ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

т. 245 1975 г.

ПРИЛОЖЕНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В статье изучается вопрос о приложении цепных дробей к вычислению дзета-функции Римана (7), ее обобщений и вычисление функций, представленных рядами, слагаемые которых являются соответствующими дзета-функциями. Для последних рядов получены такие обобщения, которые также можно вычислять с помощью цепных дробей.

1. Обобщенная дзета-функция определяется следующими равенствами ([1]. стр. 40—43; [2], стр. 164, 9)):

$$\zeta(s,\ v)=\sum_{n=0}^{\infty}(v+n)^{-s},\quad v\neq 0,\ -1,\ -2,\dots,\ s>1; \tag{1}$$

$$\zeta(s,\ v)=\frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^{\infty}e^{-nt}e^{-vt}\,t^{s-1}\,dt\right],\ v>0,\ s>0; \tag{2}$$

$$\begin{cases}\zeta(\kappa,\ v)=\dfrac{1}{2v^{\kappa}}+\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos^{\kappa-2}t\sin(\kappa t)\,dt}{v^{\kappa-1}\operatorname{th}(\pi v\operatorname{tg}t)},\ v>0,\\ \kappa=2,3,\dots;\ \varphi_m=\cos^m t\,(\sin mt+\cos mt)\ ([3],\ \text{стр},\ 211).\end{cases} \tag{3}$$

Пусть

$$(v+n)^{-s}=c_n,\ \zeta(n,\ v)=d_n, \tag{4}$$

тогда в силу равенств (1)—(4), теоремы ([3], стр. 211), а также ([4], стр. 226; [5], стр. 153; [6], задача 943) определители

$$\begin{vmatrix}c_{p-1} & \dots & c_{p+m-2}\\ \dots & \dots & \dots\\ c_{p+m-2} & \dots & c_{p+2m-3}\end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix}d_{p+1} & \dots & d_{p+m}\\ \dots & \dots & \dots\\ d_{p+m} & \dots & d_{p+2m-1}\end{vmatrix}; \tag{5}$$

$$p,\ m=1,\ 2,\dots$$

положительны.

2. Функции ([1], стр. 42, 47)

$$\Phi(z,\ s,\ v)=\sum_{n=0}^{\infty}(v+n)^{-s}z^n,\ |z|<1,\ v\neq 0,\ -1,\dots; \tag{6}$$

$$\zeta(s)=\zeta(s,\ 1)=\Phi(1,\ s,\ 1)=\frac{1}{1-2^{1-s}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s},\ s>0. \tag{7}$$

на основании положительных значений первых определителей (5), представляются цепными дробями с положительными членами звеньев. Таким образом, получаем следующие подходящие дроби для функций (6) и (7), а также имеем соответствующую оценку остаточного члена по модулю (см. [7]; [8], стр. 27—30).

$$\left\{\begin{aligned} &\Phi(z, s, v) = P_{2n}(z) : Q_{2n}(z) + R_{2n}(z) = \\ &= \begin{vmatrix} 0 & S_0 z^{n-1} & \ldots & S_{n-1} \\ c_0 & c_1 & & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z^n & \ldots & 1 \\ c_0 & \ldots & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix} + \\ &\quad + R_{2n}(z);\ n = 1, 2, \ldots;\ S_n = \sum_{\kappa=0}^{n} (v + \kappa)^{-s} z^{\kappa}; \end{aligned}\right. \tag{8}$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \left[\frac{P_{2n}(-1)}{Q_{2n}(-1)} + R_{2n}(-1) \right],\ v = 1,\ n = 1, 2, \ldots; \tag{9}$$

$$|R_{2n}(z)| < \left| \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} - \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} \right|,\ Re z \leqslant 0. \tag{10}$$

3. Если в равенстве ([1], стр. 60)

$$\psi(1 + z) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z + n} \right),\ \gamma = 0{,}577\ldots \tag{11}$$

воспользоваться разложением

$$\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{z + \kappa} = \frac{z}{\kappa^2} - \frac{z^2}{\kappa^3} + \frac{z^3}{\kappa^4} - \ldots,\ |z| < \kappa,$$

то получим

$$\left\{\begin{aligned} &\psi(1 + z) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\kappa-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z + n} \right) + \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \zeta(n, \kappa) z^{n-1},\ |z| < \kappa. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Интегрируя равенство (12), находим ([1], стр. 30, (1)

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(1 + z) = -\gamma z + \sum_{n=1}^{\kappa-1} \left[\frac{z}{n} - \ln\left(1 + \frac{z}{n}\right) \right] + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \zeta(n, \kappa) \frac{z^n}{n},\quad |z| < \kappa. \end{aligned} \tag{13}$$

Степенные ряды (12) и (13) в силу положительных значений вторых определителей (5) представляются цепными дробями с положительными членами звеньев. Таким путем, согласно равенству (8), получим аналогичные подходящие дроби для рядов (12) и (13) и, согласно неравенству (10), аналогичную оценку остаточного члена ([9], задача 1220).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бейтмен и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция, функции Лежандра). М., Физматгиз, 1965.

2. И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.-Л., Гостехиздат, 1948.

3. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной. М., Гостехиздат, 1957.

4. В. Л. Данилов, А. И. Иванова и др. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби). М., Физматгиз, 1961.

5. А. П. Мишина и И. В. Проскуряков. Высшая алгебра (линейная алгебра, многочлены, общая алгебра), М., Физматгиз, 1962.

6. Д. К. Фадеев и И. С. Соминский. Сборник задач по высшей алгебре. М., Гостехиздат, 1956.

7. В. Е. Корнилов. Приложение цепных дробей к вычислению обобщенных гипергеометрических функций. Изв. ТПИ, т. 205, 1972.

8. Т. И. Стилтьес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.

9. И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре. М., Гостехиздат, 1957.