\begin{aligned}
 & d_t \ln \frac{p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x_t; \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L)} = \\
 & = \frac{1}{2} [h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z) - \overline{h(t, z)}]^T \times \\
 & \quad \times R^{-1}(t, z) [h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z) - \overline{h(t, z)}] dt + \\
 & \quad + \text{tr} \left[Q(t) \left[\frac{1}{p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)} \frac{\partial^2 p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t^2} - \frac{1}{p(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N)} \frac{\partial^2 p(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t^2} \right] \right] dt + \\
 & \quad + \text{tr} \left[Q(t) \left[\frac{\partial \ln p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} - \frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right] \left(\frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right)^T \right] dt - \\
 & \quad - \text{tr} \left[Q(t) \left[\frac{\partial \ln p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x_t; \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} - \frac{\partial \ln p(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right] \times \right. \\
 & \quad \left. \times \left(\frac{\partial \ln p(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right)^T \right] dt - \\
 & \quad - \frac{1}{2} \text{tr} \left[Q(t) \left[\frac{\partial \ln p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} (\cdot)^T - \frac{\partial \ln p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x_t; \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} (\cdot)^T \right] \right] dt + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial x_t} \ln \frac{p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x_t; \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L)} \Phi_1(t) dw_t + \\
 & \quad + [h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z) - \overline{h(t, z)}]^T R^{-1}(t, z) \Phi_2(t, z) dv_t.
 \end{aligned}$$

Дальнейшие преобразования по выводу уравнения (11) повторяют преобразования по выводу уравнения (3.8) в [5], а подстановка (9) в (5) приводит к (12). Теорема доказана.

Терема 2. Пусть

$$I'_{s|\tau,t}[\tilde{x}_s^L; z'_0, \eta_0^m | \tilde{x}_\tau^N, x_t] = M \left\{ \ln \frac{p'_{s|\tau,t}(\tilde{x}_s^L | \tilde{x}_\tau^N; x_t)}{p(\tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L | \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x_t)} \right\}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 & p(\tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L | \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x) = \\
 & = \partial^L \mathbf{P} \{ \tilde{x}_s^L \leq \tilde{x}^L | \tilde{x}_\tau^N \leq \tilde{x}_N; x_t \leq x \} / \partial \tilde{x}^L, \\
 & p'_{s|\tau,t}(\tilde{x}_s^L | \tilde{x}_\tau^N; x) = \\
 & = \partial^L \mathbf{P} \{ \tilde{x}_s^L \leq \tilde{x}^L | \tilde{x}_\tau^N \leq \tilde{x}_N; x_t \leq x; z'_0, \eta_0^m \} / \partial \tilde{x}^L,
 \end{aligned}$$

есть условное количество информации о будущих значениях процесса x_t при фиксированных прошлых и текущих значениях этого процесса, которое содержится в совокупности реализаций $\{z'_0; \eta_0^m\}$,

$$I'_{\tau,t}[\tilde{x}_\tau^N, x_t; z'_0, \eta_0^m] = M \left\{ \ln \frac{p'_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{p(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N)} \right\}, \quad (14)$$

есть количество информации о прошлых и текущих значениях процесса x_t , которое содержится в совокупности реализаций $\{z'_0; \eta_0^m\}$. Тогда количество информации (5) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
 & I'_{\tau,t,s}[\tilde{x}_\tau^N, x_t, \tilde{x}_s^L; z'_0, \eta_0^m] = \\
 & I'_{s|\tau,t}[\tilde{x}_s^L; z'_0, \eta_0^m | \tilde{x}_\tau^N, x_t] + I'_{\tau,t}[\tilde{x}_\tau^N, x_t; z'_0, \eta_0^m], \quad (15)
 \end{aligned}$$

где $I'_{s|\tau,t}[\tilde{x}_s^L; z'_0, \eta_0^m | \tilde{x}_\tau^N, x_t]$ и $I'_{\tau,t}[\tilde{x}_\tau^N, x_t; z'_0, \eta_0^m]$ на интервалах $t_m \leq t < t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$\begin{aligned}
 & dI'_{s|\tau,t}[\tilde{x}_s^L; z'_0, \eta_0^m | \tilde{x}_\tau^N, x_t] / dt = \\
 & = -\frac{1}{2} \text{tr} \left[Q(t) M \left\{ \frac{\partial \ln p'_{s|\tau,t}(\tilde{x}_s^L | \tilde{x}_\tau^N, x_t)}{\partial x_t} \times \right. \right. \\
 & \quad \times \left(\frac{\partial \ln p'_{s|\tau,t}(\tilde{x}_s^L | \tilde{x}_\tau^N, x_t)}{\partial x_t} \right)^T - \\
 & \quad - \frac{\partial \ln p(\tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L | \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x_t)}{\partial x_t} \times \\
 & \quad \left. \left. \times \left(\frac{\partial \ln p(\tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L | \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x_t)}{\partial x_t} \right)^T \right\} \right], \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{dI'_{\tau,t}[\tilde{x}_\tau^N, x_t; z'_0, \eta_0^m]}{dt} = \\
 & = (1/2) \text{tr} \left[M \left\{ R^{-1}(t, z) [h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z) - \overline{h(t, z)}] \times \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \times [h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z) - \overline{h(t, z)}]^T \right\} \right] - \\
 & - \frac{1}{2} \text{tr} \left[Q(t) M \left\{ \frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \left(\frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right)^T - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{\partial \ln p(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \left(\frac{\partial \ln p(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right)^T \right\} \right] \quad (17)
 \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned}
 & I'_{s|\tau,t_m}[\tilde{x}_s^L; z'_0, \eta_0^m | \tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}] = \\
 & = I'_{s|\tau,t_m}[\tilde{x}_s^L; z'_0, \eta_0^{m-1} | \tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}] + \\
 & + \Delta I'_{s|\tau,t_m}[\tilde{x}_s^L; z'_0, \eta(t_m) | \tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}], \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$I_{\tau, t_m}^{t_m} [\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}; z_0^m, \eta_0^m] = \\ = I_{\tau, t_m}^{t_m-0} [\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}; z_0^m, \eta_0^{m-1}] + \Delta I_{\tau, t_m}^{t_m} [\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}; z_0^m, \eta(t_m)], \quad (19)$$

где

$$\Delta I_{\tau, t_m}^{t_m} [\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}; z_0^m, \eta(t_m)] = \\ = M \left\{ \ln \frac{c(x_{t_m}, \tilde{x}_\tau^N, \eta(t_m), z)}{c(\eta(t_m), z | \tilde{x}_\tau^N, x_{t_m})} \right\}, \quad (20)$$

$$\Delta I_{\tau, t_m}^{t_m} [\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}; z_0^m, \eta(t_m)] = \\ = M \left\{ \ln \frac{c(\eta(t_m), z | \tilde{x}_\tau^N, x_{t_m})}{c(\eta(t_m), z)} \right\}, \quad (21)$$

$$c(\eta(t_m), z | \tilde{x}_N, x) = \\ = M \{ c(x_{t_m}, \tilde{x}_\tau^N, \eta(t_m), z) | \tilde{x}_\tau^N = \tilde{x}_N, x_t = x, z_0^m, \eta_0^{m-1} \},$$

а $I_{\tau, t_m}^{t_m-0} [\cdot] = \lim_{s \uparrow t_m} I_{\tau, s}^t [\cdot]$, $I_{\tau, t_m}^{t_m-0} [\cdot] = \lim_{t \uparrow t_m} I_{\tau, t}^t [\cdot]$ при $t \uparrow t_m$.

Доказательство. По формуле условной вероятности

$$p_{\tau, t, s}^t (\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L) = p_{\tau, t, s}^t (\tilde{x}^L | \tilde{x}_N; x) p_t (x; \tilde{x}_N), \quad (22)$$

$$p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x; \tilde{s}_L, \tilde{x}^L) = \\ = p(\tilde{s}_L, \tilde{x}^L | \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x) p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x). \quad (23)$$

Подстановка (22), (23) в (5) с учетом (13), (14) приводит к (15). Плотность $p(x; \tilde{x}_N)$ удовлетворяет уравнению [7]

$$d_t p_t (x; \tilde{x}_N) = L_{t, x} [p_t (x; \tilde{x}_N)] dt + \\ + p_t (x; \tilde{x}_N) [h(t, x, \tilde{x}_N, z) - \overline{h(t, z)}]^T \times \\ \times R^{-1} (t, z) [dz_t - \overline{h(t, z) dt}]. \quad (24)$$

Дифференцируя

$$p_{s|\tau, t}^t (\tilde{x}^L | \tilde{x}_N; x) = p_{\tau, t, s}^t (\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L) / p_t (x; \tilde{x}_N)$$

по формуле Ито с использованием (8), (24), получаем

$$d_t p_{s|\tau, t}^t (\tilde{x}^L | \tilde{x}_N; x) = -L_{t, x}^* [p_{s|\tau, t}^t (\tilde{x}^L | \tilde{x}_N; x)] dt.$$

Априорная плотность $p(\tilde{s}_L, \tilde{x}^L | \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x)$ определяется уравнением того же типа, что и $p_{s|\tau, t}^t (\tilde{x}^L | \tilde{x}_N; x)$, т. е. уравнением

$$d_t p(\tilde{s}_L, \tilde{x}^L | \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x) = -L_{t, x}^* [p(\tilde{s}_L, \tilde{x}^L | \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x)] dt.$$

Дальнейший вывод уравнения (16) проводится с использованием формул Ито и Ито-Венцеля по методике вывода уравнения (11). Уравнение (17) выводится аналогично (16) с использованием (24) с учетом того что $d_t p(t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N) = L_{t, x} [p(t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N)] dt$ (см. [7]). Интегрирование (9) слева и справа по x с учетом (22) дает, что

$$p_{\tau, t_m}^{t_m} (x; \tilde{x}_N) = \frac{c(\eta(t_m), z | \tilde{x}_\tau^N, x_{t_m})}{c(\eta(t_m), z)} p_{\tau, t_m}^{t_m-0} (x; \tilde{x}_N). \quad (25)$$

Поделив (9) на (25) получаем с учетом (22), что

$$p_{s|\tau, t_m}^{t_m} (\tilde{x}^L | \tilde{x}_N; x) = \frac{c(x; \tilde{x}_N, \eta(t_m), z)}{c(\eta(t_m), z | \tilde{x}_N, x)} p_{s|\tau, t_m}^{t_m-0} (\tilde{x}^L | \tilde{x}_N; x). \quad (26)$$

Использование (26) в (13) приводит с учетом (20) к (18). Использование (25) (14) приводит с учетом (21) к (19).

4. Условно-гауссовский случай

Утверждение 2. Пусть

$$f(\cdot) = F(t) x_t, \quad p_0(x) = N\{x; \mu_0; \Gamma_0\}, \\ h(\cdot) = H_0(t, z) x_t + \sum_{k=1}^N H_k(t, z) x_{\tau_k}, \\ g(\cdot) = G_0(t_m, z) x_t + \sum_{k=1}^N G_k(t_m, z) x_{\tau_k}. \quad (27)$$

Тогда имеет место свойство

$$p_{\tau, t, s}^t (\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L) = \\ = N \{ \tilde{x}_{N+L+1}; \tilde{\mu}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L), \tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L) \} = \\ = N \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x}_N \\ \tilde{x}^L \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mu(t) \\ \tilde{\mu}_N(\tilde{\tau}_N, t) \\ \tilde{\mu}^L(\tilde{s}_L, t) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \Gamma(t) & \tilde{\Gamma}_{0N}(\tilde{\tau}_N, t) & \tilde{\Gamma}_{0N+1}^L(\tilde{s}_L, t) \\ \tilde{\Gamma}_{0N}^T(\cdot) & \tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N, t) & \tilde{\Gamma}_{N, N+1}^L(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L) \\ (\tilde{\Gamma}_{0N+1}^L(\cdot))^T & (\tilde{\Gamma}_{N, N+1}^L(\cdot))^T & \tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L, t) \end{bmatrix} \end{array} \right], \quad (28)$$

где блочные составляющие параметров распределения (28) определяются дифференциально-рекуррентными уравнениями в [1].

Теорема 3. Пусть выполняется условие (27). Тогда количество информации (5) на интервалах $t_m \leq t < t_{m+1}$ определяется уравнением

$$\frac{dI_{\tau, t, s}^t [\tilde{x}_\tau^N, x_t, \tilde{x}_s^L; z_0^m, \eta_0^m]}{dt} = \\ = (1/2) \text{tr} \left[M \{ R^{-1}(t, z) H_{0, N}(t, z) \times \right. \\ \left. \times \tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) H_{0, N}^T(t, z) \} \right] - \\ - (1/2) \text{tr} \left[Q(t) M \{ \Gamma^{-1}(t | \tilde{s}_L) + \right. \\ \left. + \Gamma^{-1}(t | \tilde{\tau}_N) - \Gamma^{-1}(t) \} \right] + \\ + (1/2) \text{tr} \left[Q(t) [D^{-1}(t | \tilde{s}_L) + \right. \\ \left. + D^{-1}(t | \tilde{\tau}_N) - D^{-1}(t)] \right] \quad (29)$$

с начальным условием (12), где

$$\Delta I_{\tau, t_m, s}^{t_m} [\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}, \tilde{x}_s^L; z_0^m, \eta(t_m)] = \\ = \frac{1}{2} M \left\{ \ln \frac{|\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0, \tilde{s}_L)|}{|\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m, \tilde{s}_L)|} \right\}, \quad (30)$$

$$H_{0, N}(t, z) = [H_0(t, z) | H_1(t, z) | \dots | H_N(t, z)],$$

$$\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) = \begin{bmatrix} \Gamma(t) & \tilde{\Gamma}_{0N}(\tilde{\tau}_N, t) \\ \tilde{\Gamma}_{0N}^T(\tilde{\tau}_N, t) & \tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N, t) \end{bmatrix},$$

$$\Gamma(t | \tilde{\tau}_N) = \Gamma(t) - \tilde{\Gamma}_{0N}(\tilde{\tau}_N, t) \tilde{\Gamma}_N^{-1}(\tilde{\tau}_N, t) \tilde{\Gamma}_{0N}^T(\tilde{\tau}_N, t), \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(t | \tilde{s}_L) &= \\ &= \Gamma(t) - \tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(\tilde{s}_L, t) (\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L, t))^{-1} (\tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(\tilde{s}_L, t))^T, \quad (32) \end{aligned}$$

$$D(t | \tilde{\tau}_N) = D(t) - \tilde{D}_{0N}(\tilde{\tau}_N, t) \tilde{D}_N^{-1}(\tilde{\tau}_N, t) \tilde{D}_{0N}^T(\tilde{\tau}_N, t), \quad (33)$$

$$\begin{aligned} D(t | \tilde{s}_L) &= \\ &= D(t) - \tilde{D}_{0,N+1}^L(\tilde{s}_L, t) (\tilde{D}^L(\tilde{s}_L, t))^{-1} (\tilde{D}_{0,N+1}^L(\tilde{s}_L, t))^T, \end{aligned}$$

$D(t)$, $\tilde{D}_{0N}(\tilde{\tau}_N, t)$, $\tilde{D}_N(\tilde{\tau}_N, t)$, $\tilde{D}_{0,N+1}^L(\tilde{s}_L, t)$, $\tilde{D}^L(\tilde{s}_L, t)$ – блочные составляющие матрицы вторых моментов $\tilde{D}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L)$ априорного гауссовского распределения

$$\begin{aligned} p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x; \tilde{s}_L, \tilde{x}^L) &= \\ &= \mathbf{N}\{\tilde{x}_{N+L+1}; \tilde{a}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L), \tilde{D}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L)\}, \end{aligned}$$

блочная структура параметров которого аналогична блочной структуре параметров распределения (28).

Доказательство. По свойству гауссовских плотностей имеет место свойство [9]

$$p_{t|t}^t(x | \tilde{x}_N) = \mathbf{N}\{x; \mu(t | \tilde{\tau}_N), \Gamma(t | \tilde{\tau}_N)\}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \mu(t | \tilde{\tau}_N) &= \\ &= \mu(t) + \tilde{\Gamma}_{0N}(\tilde{\tau}_N, t) (\tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N, t))^{-1} [\tilde{x}_N - \tilde{\mu}_N(\tilde{\tau}_N, t)], \end{aligned}$$

а $\Gamma(t | \tilde{\tau}_N)$ определено в (31). Из (10), (27), (28) следует, что

$$\begin{aligned} \overline{h(t, z)} &= H_{0,N}(t, z) \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t), \\ h(t, x_t, \tilde{x}_t^N, z) - \overline{h(t, z)} &= \\ &= H_{0,N}(t, z) [\tilde{x}_t^{N+1} - \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t)], \\ M\{[h(t, x_t, \tilde{x}_t^N, z) - \overline{h(t, z)}][h(t, x_t, \tilde{x}_t^N, z) - \overline{h(t, z)}]^T\} &= \\ &= H_{0,N}(t, z) \tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) H_{0N}^T(t, z), \quad (35) \end{aligned}$$

$$\text{где } \mu_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) = \begin{bmatrix} \mu(t) \\ \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_t^{N+1} = \begin{bmatrix} x_t \\ \tilde{x}_t^N \end{bmatrix}.$$

Так как $p_t(x_t; \tilde{x}_t^N) = p_{t|t}(x_t; \tilde{x}_t^N) p_t(\tilde{x}_t^N)$, то с учетом (34)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_t^N)}{\partial x_t} &= \frac{\partial \ln p_{t|t}(x_t | \tilde{x}_t^N)}{\partial x_t} = \\ &= -\Gamma^{-1}(t | \tilde{\tau}_N) [x_t - \mu(t | \tilde{\tau}_N)], \\ M \left\{ \frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_t^N)}{\partial x_t} \left(\frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_t^N)}{\partial x_t} \right)^T \right\} &= \Gamma^{-1}(t | \tilde{\tau}_N). \quad (36) \end{aligned}$$

По формуле условной вероятности

$$\begin{aligned} p_{t,t,s}^t(\tilde{x}_t^N; x_t; \tilde{x}_s^L) &= \\ &= \frac{p_{t|s}(x_t | \tilde{x}_s^L)}{p_t(x_t)} p_{t|t}(x_t | \tilde{x}_t^N) p_t(\tilde{x}_t^N) p_s(\tilde{x}_s^L). \quad (37) \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} M \left\{ \frac{\partial \ln p_{t,t,s}^t(\tilde{x}_t^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} \left(\frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_t^N)}{\partial x_t} \right)^T \right\} &= \\ &= M \left\{ \frac{\partial \ln p_{t|s}(x_t | \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} \left(\frac{\partial \ln p_{t|t}(x_t | \tilde{x}_t^N)}{\partial x_t} \right)^T \right\} + \\ &+ M \left\{ \frac{\partial \ln p_{t|t}(x_t | \tilde{x}_t^N)}{\partial x_t} \left(\frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_t^N)}{\partial x_t} \right)^T \right\} - \\ &- M \left\{ \frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_t^N)}{\partial x_t} \left(\frac{\partial \ln p_{t|t}(x_t | \tilde{x}_t^N)}{\partial x_t} \right)^T \right\}. \quad (38) \end{aligned}$$

Аналогично (34)

$$p_{t|s}(x | \tilde{x}^L) = \mathbf{N}\{x; \mu(t | \tilde{s}_L), \Gamma(t | \tilde{s}_L)\}, \quad (39)$$

$$\mu(t | \tilde{s}_L) =$$

$$= \mu(t) + \tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(\tilde{s}_L, t) (\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L, t))^{-1} [\tilde{x}^L - \tilde{\mu}^L(\tilde{s}_L, t)],$$

а $\Gamma(t | \tilde{s}_L)$ определено в (32). Так как

$$p_s^t(x_t; \tilde{x}_s^L) = p_{t|s}(x_t | \tilde{x}_s^L) p_s(\tilde{x}_s^L),$$

то с учетом (39)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p_s^t(x_t; \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} &= \frac{\partial \ln p_{t|s}(x_t | \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} = \\ &= -\Gamma^{-1}(t | \tilde{s}_L) [x_t - \mu(t | \tilde{s}_L)]. \quad (40) \end{aligned}$$

Тогда из (37), (40) с учетом (34), (39) следует, что

$$M \left\{ \frac{\partial \ln p_{t|s}(x_t | \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} \left(\frac{\partial \ln p_{t|t}(x_t | \tilde{x}_t^N)}{\partial x_t} \right)^T \right\} = \Gamma^{-1}(t). \quad (41)$$

Так как $p_t(x) = \mathbf{N}\{x; \mu(t), \Gamma(t)\}$ [9], то

$$\frac{\partial \ln p_t(x_t)}{\partial x_t} = -\Gamma^{-1}(t) [x_t - \mu(t)], \quad (42)$$

и с учетом (34), (37)

$$M \left\{ \frac{\partial \ln p_t(x_t)}{\partial x_t} \left(\frac{\partial \ln p_{t|t}(x_t | \tilde{x}_t^N)}{\partial x_t} \right)^T \right\} = \Gamma^{-1}(t). \quad (43)$$

Тогда из (37), (38), (41–43)

$$M \left\{ \left[\frac{\partial \ln p_{t,t,s}^t(\tilde{x}_t^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} - \frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_t^N)}{\partial x_t} \right] \times \left[\frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_t^N)}{\partial x_t} \right]^T \right\} = 0. \quad (44)$$

Из (40) следует

$$\begin{aligned} M \left\{ \frac{\partial \ln p_{t|s}(x_t | \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} \left(\frac{\partial \ln p_{t|s}(x_t | \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} \right)^T \right\} &= \\ &= \Gamma^{-1}(t | \tilde{s}_L). \quad (45) \end{aligned}$$

Из (39), (40), (42) следует

$$M \left\{ \frac{\partial \ln p_{t|s}(x_t | \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} \left(\frac{\partial \ln p_t(x_t)}{\partial x_t} \right)^T \right\} = \Gamma^{-1}(t). \quad (46)$$

Из (37), (41), (43), (45), (46) следует

$$M \left\{ \frac{\partial \ln p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} \left(\frac{\partial \ln p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} \right)^T \right\} = \\ = \Gamma^{-1}(t | \tilde{s}_L) + \Gamma^{-1}(t | \tilde{\tau}_N) - \Gamma^{-1}(t). \quad (47)$$

При условиях (27) априорная плотность (6) является гауссовской

$$p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x; \tilde{s}_L, \tilde{x}_L) = \\ = \mathbf{N}\{\tilde{x}_{N+L+1}; \tilde{x}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L), \tilde{D}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L)\}. \quad (48)$$

Тогда для плотности (48) будут справедливы формулы аналогичные (44), (47). Подстановка (35), (39), (47) и формул связанных с (48) аналогичных (44), (47), в (11) приводит к (29). Из (9), (28) следует, что

$$M \left\{ \ln \frac{c(x_{t_m}, \tilde{x}_\tau^N, \eta(t_m), z)}{c(\eta(t_m), z)} \right\} = \\ = \frac{1}{2} M \left\{ \ln \frac{|\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0, \tilde{s}_L)|}{|\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m, \tilde{s}_L)|} \right\},$$

т. е. с учетом (12) пришли к (30). Теорема доказана.

Теорема 4. Количества информации (13) и (14) на интервалах определяются уравнениями

$$dI'_{s|\tau,t}[\tilde{x}_s^L; z_0^m, \eta_0^m | \tilde{x}_\tau^N, x_t] / dt = \\ = -(1/2) \text{tr}[Q(t)M\{\Gamma^{-1}(t | \tilde{s}_L) - \Gamma^{-1}(t)\}] + \\ + (1/2) \text{tr}[Q(t)[D^{-1}(t | \tilde{s}_L) - D^{-1}(t)]], \quad (49)$$

$$dI'_{\tau,t}[\tilde{x}_\tau^N; x_t; z_0^m, \eta_0^m] / dt = \\ = (1/2) \text{tr} \left[M \left\{ \begin{aligned} &R^{-1}(t, z) H_{0,N}(t, z_t) \times \\ &\times \tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) H_{0,N}^T(t, z_t) \end{aligned} \right\} \right] - \\ - (1/2) \text{tr}[Q(t)M\{\Gamma^{-1}(t | \tilde{\tau}_N)\}] + \\ + (1/2) \text{tr}[Q(t)D^{-1}(t | \tilde{\tau}_N)] \quad (50)$$

с начальными условиями (18), (19), где

$$\Delta I'_{s|\tau,t_m}[\tilde{x}_s^L; z_0^m, \eta(t_m) | \tilde{x}_\tau^N, x_m] = \\ = \frac{1}{2} M \left\{ \ln \frac{|\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L | \tilde{\tau}_N, t_m - 0)|}{|\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L | \tilde{\tau}_N, t_m)|} \right\}, \quad (51)$$

$$\Delta I'_{\tau,t_m}[\tilde{x}_\tau^N; x_m; z_0^m, \eta(t_m)] = \\ = \frac{1}{2} M \left\{ \ln \frac{|\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0)|}{|\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t_m)|} \right\}, \quad (52)$$

$$\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L | \tilde{\tau}_N, t) = \tilde{\Gamma}^L(\cdot) - \left[\begin{aligned} &\tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(\tilde{s}_L, t) \\ &\tilde{\Gamma}_{N,N+1}^L(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L) \end{aligned} \right]^T \times \\ \times (\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t))^{-1} \left[\begin{aligned} &\tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(\tilde{s}_L, t) \\ &\tilde{\Gamma}_{N,N+1}^L(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L) \end{aligned} \right]. \quad (53)$$

Доказательство. По формуле условной вероятности

$$p'_{s|\tau,t}(\tilde{x}_s^L | x_t; \tilde{x}_\tau^N) = \frac{p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}.$$

$$\frac{\partial \ln p'_{s|\tau,t}(\tilde{x}_s^L | x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} = \\ \text{Тогда} \quad = \frac{\partial \ln p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} - \frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}. \quad (54)$$

С учетом (37)

$$\frac{\partial \ln p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} = \frac{\partial \ln p_{t|s}(x_t | \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} - \frac{\partial \ln p_t(x_t)}{\partial x_t}. \quad (55)$$

Используя (45), (46) в (55), получаем

$$M \left\{ \frac{\partial \ln p'_{s|\tau,t}(\tilde{x}_s^L | x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \left(\frac{\partial \ln p'_{s|\tau,t}(\tilde{x}_s^L | x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right)^T \right\} = \\ = \Gamma^{-1}(t | \tilde{s}_L) - \Gamma^{-1}(t). \quad (56)$$

Аналогичные вычисления дают

$$M \left\{ \frac{\partial \ln p(\tilde{s}_L, \tilde{x}_L | t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N)}{\partial x_t} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\partial \ln p(\tilde{s}_L, \tilde{x}_L | t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N)}{\partial x_t} \right)^T \right\} = \\ = D^{-1}(t | \tilde{s}_L) - D^{-1}(t). \quad (57)$$

Подстановка (56), (57) в (16) приводит к (49). Уравнение (50) следует непосредственно в результате подстановки (35), (36) и аналогичного соотношения для $p(t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N)$ в (17). Соотношения (51), (52) получаются аналогично (30) с использованием (13), (14). Теорема доказана.

5. Заключение

С использованием результатов [7, 8] получено количество информации по Шеннону в совместной задаче фильтрации, интерполяции и экстраполяции стохастических процессов по непрерывно-дискретным наблюдениям с памятью и исследована ее структура в виде представлений $I'_{\tau,t,s}[\cdot]$ через условное количество информации $I'_{s|\tau,t}[\tilde{x}_s^L; z_0^m, \eta_0^m | \tilde{x}_\tau^N, x_t]$ о будущих значениях процесса при фиксированных прошлых и текущих значениях и количество информации $I'_{\tau,t}[\tilde{x}_\tau^N; x_t; z_0^m, \eta_0^m]$ о прошлых и текущих значениях процесса x_t .

Работа поддержана грантом МД-9509.2006.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демин Н.С., Рожкова С.В., Рожкова О.В. Обобщенная скользящая экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2000. – № 4. – С. 39–51.
2. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. – М.: Иностранная литература, 1963. – 829 с.
3. Демин Н.С., Короткевич В.И. О количестве информации в задачах фильтрации компонент Марковских процессов // Автоматика и телемеханика. – 1983. – № 7. – С. 87–96.
4. Демин Н.С., Короткевич В.И. Об уравнениях для шенноновского количества информации при передаче Марковских диффузионных сигналов по каналам с памятью // Проблемы передачи информации. – 1987. – Т. 23. – № 1. – С. 16–27.
5. Dyomin N.S., Rozhkova S.V., Safronova I.E. Information amount determination for joint problem of filtering and generalized extrapolation of stochastic processes with respect to the set of continuous and discrete memory observations // Informatica. – 2003. – V. 14. – № 3. – P. 295–322.
6. Dyomin N.S., Rozhkova S.V., Safronova I.E. About structure of Shannon information amount for joint filtering and extrapolation problem by continuous-discrete memory observations // Informatica. – 2004. – V. 15. – № 2. – P. 171–202.
7. Демин Н.С., Рожкова С.В. О структуре количества информации в совместной задаче фильтрации и интерполяции по наблюдениям с памятью. Общий случай // Известия Томского политехнического университета. – 2004. – Т. 307. – № 3. – С. 13–17.
8. Демин Н.С., Рожкова С.В. О структуре количества информации в совместной задаче фильтрации и интерполяции по наблюдениям с памятью. Условно-гауссовский случай // Известия Томского политехнического университета. – 2004. – Т. 307. – № 4. – С. 6–10.
9. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.

УДК 330.43

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКИХ УСЛОВНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ НА ОСНОВЕ МНОГОМЕРНОГО АСИММЕТРИЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЛАПЛАСА

О.А. Бельснер, О.Л. Крицкий

Томский политехнический университет
E-mail: olegkol@mph.phtd.tpu.edu.ru, belsner@bk.ru

Предлагается модификация модели динамических условных корреляций. Модификация заключалась в отказе от предположения о многомерном нормальном распределении логарифмов приращений дневных котировок финансовых инструментов, вследствие ненулевых значений коэффициентов асимметрии и эксцесса, и в использовании асимметричного многомерного распределения Лапласа, позволяющего моделировать линейные комбинации одномерных случайных величин, что особенно важно при расчете предельной величины риска (Value-at-risk, VaR) для портфелей финансовых инструментов.

Понимание механизма взаимодействия финансовых величин является проблемой, довольно длительный период рассматриваемой в экономике. Переменные оказывают влияние друг на друга не только через первый, но и через второй моменты совместных распределений. Это означает, что изменение значения одной переменной может воздействовать не только на уровень другой, но и на степень изменчивости остальных переменных. Для достижения состоятельной, несмещенной и эффективной оценки данной зависимости предлагается большое количество эконометрических методов, позволяющих осуществить наиболее точный анализ.

В течение последних двадцати лет в финансовой эконометрике происходит активное развитие моделей, описывающих процессы изменения цен, основной особенностью которых является непостоянство безусловной или условной дисперсии.

Причины изменения дисперсии у финансовых показателей различны. Среди прочих можно выделить непредвиденные политические события, рез-

кие колебания уровня предложения на рынке (например, вследствие поступления на рынок больших объемов валюты, товаров или ценных бумаг) или его сокращение (что, согласно закону спроса и предложения, приводит к росту цен). Очевидно, что изменения дисперсии цен финансовых инструментов оказывают существенное влияние на финансовые сделки вследствие увеличения рисков потерь.

Общий подход к построению моделей с изменяющейся дисперсией предполагает, что значение финансового показателя X_t в момент времени t определяется посредством уравнения:

$$X_t = \mu(t) + \sigma_t \varepsilon_t,$$

где $\mu(t)$ — условное математическое ожидание процесса X_t , $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ — стандартная нормально распределенная случайная величина, σ_t — условное стандартное отклонение.

Изучение изменений волатильности привело к появлению в начале 1980-х гг. класса моделей авторегрессии условной гетероскедастичности (ARCH) [1] вида: