ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

т. 245 1975 г.

ГРАНИЦЫ КОРНЕЙ НЕКОТОРЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В статье изучены границы корней многочленов (1) и (10), которые являются знаменателями следующей подходящей дроби

$$\Phi(1;\ 1+\alpha;\ cx) = \frac{p_m(cx)}{q_m(cx)} + r_m(cx),\ m = 1,\ 2, \ldots,$$

где

$$\Phi(1;\ 1+\alpha;\ cx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cx)^n}{(1+\alpha)_n},\ \alpha \neq -1, -2, \ldots$$

1. Теорема. Все корни многочлена ($c = a + bi$)

$$q_{2\kappa+1}(cx) = \sum_{n=0}^{\kappa} C_\kappa^n \frac{(cx)^n}{(-\alpha-2\kappa)_n},\ \kappa = 0,\ 1,\ 2, \ldots \tag{1}$$

расположены в области $Rez > 0$, $z = ax + bxi$ и во внешней части окружности с центром в начале координат следующим радиусом:

$$R = 2\sqrt{2\kappa+\alpha-1},\ \kappa = 1,\ 2, \ldots;\ 0 \leqslant \alpha < 1, \tag{2}$$

Доказательство. В области $Rez = ax \leqslant 0$ квадрат модуля [1]

$$|q_{2\kappa+1}(cx)|^2 = \sum_{n=0}^{\kappa} \frac{C_\kappa^n(-\alpha-\kappa)_n |cx|^{2n}}{(-\alpha-2\kappa)_n(-\alpha-2\kappa)_{2n}} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\kappa-n} C_{\kappa-n}^m \frac{(2ax)^m}{(2n-\alpha-2\kappa)_m} \tag{3}$$

имеет все слагаемые больше нуля, поэтому все корни многочлена (1) расположены в области $Rez > 0$.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_\kappa$ корни многочлена (1), тогда

$$q_{2\kappa+1}(cx) = \prod_{l=1}^{\kappa}\left(1 - \frac{cx}{\alpha_l}\right). \tag{4}$$

Если $cx = ix$, то на основании равенства (3)

$$|q_{2\kappa+1}(ix)|^2 = \prod_{l=1}^{\kappa}\left(1 + \frac{x^2}{\alpha_l^2}\right), \tag{5}$$

а также (здесь принято $x^2 = u^{-1} > 0$)

$$u^\kappa |q_{2\kappa+1}(i\sqrt{u})|^2 = \sum_{n=0}^{\kappa} \frac{C_\kappa^n (-\alpha-\kappa)_n u^{\kappa-n}}{(-\alpha-2\kappa)_n (-\alpha-2\kappa)_{2n}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\kappa} a_n u^{\kappa-n};\ \kappa = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Найдем отношение предыдущего коэффициента к последующему для полинома (6)

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{n(2\kappa+\alpha+1-n)(2\kappa+\alpha+1-2n)_2}{(\kappa-n+1)(\kappa-n+1+\alpha)};\ n = 1, \ldots, \kappa. \tag{7}$$

Минимум правой части равенства (7) для всех n одновременно устанавливается следующими легко проверяемыми неравенствами:

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} > \frac{4n(2\kappa+\alpha+1-n)(2\kappa+\alpha+1-2n)}{2\kappa+\alpha+2-2n} >$$

$$> 4(2\kappa+\alpha-1);\ n = 1, \ldots, \kappa;\ 0 \leqslant \alpha < 1. \tag{8}$$

В силу (5), (8) и ([2], изд. 4, стр. 295 — 296)

$$\min|\alpha_l| \geqslant 2\sqrt{2\kappa+\alpha-1} = R,\ \kappa = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

что и требовалось доказать.

2. Теорема. Все корни многочлена

$$q_{2\kappa}(cx) = \sum_{n=0}^{\kappa} C_\kappa^n \frac{(cx)^n}{(1-\alpha-2\kappa)_n},\ \kappa = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

расположены в полуплоскости $Rez > 0$, $z = ax + bxi$ и во внешней части окружности с центром в начале координат следующим радиусом

$$R_1 = \begin{cases} \min\{\sqrt{\kappa(\kappa+\alpha)(\alpha+1)},\ 2\sqrt{2\kappa+\alpha-2}\}, \\ \qquad \kappa = 1, \ldots, 6; \\ 2\sqrt{2\kappa+\alpha-2},\ \kappa = 7, 8, \ldots;\ 0 \leqslant \alpha < 1. \end{cases} \tag{11}$$

Доказательство. В области $Rez = ax \leqslant 0$ квадрат модуля (3) (α необходимо заменить на $\alpha - 1$) имеет положительные слагаемые, поэтому все корни многочлена (10) расположены в области $Rez < 0$.

В силу (1), (3) — (6) имеем

$$u^\kappa |q_{2\kappa}(i\sqrt{u})|^2 = \sum_{n=0}^{\kappa} \frac{C_\kappa^n (1-\alpha-\kappa)_n u^{\kappa-n}}{(1-\alpha-2\kappa)_n (1-\alpha-2\kappa)_{2n}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\kappa} b_n u^{\kappa-n},\ \kappa = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Далее находим:

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{n(2\kappa+\alpha-n)(2\kappa+\alpha-2n)_2}{(\kappa-n+1)(\kappa-n+\alpha)};\ n = 1, \ldots, \kappa. \tag{13}$$

Нетрудно проверить следующие неравенства:

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} > 8n\left(\kappa+\frac{\alpha}{2}-n\right)\left(\kappa+\frac{\alpha}{2}-\frac{n}{2}\right):\left(\kappa+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}-n\right) >$$

$$> 8n\left(\kappa+\frac{\alpha}{2}-n\right) n = 1, \ldots, \kappa;\ 0 \leqslant \alpha < 1. \tag{14}$$

Согласно правой части неравенства (14), минимумы $b_{n-1} : b_n$ будут при $n = 1$ и $n = \kappa$ следующие:

$$\min \frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{b_0}{b_1} > 4\,(2\kappa + \alpha - 2),\ \ \kappa = 2,\ 3, \ldots, \tag{15}$$

$$\min \frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{b_{\kappa-1}}{b_\kappa} = \kappa\,(\kappa + \alpha)\,(\alpha + 1),\ \ \kappa = 1, \ldots,\ 6. \tag{16}$$

На основании неравенства (15) и равенств (12) и (16) получаем равенство (11), тем самым теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Корнилов. Приложение теории цепных дробей к вычислению некоторых типов интегралов. Изв. ТПИ, т. 205, 1972.
2. А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. Изд. 6, Физматгиз, 1959.