ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

т. 245 1975 г.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГАММА-ФУНКЦИИ ПРИ ПОМОЩИ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В статье получено обобщение известных формул, представляющих функции $\psi(1+z)$ и $\ln\Gamma(1+z)$ степенными рядами. Бесконечные степенные ряды, входящие в состав этих формул, представляются цепными дробями с положительными членами звеньев. Если эти степенные ряды заменить суммой подходящей дроби и остаточного члена, то тогда модуль остаточного члена меньше модуля разности двух подходящих дробей, индексы которых отличаются на целое нечетное число. Эта оценка справедлива в некоторой области комплексного переменного z.

1. Если в равенстве ([1], стр. 60)

$$\psi(1+z) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right), \ \gamma = 0{,}577... \tag{1}$$

воспользоваться разложением

$$\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{z+\kappa} = \frac{z}{\kappa^2} - \frac{z^2}{\kappa^3} + \frac{z^3}{\kappa^4} - \ldots, \ |z| < \kappa,$$

то получим

$$\psi(1+z) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\kappa-1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right) + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \zeta(n,\kappa)\, z^{n-1}, \ |z| < \kappa, \tag{2}$$

где

$$\zeta(n,\kappa) = \sum_{m=\kappa}^{\infty}\frac{1}{m^n}. \tag{3}$$

Интегрируя равенство (2), находим ([1], стр. 30, (1)

$$\ln\Gamma(1+z) = -\gamma z + \sum_{n=1}^{\kappa-1}\left[\frac{z}{n} - \ln\left(1+\frac{z}{n}\right)\right] + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \zeta(n,\kappa)\frac{z^n}{n}, \ |z| < \kappa. \tag{4}$$

После потенцирования получим

$$\Gamma(1+z) = e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\kappa-1} \left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} \cdot e^{z:n} \times$$
$$\times \exp\left[\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \zeta(n, \kappa) \frac{z^n}{n}\right], \ \kappa = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

В равенстве (5) z заменим на $-z$ и разделим его на новое равенство, затем применим тождество $\pi z = \Gamma(1+z)\Gamma(1-z)\sin \pi z$ и после элементарных преобразований окончательно получим

$$\Gamma(1+z) = e^{-\gamma z} \sqrt{\frac{\pi z}{\sin \pi z}} \prod \sqrt{\frac{n-z}{n+z}} e^{z:n} \times$$
$$\times \exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n+1, \kappa) \frac{z^{2n+1}}{2n+1}\right], \ |z| < \kappa, \ \kappa = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

При $\kappa \to \infty$ имеем

$$\Gamma(1+z) = e^{-\gamma z} \sqrt{\frac{\pi z}{\sin \pi z}} \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n-z}{n+z}} e^{z:n}, \ |z| < \infty. \tag{7}$$

При $z = 1, 2, \ldots$ в правой части равенства (7) необходимо перейти к пределу.

Степенной ряд в равенстве (5) представляется цепной дробью с положительными членами звеньев [2, 3] и для него остаточный член по модулю меньше модуля разности двух подходящих дробей, разность индексов которых равна нечетному числу, в области $Re z \leqslant 0$ [3]. Аналогичная цепная дробь может быть получена и для степенного ряда (6) ([4], задача 1220) здесь соответствующая оценка остаточного члена имеет в области

$$\frac{\pi}{4} < |\arg z^2| < \frac{3}{4}\pi.$$

Представления функций, аналогичные равенствам (2), (4)—(6), можно получить для гиперболических и тригонометрических функций, логарифмов этих функций и для интегралов от любой из перечисленных функций и для интегралов от произведения любой из этих функций на различные степени переменной интегрирования. Полученные при таком преобразовании степенные ряды представляются цепными дробями с положительными членами звеньев, и для них справедливы аналогичные оценки остаточных членов по модулю.

2. Обобщенная дзета-функция Римана (3) представляется интегралом от тригонометрических и гиперболических функций [2], поэтому здесь уместно будет кратко изложить вопрос о применении цепных дробей к вычислению тригонометрических рядов.

При разложении тригонометрического ряда по степеням e^{ix} или e^{-ix} его можно рассматривать как обыкновенный степенной ряд. Такой ряд почти всегда можно или непосредственно представлять цепной дробью с положительными членами звеньев, или представить несколькими суммами бесконечных рядов, каждый из которых представляется цепной дробью с положительными членами звеньев. Исключением являются тригонометрические ряды, у которых коэффициенты содержат множителями функции вида $\sin n\lambda$, $\cos n\lambda$. Однако и такие ряды преобразуются в конечное число сумм бесконечных рядов, обладающих указанным выше свойством, если тригонометрические функции $\sin n\lambda$, $\cos n\lambda$ заменить показательными функциями по формулам Эйлера и применить преобразования, которые аналогичны преобразованиям наиболее простых тригонометрических рядов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бейтмен и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция, функции Лежандра). М., Физматгиз, 1965.
2. В. Е. Корнилов. Приложение цепных дробей к вычислению дзета-функции Римана. Изв. ТПИ, т. 245.
3. В. Е. Корнилов. Приложение цепных дробей к вычислению обобщенных гипергеометрических функций. Изв. ТПИ, т. 205, 1972.
4. И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре. М., Гостехиздат, 1957.