ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

т. 245 1975 г.

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ ПОМОЩИ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В статье доказывается возможность представления некоторых гипергеометрических функций двух переменных суммой подходящей дроби и остаточного члена. При этом остаточный член по модулю меньше модуля разности двух ближайших в порядке возрастания индексов подходящих дробей в комплексной области $Rez \leqslant 0$.

1. Функции двух переменных ([1], стр. 219—220) запишем следующим видом:

$$\begin{cases} F_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[\dfrac{(\alpha)_n (\beta_1)_n}{(\gamma)_n \, n!} F(\alpha + n, \ \beta; \ \gamma + n; \ x) \right] z^n = \\ = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n; \ \alpha < \gamma, \ \beta_1 < 1, \ \beta < 0, \ -1 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} (1-x)^{\beta} F_2 = \sum\limits_{n=0}^{8} \left[\dfrac{(\alpha)_n (\beta_1)_n}{(\gamma_1)_n \, n!} F\left((\gamma - \alpha - n, \ \beta; \ \gamma; \ \dfrac{x}{x-1} \right) \right] z^n = \\ = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n; \ \alpha < \gamma_1, \ \beta_1 < 1, \ \beta > 0, \ -\infty < x \leqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} (1-x)^{\beta} F_3 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[\dfrac{(\alpha_1)_n (\beta_1)_n}{(\gamma)_n \, n!} F\left(\gamma + n - \alpha, \ \beta; \ \gamma + n; \ \dfrac{x}{x-1} \right) z^n = \\ = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n; \ \alpha_1 < \gamma, \ \beta_1 < 1, \ \beta < 0, \ -\infty < x \leqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{3}$$

На основании равенств (1)—(3), теоремы ([2], стр. 211), а также ([3], стр. 226; [4], задача 1220) определители

$$\begin{vmatrix} a_p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{p+m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p+m-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{p+2m-2} \end{vmatrix}, \ . \ . \ . \ ; \ p, \ m = 1, 2, \ldots$$

положительны. Поэтому степенные ряды (1)|(3) представляются каждый суммой подходящей дроби и остаточного члена. При этом остаточный член по модулю меньше модуля разности двух соседних подходящих дробей в области $Rez \leqslant 0$ [5].

При установлении пределов изменения параметров функций F в равенствах (1)—(3) необходимо так подобрать значения параметров, чтобы в предельном случае $x = 1$ или $x \to \infty$) эти функции монотонно убывали с увеличением индекса n [5].

Например, для функции F ряда (1) имеем ([6], стр. 374, (67).

$$F(\alpha + n,\ \beta;\ \gamma + n;\ 1) = \frac{\Gamma(\gamma + n)\,\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\,\Gamma(\gamma + n - \beta)}.$$

Последовательность $\left\{\dfrac{\Gamma(\gamma + n)}{\Gamma(\gamma + n - \beta)}\right\}$ $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ монотонно убывает только в том случае, если выполняется неравенство $\beta < 0$. Для формул (2) или (3) этими условиями являются соответственно $\beta > 0$ или $\beta < 0$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бейтмен и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция, функции Лежандра). М., Физматгиз, 1965.

2. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной. М., Гостехиздат, 1957.

пределы, ряды, цепные дроби). М., Физматгиз, 1961.

пределы, ряды цепные дроби). М., Физматгиз, 1961.

4. И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре. М., Гостехиздат, 1957.

5. В. Е. Корнилов Приложение цепных дробей к вычислению обобщенных гипергеометрических функций. Изв. ТПИ, т. 205, 1972.

6. В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Том 3, часть вторая. М., Гостехиздат, 1953.