ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 246 1974

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ АНАЛИЗА УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ СХЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЦВМ

В. В. ПФЕНИНГ

(Представлена кафедрой вычислительной техники)

На статический режим электронных схем с полупроводниковыми элементами существенное влияние оказывает нелинейность характеристик полупроводниковых диодов и триодов. Задача анализа установившегося режима полупроводниковых схем сводится к получению системы нелинейных алгебраических уравнений и решению полученной системы одним из методов последовательных приближений.

Набольшее распространение при расчете электрических цепей на ЦВМ получили обобщенные методы узловых напряжений и контурных токов. Число независимых переменных, которые в случае нелийненых цепей определяются на каждом шаге последовательных приближений, для указанных методов расчета определяется топологической сложностью цепи: соответственно числом независимых узлов для метода узловых напряжений и числом независимых контуров для метода контурных токов. Для уточнения же режима нелинейных элементов на каждом шаге используются лишь напряжения (или токи), непосредственно связанные с нелинейными элементами.

Следовательно, систему уравнений схемы с нелинейными элементами целесообразно свести к такому виду, чтобы в ней переменными являлись лишь напряжения и токи ветвей с нелинейными элементами, а все остальные переменные были исключены [1, 2]. Для этого выделим из схемы все нелинейные элементы и изобразим оставшуюся часть схемы, содержащую все линейные сопротивления и независимые источники в виде многополюсника M. Число независимых токов и напряжений узловых пар для транзистора равно двум, поэтому для линейного многополюсника он может рассматриваться в виде двух внешних ветвей. Диод представляется одной ветвью. В общем случае выделяемый нелинейный многополюсник должен быть представлен в виде $2n$-полюсника и соответственно в виде n внешних ветвей.

Связь между напряжениями и токами всех внешних ветвей для линейной части схемы выражается уравнением

$$HX + F\left[\frac{I}{E}\right] = Y, \tag{1}$$

где

X и Y — соответственно векторы независимых и зависимых переменных внешних ветвей (здесь и в дальнейшем индекс N указывает на то, что переменные относятся к внешним ветвям):

$$X = \begin{bmatrix} I_{N_1} \\ \hline \vdots \\ \hline I_{N_r} \\ \hline U_{N_{(r+1)}} \\ \hline \vdots \\ \hline U_{N_n} \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} U_{N_1} \\ \hline \vdots \\ \hline U_{N_r} \\ \hline I_{N_{(r+1)}} \\ \hline \vdots \\ \hline I_{N_n} \end{bmatrix}$$

n — общее число внешних ветвей;
r — число внешних ветвей, которым соответствует токовая переменная вектора X;
I и E — соответственно векторы независимых источников тока и источников напряжения внутреннего многополюсника M;
H — квадратная матрица порядка n;
F — прямоугольная матрица размером $n \times s$ (s — общее число независимых источников).

В дальнейшем будем называть внешние ветви, которым соответствуют токовые переменные вектора X, токовыми входами, а внешние ветви, которым соответствуют переменные напряжения в X, — напряженческими входами. Значения токов и напряжений векторов X и Y могут быть найдены при совместном решении уравнения (1) и уравнений нелинейных элементов.

Для дальнейшего рассуждения будем использовать понятия теории графов и топологии цепей [4, 5]. Условие существования матриц H и F уравнения (1) может быть выражено следующей теоремой:

Теорема 1. Для любого линейного $2n$-полюсника, включающего сопротивления и независимые источники, матрицы H и F существуют для выбранного набора переменных векторов X и Y, только и если только существует такое дерево цепи, что каждая токовая переменная вектора X и каждый внутренний источник тока соответствует связи, а каждая переменная напряжения в X и внутренний источник эдс — ветви дерева.

Доказательство аналогичной теоремы приведено в [7]. Отличие заключается в том, что в работе [7] независимые источники тока и эдс включаются во внешние ветви (а не оставляются внутри многополюсника) и доказывается существование матрицы $H_п$ уравнения

$$H_п X = Y, \tag{2}$$

где векторы X и Y включают также токи и напряжения независимых источников.

Легко показать, что если существует матрица $H_п$ уравнения (2), то существуют и матрицы H и F уравнения (1), так как они в данном случае являются просто подматрицами $H_п$. Переход от системы (2) к (1) может быть осуществлен путем исключения из системы (2) уравнений, соответствующих ветвям с независимыми источниками; члены с независимыми источниками в оставшихся уравнениях дадут составляющую $F\begin{bmatrix} -\frac{J}{E}- \end{bmatrix}$ уравнения (1).

При выводе выражений для получения матриц H и F будем использовать матрицу основных контуров. Основное уравнение для контурного метода записывается следующим образом:

$$Z\boldsymbol{I} = \Gamma \boldsymbol{E}_{в}, \tag{3}$$

где

Z — квадратная матрица контурных сопротивлений;

$\boldsymbol{I}$ — матрица-столбец контурных токов;

Γ — матрица совпадений контура-ветви;

$\boldsymbol{E}_{в}$ — матрица-столбец напряжений активных ветвей.

Матрица контурных сопротивлений Z равна выражению

$$Z = \Gamma Z_{в} \Gamma^{t}, \tag{4}$$

где

$Z_{в}$ — диагональная матрица сопротивлений пассивных ветвей,

Γ^{t} — транспонированная матрица Γ.

Токи ветвей связаны с контурными токами соотношением

$$\boldsymbol{I}_{в} = \Gamma^{t} \boldsymbol{I}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{I}_{в}$ — матрица-столбец токов ветвей.

Перейдем непосредственно к определению матриц H и F для линейного $2n$-полюсника. Пусть матрица Γ является матрицей основных контуров для выбранного дерева цепи, удовлетворяющего теореме 1. Произведем разделение матрицы Γ в соответствии с природой элементов цепи и характером их включения (соответственно в ветви дерева или связи). Будем использовать введенный ранее индекс N и, кроме того, индексы: M — для элементов, относящихся к внутреннему многополюснику; B — для ветвей дерева и C — для связей. Согласно теореме 1, связями цепи могут являться внутренние независимые источники тока — $M\Gamma$, внутренние пассивные связи — RC и токовые входы — NC, а ветвями дерева — внутренние независимые источники напряжения — ME, внутренние пассивные ветви дерева — RB напряженческие входы — NB.

Следовательно, матрицу Γ можно разделить следующим образом:

$$\Gamma = \begin{array}{c} \\ MI \\ RC \\ NC \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} MI & RC & NC & ME & RB & NB \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} E_1 & 0 & 0 & \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 \\ \hline 0 & E_2 & 0 & \Gamma_4 & \Gamma_5 & \Gamma_6 \\ \hline 0 & 0 & E_3 & \Gamma_7 & \Gamma_8 & \Gamma_9 \end{array}\right] \end{array},$$

где единичные матрицы E_1, E_2 и E_3 соответствуют связям, а подматрицы $\Gamma_1 \div \Gamma_9$ — ветвям дерева.

Аналогично произведем разделение матриц $\boldsymbol{I}$, Z, $\boldsymbol{I}_{в}$, $Z_{в}$ и $\boldsymbol{E}_{в}$:

$$\boldsymbol{I} = \left[\begin{array}{c} I_{MI} \\ \hline I_{RC} \\ \hline I_{NC} \end{array}\right]; \qquad Z = \begin{array}{c} \\ MI \\ RC \\ NC \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} MI & RC & NC \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ \hline Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ \hline Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{array}\right] \end{array};$$

$$
\boldsymbol{I}_{\text{в}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{I}_{MJ} \\ \boldsymbol{I}_{RC} \\ \boldsymbol{I}_{NC} \\ \boldsymbol{I}_{ME} \\ \boldsymbol{I}_{RB} \\ \boldsymbol{I}_{NB} \end{vmatrix}; \qquad
Z_{\text{в}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{RC} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{RB} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \qquad
\boldsymbol{E}_{\text{в}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{U}_{MJ} \\ 0 \\ \boldsymbol{U}_{NC} \\ \boldsymbol{U}_{ME} \\ 0 \\ \boldsymbol{U}_{NB} \end{vmatrix}.
$$

В матрице-столбце $\boldsymbol{E}_{\text{в}}$ перед членами $\boldsymbol{U}_{NC}$ и $\boldsymbol{U}_{NB}$ стоит минус, так как для внешних ветвей, в отличие от независимых источников, направление напряжений противоположно направлению тока ветви.

Используя введенные обозначения, уравнение (1) можно переписать в следующем виде:

$$
\begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{I}_{NC} \\ \boldsymbol{U}_{NB} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{I}_{MJ} \\ \boldsymbol{U}_{ME} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{U}_{NC} \\ \boldsymbol{I}_{NB} \end{vmatrix}. \tag{6}
$$

Подставим Z, $\boldsymbol{I}$, Γ и $\boldsymbol{E}_{\text{в}}$ в уравнение (3). После перемножения матриц данное уравнение сведется к системе трех уравнений, из которых нам понадобятся (2) и (3) (соответственно уравнения (7) и (8):

$$
Z_{21}\boldsymbol{I}_{MJ} + Z_{22}\boldsymbol{I}_{RC} + Z_{23}\boldsymbol{I}_{NC} = \Gamma_4 \boldsymbol{U}_{ME} - \Gamma_6 \boldsymbol{U}_{NB}, \tag{7}
$$

$$
Z_{31}\boldsymbol{I}_{MJ} + Z_{32}\boldsymbol{I}_{RC} + Z_{33}\boldsymbol{I}_{NC} = -\boldsymbol{U}_{NC} + \Gamma_7 \boldsymbol{U}_{ME} - \Gamma_9 \boldsymbol{U}_{NB}. \tag{8}
$$

Определим из уравнения (7) токи внутренних пассивных связей

$$
\boldsymbol{I}_{RC} = Z_{22}^{-1}(\Gamma_4 \boldsymbol{U}_{ME} - \Gamma_6 \boldsymbol{U}_{NB} - Z_{21}\boldsymbol{I}_{MJ} - Z_{23}\boldsymbol{I}_{NC}), \tag{9}
$$

где

Z_{22}^{-1} — обратная матрица по отношению к Z_{22}. Подставляя (9) в (8), получим первое уравнение системы уравнений (6).

$$
H_{11}\boldsymbol{I}_{NC} + H_{12}\boldsymbol{U}_{NB} + F_{11}\boldsymbol{I}_{MJ} + F_{12}\boldsymbol{U}_{ME} = \boldsymbol{U}_{NC},
$$

где

$$
\left.\begin{aligned} H_{11} &= Z_{32}Z_{22}^{-1}Z_{23} - Z_{33}; \quad H_{12} = Z_{32}Z_{22}^{-1}\Gamma_6 - \Gamma_9; \\ F_{11} &= Z_{32}Z_{22}^{-1}Z_{21} - Z_{31}; \quad F_{12} = \Gamma_7 - Z_{32}Z_{22}^{-1}\Gamma_4. \end{aligned}\right\} \tag{10}
$$

Второе уравнение системы (6) может быть получено из соотношения (5), которое для нашего случая перепишется в виде

$$
\begin{vmatrix} \mathrm{E}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{E}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{E}_3 \\ \Gamma_1^t & \Gamma_4^t & \Gamma_7^t \\ \Gamma_2^t & \Gamma_5^t & \Gamma_8^t \\ \Gamma_3^t & \Gamma_6^t & \Gamma_9^t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{I}_{MJ} \\ \boldsymbol{I}_{RC} \\ \boldsymbol{I}_{NC} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{I}_{MJ} \\ \boldsymbol{I}_{RC} \\ \boldsymbol{I}_{NC} \\ \boldsymbol{I}_{ME} \\ \boldsymbol{I}_{RB} \\ \boldsymbol{I}_{NB} \end{vmatrix}.
$$

Последнее уравнение данной системы имеет вид

$$
\Gamma_3^t \boldsymbol{I}_{MJ} + \Gamma_6^t \boldsymbol{I}_{RC} + \Gamma_9^t \boldsymbol{I}_{NC} = \boldsymbol{I}_{NB}.
$$

Подставляя в это уравнение выражение (9), получим второе уравнение системы (6)

$$
H_{21}\boldsymbol{I}_{NC} + H_{22}\boldsymbol{U}_{NB} + F_{21}\boldsymbol{I}_{MJ} + F_{22}\boldsymbol{U}_{ME} = \boldsymbol{I}_{NB},
$$

где

$$\left.\begin{aligned} H_{21} &= \Gamma_9^t - \Gamma_6^t Z_{22}^{-1} Z_{23}; \quad H_{22} = - \Gamma_6^t Z_{22}^{-1} \Gamma_6 \\ F_{21} &= \Gamma_3^t - \Gamma_6^t Z_{22}^{-1} Z_{21}; \quad F_{22} = \Gamma_6^t Z_{22}^{-1} \Gamma_4. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Матрица Z определяется перемножением трех матриц (уравнение (4)). При ее вычислении целесообразно использовать то обстоятельство, что многие подматрицы матриц Γ и $Z_в$ являются нулевыми или единичными. После перемножения матриц и некоторых преобразований выражение для определения матрицы Z может быть приведено к виду

$$Z = \left|\begin{array}{c|c|c} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ \hline Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ \hline Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & Z_{RC} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right| + \Gamma_{RB} Z_{RB} \Gamma_{RB}^t, \tag{12}$$

где

$$\Gamma_{RB} = \left|\begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \hline \Gamma_5 \\ \hline \Gamma_8 \end{array}\right|.$$

Таким образом, все элементы матриц H и F в конечном итоге вычисляются в функции элементов матрицы Γ и сопротивлений внутренних пассивных ветвей многополюсника. Сперва необходимо вычислить элементы матриц Z (уравнение (12), затем элементы матриц H и F (уравнения (10) и (11)).

После определения матриц H и F дальнейший расчет схемы, то есть совместное решение уравнения линейного многополюсника (1) и уравнений нелинейных элементов, производится одним из приближенных методов решения систем нелинейных уравнений, например, методом итерации или методом Ньютона [1, 2, 3].

Существенным достоинством приведенного метода расчета путем разделения схемы на линейную и нелинейную части является то, что соответствующим разделением переменных внешних ветвей на векторы $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{У}$ (т. е. соответствующим включением ветвей нелинейных элементов в дерево или связи) может быть значительно улучшена сходимость методов последовательных приближений.

На основании приведенного выше алгоритма составлена программа анализа статического режима схем с полупроводниковыми диодами и триодами для ЦВМ «Минск-2». Исходными данными для программы являются: перечень элементов схемы с указанием порядка их соединения (указываются номера узлов, между которыми включен элемент), значения параметров элементов и начальное приближение для токов и напряжений ветвей с нелинейными элементами. Для полупроводниковых диодов и триодов задаются значения параметров эквивалентных схем (сами эквивалентные схемы не задаются, они приняты неизменными и учитываются в соответствующих подпрограммах диода и триода).

В принятой модели диода, кроме идеального диода, учитывается объемная проводимость базы, зависящая от режима, и сопротивление утечки. Для объемной проводимости базы принята линейная зависимость от тока диода. В модели триода, за основу которой приняты уравнения Эберса—Молла [6], введены возможности учета зависимости коэффициентов усиления по току и объемного сопротивления базы от режима и учета пробоя эмиттерного перехода для дрейфовых триодов.

В программе осуществляется выбор дерева схемы, построение матрицы основных контуров, вычисление матриц H и F и совместное решение уравнений линейной и нелинейной частей методом последовательных приближений. Выбор дерева производится с учетом режима работы полупроводниковых приборов для обеспечения наилучшей сходимости; режим работы определяется по начальному приближению для напряжений переходов полупроводниковых диодов и триодов. Совместное решение уравнений линейной части схемы и нелинейных элементов производится методом Ньютона.

Сравнительные расчеты, проведенные по этой программе и использовавшейся ранее программе, основанной на обобщенном методе узловых напряжений с применением метода Ньютона, показали, что метод расчета схем путем их разделения на линейную и нелинейную части дает следующие преимущества: уменьшается время решения на каждом шаге вследствие уменьшения числа переменных и вследствие того, что для линейной части матрицы H и F формируются лишь один раз; существенно улучшается сходимость методов последовательных приближений, если дерево схемы выбирается в соответствии с режимом работы полупроводниковых приборов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Бондаренко. Алгоритмы для численного анализа нелинейных электрических и электронных цепей постоянного тока. Теоретическая электротехника. Научные труды ОМИИЖТ, т. 65, Омск, 1965.
2. В. М. Бондаренко. Итерационные методы анализа цепей постоянного тока с транзисторами. Теоретическая электротехника, Изд. Львовского университета, вып. 1, Львов, 1966.
3. Б. П. Демидович, И. А. Марон. Основы вычислительной математики. Изд. «Наука», М., 1966.
4. Н. А. Мельников. Матричный метод анализа электрических цепей. Изд. «Энергия», 1966.
5. С. Сешу, Н. Балабанян. Анализ линейных цепей. М.—Л., ГЭИ, 1963.
6. Д. Эберс, Д. Молл. Характеристики плоскостных полупроводниковых триодов при больших сигналах. «Вопросы радиолокационной техники», № 4, 1955.
7. So H. C. On the Hybrid Description of a Linear n-Port Resulting from the Extraction of the Arbitrarily Specified Elements, IEEE Trans. on Circuit Theory, vol. CT—12, pp. 381÷387, september, 1965.