

ОПЕРИРОВАНИЕ С МНОГОЗНАЧНЫМИ ЧИСЛАМИ

Б. И. БОЛЬШАНИН, И. А. РЕЙМАН

((Представлено научным семинаром кафедр маркшейдерского дела и геодезии))

При решении ряда задач астрономии и геодезии, при инженерно-технических расчетах и в особенности при составлении таблиц приходится нередко оперировать с многозначными числами. При использовании арифмометров и счетно-электрических машин общеизвестные приемы работы дают возможность производить вычисления только с 6—7-значными числами. При умножении 8—10-значных чисел на такие же числа применяется способ деления одного из сомножителей на две части, затем делаются перемножения другого сомножителя на каждую из этих частей. Так же поступают и при возведении в степень. Деление многозначных чисел на многозначные и тем более извлечение корней из них встречаются очень редко, их просто избегают.

В настоящей работе применительно к указанным выше видам счетных машин рассматриваются методы вычисления с большим числом значащих цифр таких простейших действий, как умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня. При этом в статье дается обоснование соответствующих способов, порядок работ, схемы записи и подробно разобранные примеры.

В основу всех вычислительных операций положено деление многозначных чисел на равные группы по 6—7 цифр в каждой, так что эти числа будут иметь вид многочленов

$$\begin{aligned} a &= \Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3 + \dots + \Delta'_m, \\ b &= \Delta''_1 + \Delta''_2 + \Delta''_3 + \dots + \Delta''_m, \end{aligned} \tag{1}$$

в которых порядок смежных Δ отличается на число цифр в группе. Перед разделением на группы удобно запятую перенести, поставив ее перед первой значащей цифрой или после нее, введя соответствующий множитель (10^n). Если последняя группа числа неполная, то, чтобы не нарушать порядка вычисления на счетной машине, группу дополняют нулями или просто подразумевают их. В полученном результате это, конечно, должно быть учтено.

$$\begin{aligned}
a \cdot b = & \Delta'_1 \Delta''_1 + \Delta'_1 \Delta''_2 + \Delta'_1 \Delta''_3 + \dots + \Delta'_1 \Delta''_i + \Delta'_1 \Delta''_{i+1} + \dots + \Delta'_1 \Delta''_m \\
& + \Delta'_2 \Delta''_1 + \Delta'_2 \Delta''_2 + \dots + \Delta'_2 \Delta''_{i-1} + \Delta'_2 \Delta''_i + \dots + \Delta'_2 \Delta''_{m-1} + \Delta'_2 \Delta''_m \\
& + \Delta'_3 \Delta''_1 + \dots + \Delta'_3 \Delta''_{i-2} + \Delta'_3 \Delta''_{i-1} + \dots + \Delta'_3 \Delta''_{m-2} + \Delta'_3 \Delta''_{m-1} + \Delta'_3 \Delta''_m \\
& + \dots \\
& + \Delta'_i \Delta''_1 + \Delta'_i \Delta''_2 + \dots + \Delta'_i \Delta''_{m-i+1} + \Delta'_i \Delta''_{m-i+2} + \Delta'_i \Delta''_{m-i+3} + \dots \\
& + \Delta'_{i+1} \Delta''_1 + \dots + \Delta'_{i+1} \Delta''_{m-i} + \Delta'_{i+1} \Delta''_{m-i+1} + \Delta'_{i+1} \Delta''_{m-i+2} + \dots \\
& + \dots \\
& + \Delta'_m \Delta''_1 + \Delta'_m \Delta''_2 + \Delta'_m \Delta''_3 + \dots + \Delta'_m \Delta''_m.
\end{aligned} \tag{2}$$

Произведение двух многозначных чисел a и b в общем виде

Умножение

Имея в виду, что каждый из сомножителей представляет собою многочлен вида (1), напомним произведение ab двух многозначных чисел a и b в общем виде (2).

Все частные произведения вида $\Delta'_i \Delta''_k$, входящие в ab и имеющие одинаковые суммы индексов $(i+k)$, записаны один под другим, — они одного порядка малости. Чтобы в произведении ab порядок последней значащей цифры был тот же, что и в каждом из сомножителей, в выражении (2) следует сохранить только те слагаемые $\Delta'_i \Delta''_k$, для которых $i+k \leq m+1$. В этом случае мы избежим излишних действий и можем быть уверены, что произведение ab будет получено с такой же относительной погрешностью, как и его сомножители.

Приняв для определенности $m=5$, и отбрасывая произведения с суммой индексов более 6, получим

$$\begin{aligned}
 a \cdot b = & \Delta'_1 \Delta''_1 + \Delta'_1 \Delta''_2 + \Delta'_1 \Delta''_3 + \Delta'_1 \Delta''_4 + \Delta'_1 \Delta''_5 \\
 & + \Delta'_2 \Delta''_1 + \Delta'_2 \Delta''_2 + \Delta'_2 \Delta''_3 + \Delta'_2 \Delta''_4 \\
 & + \Delta'_3 \Delta''_1 + \Delta'_3 \Delta''_2 + \Delta'_3 \Delta''_3 \\
 & + \Delta'_4 \Delta''_1 + \Delta'_4 \Delta''_2 \\
 & + \Delta'_5 \Delta''_1.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Если Δ' и Δ'' суть r -значные числа, то их произведения будут $2r$ -значными. Разделим цифры этих произведений на такие же группы, по r цифр, как и в сомножителях. Тогда из каждого произведения $\Delta' \Delta''$ образуется по две группы:

$$\Delta'_i \Delta''_k = (\Delta'_i \Delta''_k)_1 + (\Delta'_i \Delta''_k)_2. \tag{4}$$

Порядок первого слагаемого в (4) на r единиц больше порядка второго слагаемого. Учтя (4), выражение (3) перепишем так:

$$\begin{aligned}
 a \cdot b = & (\Delta'_1 \Delta''_1)_1 + (\Delta'_1 \Delta''_1)_2 + (\Delta'_1 \Delta''_2)_1 + (\Delta'_1 \Delta''_2)_2 + (\Delta'_1 \Delta''_3)_1 + (\Delta'_1 \Delta''_3)_2 \\
 & + (\Delta'_1 \Delta''_4)_1 + (\Delta'_1 \Delta''_4)_2 + (\Delta'_1 \Delta''_5)_1 + (\Delta'_1 \Delta''_5)_2 \\
 & + (\Delta'_2 \Delta''_1)_1 + (\Delta'_2 \Delta''_1)_2 + (\Delta'_2 \Delta''_2)_1 + (\Delta'_2 \Delta''_2)_2 + (\Delta'_2 \Delta''_3)_1 + (\Delta'_2 \Delta''_3)_2 \\
 & + (\Delta'_2 \Delta''_4)_1 + (\Delta'_2 \Delta''_4)_2 + (\Delta'_3 \Delta''_1)_1 + (\Delta'_3 \Delta''_1)_2 + (\Delta'_3 \Delta''_2)_1 + (\Delta'_3 \Delta''_2)_2 \\
 & + (\Delta'_3 \Delta''_3)_1 + (\Delta'_3 \Delta''_3)_2 \\
 & + (\Delta'_4 \Delta''_1)_1 + (\Delta'_4 \Delta''_1)_2 + (\Delta'_4 \Delta''_2)_1 + (\Delta'_4 \Delta''_2)_2 \\
 & + (\Delta'_5 \Delta''_1)_1.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Порядок величин $(\Delta'_i \Delta''_k)_j$, находящихся в одной колонке, как и сумма всех индексов в них, одинаковы. Схема записи (5) является окончательной для получения произведения.

Пример. Вычислить $\sin 6^\circ$ как произведение $2 \sin 3^\circ$ на $\cos 3^\circ$.

Имеем:

$\sin 3^\circ = 0,052\ 335$	956 242	943 832	722 118	629 609
$2 \sin 3^\circ = 0,104\ 671$	912 485	887 665	444 237	259 218
$\cos 3^\circ = 0,998\ 629$	534 754	573 873	784 492	058 439

При вычислении на арифмометре типа „Феликс“, имеющем 8 окон в счетчике оборотов, 13 окон в результирующем счетчике и 9 рычагов для установки чисел на арифмометре, целесообразно сомножители разделить на группы по шесть цифр ($r = 6$). Следовательно, значения Δ' и Δ'' будут:

$$\begin{array}{ll} \Delta'_1 = 104\ 671 \cdot 10^{-6} & \Delta''_1 = 998\ 629 \cdot 10^{-6} \\ \Delta'_2 = 912\ 485 \cdot 10^{-12} & \Delta''_2 = 534\ 754 \cdot 10^{-12} \\ \Delta'_3 = 887\ 665 \cdot 10^{-18} & \Delta''_3 = 573\ 873 \cdot 10^{-18} \\ \Delta'_4 = 444\ 237 \cdot 10^{-24} & \Delta''_4 = 784\ 492 \cdot 10^{-24} \\ \Delta'_5 = 259\ 218 \cdot 10^{-30} & \Delta''_5 = 058\ 439 \cdot 10^{-30} \end{array}$$

Их произведения:

$$\begin{array}{ll} \Delta'_1 \Delta''_1 = 104\ 527\ 496\ 059 \cdot 10^{-12} & \Delta'_3 \Delta''_1 = 886\ 448\ 011\ 285 \cdot 10^{-24} \\ \Delta'_1 \Delta''_2 = 055\ 973\ 235\ 934 \cdot 10^{-18} & \Delta'_3 \Delta''_2 = 474\ 682\ 409\ 410 \cdot 10^{-30} \\ \Delta'_1 \Delta''_3 = 060\ 067\ 860\ 783 \cdot 10^{-24} & \Delta'_3 \Delta''_3 = 509\ 406\ 976\ 545 \cdot 10^{-36} \\ \Delta'_1 \Delta''_4 = 082\ 113\ 562\ 132 \cdot 10^{-30} & \Delta'_4 \Delta''_1 = 443\ 627\ 951\ 073 \cdot 10^{-30} \\ \Delta'_1 \Delta''_5 = 006\ 116\ 868\ 568 \cdot 10^{-36} & \Delta'_4 \Delta''_2 = 237\ 557\ 512\ 698 \cdot 10^{-36} \\ \Delta'_2 \Delta''_1 = 911\ 233\ 983\ 065 \cdot 10^{-18} & \Delta'_5 \Delta''_1 = 258\ 862\ 612\ 122 \cdot 10^{-36} \\ \Delta'_2 \Delta''_2 = 487\ 955\ 003\ 690 \cdot 10^{-24} & \\ \Delta'_2 \Delta''_3 = 523\ 650\ 504\ 405 \cdot 10^{-30} & \\ \Delta'_2 \Delta''_4 = 715\ 837\ 182\ 620 \cdot 10^{-36} & \end{array}$$

Или, соответственно обозначениям (4),

$$\begin{array}{ll} (\Delta'_1 \Delta''_1)_1 = 104\ 527 \cdot 10^{-6} & (\Delta'_1 \Delta''_1)_2 = 496\ 059 \cdot 10^{-12} \\ (\Delta'_1 \Delta''_2)_1 = 055\ 973 \cdot 10^{-12} & (\Delta'_1 \Delta''_2)_2 = 235\ 934 \cdot 10^{-18} \\ (\Delta'_1 \Delta''_3)_1 = 060\ 067 \cdot 10^{-18} & (\Delta'_1 \Delta''_3)_2 = 860\ 783 \cdot 10^{-24} \\ (\Delta'_1 \Delta''_4)_1 = 082\ 113 \cdot 10^{-24} & (\Delta'_1 \Delta''_4)_2 = 562\ 132 \cdot 10^{-30} \\ (\Delta'_1 \Delta''_5)_1 = 006\ 116 \cdot 10^{-30} & (\Delta'_1 \Delta''_5)_2 = 868\ 569 \cdot 10^{-36} \\ (\Delta'_2 \Delta''_1)_1 = 911\ 233 \cdot 10^{-12} & (\Delta'_2 \Delta''_1)_2 = 983\ 065 \cdot 10^{-18} \\ (\Delta'_2 \Delta''_2)_1 = 487\ 955 \cdot 10^{-18} & (\Delta'_2 \Delta''_2)_2 = 003\ 690 \cdot 10^{-24} \\ (\Delta'_2 \Delta''_3)_1 = 523\ 650 \cdot 10^{-24} & (\Delta'_2 \Delta''_3)_2 = 504\ 405 \cdot 10^{-30} \\ (\Delta'_2 \Delta''_4)_1 = 715\ 837 \cdot 10^{-30} & (\Delta'_2 \Delta''_4)_2 = 182\ 620 \cdot 10^{-36} \end{array}$$

и так далее. При этом из двух слагаемых в $\Delta'_1 \Delta''_5$, $\Delta'_2 \Delta''_4$, $\Delta'_3 \Delta''_3$, $\Delta'_2 \Delta''_4$ и $\Delta'_5 \Delta''_1$ следует брать только одно первое, так как второе слагаемое меньше $1 \cdot 10^{-30}$.

Подставив полученные значения $(\Delta'_i \Delta''_k)_1$ и $(\Delta'_i \Delta''_k)_2$ в (5), получим численную схему для вычисления произведений многозначных чисел (схема 1).

$2 \sin 3^\circ \cdot \cos 3^\circ = 0,104$	527	496	059	235	934	860	783	562	132
		055	973	060	067	082	113	006	117
		911	233	983	065	003	690	504	405
				487	955	523	650	715	837
				866	448	011	285	409	410
						474	682	509	407
						443	627	951	073
								273	558
								258	863
	1*		2*		3*		4*		

$$\sin 6^\circ = 0,104 \quad 528 \quad 463 \quad 267 \quad 653 \quad 471 \quad 399 \quad 834 \quad 154 \quad 802$$

Суммирование по колонкам следует начинать с последней. В результате суммирования образуются цифры, относящиеся к следующей (старшей) колонке; их можно сразу класть на счеты или записывать под соответствующими цифрами старшей колонки. На схеме эти цифры помечены звездочкой.

Возведение в степень

Возведение многозначных чисел в степень можно производить по схеме, составленной для умножения (схема 1). Однако при возведении чисел в квадрат лучше пользоваться другой, более компактной, схемой.

Приняв прежние обозначения, способ разделения на группы, число групп и число цифр в группах, составим схему для квадрата многозначного числа a .

$$\begin{aligned}
 a &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 \\
 a^2 &= \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2 + \Delta_5^2 + 2\Delta_1\Delta_2 + 2\Delta_1\Delta_3 + 2\Delta_1\Delta_4 + 2\Delta_1\Delta_5 \\
 &\quad + 2\Delta_2\Delta_3 + 2\Delta_2\Delta_4 + 2\Delta_2\Delta_5 + 2\Delta_3\Delta_4 + 2\Delta_3\Delta_5 + 2\Delta_4\Delta_5.
 \end{aligned}$$

Удерживая члены с суммой индексов до шести и группируя их в колонки по принципу одинаковой суммы индексов, получим

$$\begin{aligned}
 a^2 &= \Delta_1^2 + 2\Delta_1\Delta_2 + 2\Delta_1\Delta_3 + 2\Delta_1\Delta_4 + 2\Delta_1\Delta_5 \\
 &\quad + \Delta_2^2 + 2\Delta_2\Delta_3 + 2\Delta_2\Delta_4 \\
 &\quad + \Delta_3^2.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Полученные квадраты и произведения разделим опять на группы по такому же принципу, как и ранее (4):

$$\begin{aligned}
 \Delta_i^2 &= (\Delta_i^2)_1 + (\Delta_i^2)_2 \\
 2\Delta_i\Delta_k &= 2(\Delta_i\Delta_k)_1 + 2(\Delta_i\Delta_k)_2,
 \end{aligned}$$

и, подставляя их в выражение (6), получим окончательно

$$\begin{aligned}
 a^2 = & (\Delta_1^2)_1 + (\Delta_1^2)_2 + (\Delta_2^2)_1 + (\Delta_2^2)_2 + (\Delta_3^2)_1 \\
 & 2(\Delta_1\Delta_2)_1 + 2(\Delta_1\Delta_2)_2 + 2(\Delta_1\Delta_3)_2 + 2(\Delta_1\Delta_4)_2 \\
 & + 2(\Delta_1\Delta_3)_1 + 2(\Delta_1\Delta_4)_1 + 2(\Delta_1\Delta_5)_1 \\
 & + 2(\Delta_2\Delta_3)_1 + 2(\Delta_2\Delta_3)_2 \\
 & + 2(\Delta_2\Delta_4)_1.
 \end{aligned} \quad (7)$$

Произведения $\Delta_i\Delta_k$ можно записывать в схему, не удваивая, но при суммировании их нужно складывать в первую очередь, и, удвоив полученное, прибавить Δ_i^2 , которые для удобства вычислений отнесены к первой строке схемы.

Пример. Вычислить квадрат $\sin 6^\circ$:

$$\Delta_1 = 104\ 528 \cdot 10^{-6}$$

$$\Delta_2 = 463\ 267 \cdot 10^{-12}$$

$$\Delta_3 = 653\ 471 \cdot 10^{-18}$$

$$\Delta_4 = 399\ 834 \cdot 10^{-24}$$

$$\Delta_5 = 154\ 802 \cdot 10^{-30}$$

$$\Delta_1^2 = 010\ 926\ 102\ 784 \cdot 10^{-12} \quad \Delta_2^2 = 214\ 616\ 313\ 289 \cdot 10^{-24}$$

$$\Delta_1\Delta_2 = 048\ 424\ 372\ 976 \cdot 10^{-18} \quad \Delta_2\Delta_3 = 302\ 731\ 549\ 757 \cdot 10^{-30}$$

$$\Delta_1\Delta_3 = 068\ 306\ 016\ 688 \cdot 10^{-24} \quad (\Delta_2\Delta_4)_1 = 185\ 230 \cdot 10^{-30}$$

$$\Delta_1\Delta_4 = 041\ 793\ 848\ 352 \cdot 10^{-30} \quad (\Delta_3^2)_1 = 427\ 024 \cdot 10^{-30}$$

$$(\Delta_1\Delta_5)_1 = 016\ 181 \cdot 10^{-30}$$

$$\begin{array}{rcccccc}
 \sin^2 6^\circ = 0,010\ 926 & 102\ 784 & 214\ 616 & 313\ 289 & 427\ 024 & \\
 & 048\ 424 & 372\ 976 & 016\ 688 & 848\ 352 & \\
 & & 068\ 306 & 041\ 793 & 016\ 181 & \\
 & & & 302\ 731 & 549\ 757 & \\
 & & & & 185\ 230 & \\
 & & & & & \left. \vphantom{\begin{array}{l} 010\ 926 \\ 048\ 424 \\ 068\ 306 \\ 041\ 793 \\ 302\ 731 \\ 185\ 230 \end{array}} \right\}^{1)} \\
 & & & & & 1 \qquad 1 \qquad 3
 \end{array}$$

Схема II

$$\sin^2 6^\circ = 0,010\ 926\ 199\ 633\ 097\ 181\ 035\ 716\ 626\ 064$$

Для получения любой степени многозначного числа можно воспользоваться биномиальным рядом

$$\begin{aligned}
 a^n &= (a_0 + \Delta a)^n = a_0^n \left(1 + \frac{\Delta a}{a_0} \right)^n = \\
 &= a_0^n \left[1 + \frac{n}{1!} \frac{\Delta a}{a_0} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{\Delta a}{a_0} \right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left(\frac{\Delta a}{a_0} \right)^3 + \dots \right],
 \end{aligned}$$

где за a_0 можно принять первую группу числа a . С другой стороны,

¹⁾ Цифры этих строк при суммировании удваивать; их складывать в первую очередь.

любую степень можно получить, применяя правила умножения и возведения в квадрат.

Процесс возведения в квадрат 30—36-значного числа на арифмометре занимает 8—10 минут, а умножение таких же чисел — раза в полтора больше.

Деление

Деление многозначных чисел на многозначные — процесс более сложный, чем умножение и возведение в квадрат. Деление многозначных чисел на 6—7-значные числа на арифмометре выполняется сравнительно просто. Оно производится путем набора делимого на результирующую каретку в несколько приемов. Так, поставив на рычагах делитель, на результирующий счетчик набирают делимое. На счетчике оборотов получится частное от деления. За один прием можно получить 7—8 цифр. После этого следует на рычагах поставить неполные цифры делимого и, сняв все цифры с результирующего счетчика, поставить его в левой части счетчика. Установив снова делимое и сняв цифры со счетчика оборотов, продолжать набор делителя. Так, 36-значное число можно поделить на шестизначное за 5—6 приемов.

Деление многозначных чисел на многозначные непосредственно на обычном арифмометре невозможно, но его можно заменить сравнительно простыми действиями: делением многозначного числа на 5—7-значное, умножением и возведением в степень многозначных чисел. Рассмотрим порядок работы.

Пусть требуется найти частное от деления многозначного числа a на многозначное число b .

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{a}{b_0 + \Delta b} = \frac{a}{b_0} \left(1 + \frac{\Delta b}{b_0} \right)^{-1} = \\ &= \frac{a}{b_0} \left[1 - \frac{\Delta b}{b_0} + \left(\frac{\Delta b}{b_0} \right)^2 - \left(\frac{\Delta b}{b_0} \right)^3 + \dots \right] = \frac{a}{b_0} N, \end{aligned} \quad (8)$$

где b_0 — приближенное значение числа b — первые шесть или семь значащих цифр.

Если за b_0 взята первая группа числа b , то при разложении в ряд следует ограничиться степенью $m-1$ (m — число групп делителя).

Пример. Найти $\operatorname{tg} 6^\circ$, как частное от деления $\sin 6^\circ$ на $\cos 6^\circ$.

$$a = \sin 6^\circ = 0,104\ 528\ 463\ 267\ 653\ 471\ 399\ 834\ 154\ 802$$

$$b = \cos 6^\circ = 0,994\ 521\ 895\ 368\ 273\ 336\ 922\ 691\ 944\ 981$$

$$b_0 = 0,994\ 521$$

$$\Delta b = 0,000\ 000\ 895\ 368\ 273\ 336\ 922\ 691\ 944\ 981$$

$$\frac{\Delta b}{b_0} = 0,000\ 000\ 900\ 301\ 022\ 639\ 967\ 071\ 529\ 893$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta b}{b_0} \right)^2 &= 0,000\ 000\ 000\ 000\ 810\ 541\ 890\ 601\ 000\ 513 \\ &\quad 20\ 381\ 914\ 339\ 870\ 655 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\Delta b}{b_0} \right)^2 = 0,000\ 000\ 000\ 000\ 810\ 541\ 931\ 366\ 570\ 501$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta b}{b_0} \right)^3 &= 0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 729\ 730\ 872\ 841 \\ &\quad 838\ 510\ 18\ 351 \end{aligned}$$

$\left(\frac{\Delta b}{b_0}\right)^3 = 0,000\ 000$	000 000	000 000	729 731	729 702
$\left(\frac{\Delta b}{b_0}\right)^4 = 0,000\ 000$	000 000	000 000	000 000	656 978
$N = 0,999\ 999$	099 699	787 901	234 563	967 884
$\frac{a}{b_0} = 0,105\ 104$	329 891	126 955	991 712	784 953
$\frac{a}{b_0} \cdot N = 0,105\ 103$	894 896	763 696	546 704	509 552
	010 478	082 811	024 653	101 729
	329 890	670 109	802 809	448 791
		032 889	259 921	077 381
		126 954	873 045	286 545
			012 657	100 028
			991 711	008 288
				098 873
				748 953
—	1	1	3	2
$\text{tg } 6^\circ = 0,105\ 104$	235 265	676 462	511 502	380 140

Примечание. При массовых вычислениях нули в $\left(\frac{\Delta b}{b_0}\right)^2$, $\left(\frac{\Delta b}{b_0}\right)^3$ и $\left(\frac{\Delta b}{b_0}\right)^4$ писать не следует, как это делалось при умножении $\frac{a}{b_0}$ на N .

Извлечение корня

Рассмотренные выше правила и приемы действий с многозначными числами позволяют нам сравнительно просто решить задачу и извлечения корней любой степени с большой степенью точности при помощи арифмометра. Для решения этой задачи воспользуемся опять биномиальным рядом:

$$\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{1}{n}x + \frac{1-n}{n \cdot 2n}x^2 + \frac{(1-n)(1-2n)}{n \cdot 2n \cdot 3n}x^3 + \\ + \frac{(1-n)(1-2n)(1-3n)}{n \cdot 2n \cdot 3n \cdot 4n}x^4 + \dots \quad (9)$$

Возьмем для примера $n = 2$ (квадратный корень)

$$\sqrt{a} = \sqrt{a_0 + \Delta a} = \sqrt{a_0} \left(1 + \frac{\Delta a}{a_0}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\left(1 + \frac{\Delta a}{a_0}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta a}{a_0} - \frac{1}{8} \left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^3 - \\ - \frac{5}{128} \left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^4 + \frac{7}{256} \left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^5 - \frac{21}{1024} \left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^6 + \dots \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{33}{2048} \left(\frac{\Delta a}{a_0} \right)^7 - \frac{429}{32768} \left(\frac{\Delta a}{a_0} \right)^8 + \frac{75}{65536} \left(\frac{\Delta a}{a_0} \right)^9 - \\
& - \frac{2431}{262144} \left(\frac{\Delta a}{a_0} \right)^{10} + \frac{4199}{524288} \left(\frac{\Delta a}{a_0} \right)^{11} - \frac{29393}{4194304} \left(\frac{\Delta a}{a_0} \right)^{12} + \\
& + \frac{676039}{109051904} \left(\frac{\Delta a}{a_0} \right)^{13} - \frac{16900975}{3053453312} \left(\frac{\Delta a}{a_0} \right)^{14} + \dots
\end{aligned}$$

Для того, чтобы объем вычислительных работ при решении этой задачи был по возможности меньше, следует обратить внимание на выбор числа a_0 :

- 1) корень из него должен извлекаться без остатка;
- 2) число a_0 должно быть по возможности больше, чтобы отношение $\frac{\Delta a}{a_0}$ было меньше, а сходимость ряда быстрее;

3) если в числе a_0 будет много цифр (больше 6—7), то деление на него осложнится и вычислений при нахождении $\frac{\Delta a}{a_0}$ прибавится, но в отдельных случаях это может быть в целом и выгодно.

Пример. Найти значение $\sqrt[3]{0,75}$ с 60 значащими цифрами.

Примем $a_0 = 0,749\,956$. Тогда $\sqrt[3]{a_0} = 0,866$ и $\Delta a = 0,000044$. Непосредственное вычисление показывает, что для определения $\sqrt[3]{0,75}$ с 60 знаками нужно взять 14 членов ряда (10). В результате подсчета мы получили 62 верных цифры (см. стр. 27—29).

Вычисление корней по такой схеме занимает сравнительно с возведением в квадрат и умножением много времени. На вычисление корня с точностью до $10^{-60} - 10^{-70}$ при некотором навыке и знакомстве с порядком вычислений потребуется 10—12 часов. Очевидно, что вычисление корней с меньшей точностью, когда учету будет подлежать меньшее число членов ряда и вычисляться они должны с меньшей точностью, затрата времени значительно сократится.

Вычисление квадратных корней может выполняться и по другой схеме. Зная, что извлечение корня есть действие, обратное возведению в степень, для решения этой задачи можно воспользоваться схемой возведения в квадрат (схема II). Перепишем выражение (7) в таком виде:

$$\begin{aligned}
a^2 = & (\Delta_1^2)_1 + (\Delta_1^2)_2 + (\Delta_2^2)_1 + (\Delta_2^2)_2 + (\Delta_3^2)_1 + \dots \\
& + 2(\Delta_1 \Delta_2)_1 + 2(\Delta_1 \Delta_2)_2 + 2(\Delta_1 \Delta_3)_2 + 2(\Delta_1 \Delta_4)_2 + \dots \\
& + 2(\Delta_1 \Delta_3)_1 + 2(\Delta_1 \Delta_4)_1 + 2(\Delta_1 \Delta_5)_1 + \dots \\
& + 2(\Delta_2 \Delta_3)_1 + 2(\Delta_2 \Delta_3)_2 + \dots \\
& + 2(\Delta_2 \Delta_4)_1 + \dots
\end{aligned}$$

$$a^2 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \dots$$

При извлечении корня в этой схеме нам будут известны $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$. Задача будет состоять в нахождении $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$. Искомое Δ_1 может

$\frac{\Delta a}{a_0}$	$\cdot 10^4 = 0,586\ 701$	086 463	739 206	033 420	627 343	470 816	954 594	669 553	947 164	900 340
$\left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^2$	$\cdot 10^8 = 0,344\ 218$	164 857	731 987	816 225	319 926	938 593	010 818	840 843	645 163	924 5
$\left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^3$	$\cdot 10^{12} = 0,201\ 953$	171 302	585 851	222 123	885 625	090 980	079 845	070 872	429 678	
$\left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^4$	$\cdot 10^{16} = 0,118\ 486$	145 018	024 756	836 047	060 994	300 133	921 365	828 373		
$\left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^5$	$\cdot 10^{20} = 0,069\ 515$	950 012	975 285	227 214	272 353	967 511	327 865	85		
$\left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^6$	$\cdot 10^{24} = 0,040\ 785$	083 399	171 585	399 642	485 473	475 383	868	2		
$\left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^7$	$\cdot 10^{28} = 0,023\ 928$	652 741	808 182	847 850	665 383	474 721				
$\left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^8$	$\cdot 10^{32} = 0,014\ 038$	966 561	232 391	904 456	118 450	587 6				
$\left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^9$	$\cdot 10^{36} = 0,008\ 236$	676 934	303 149	622 058	750 271					
$\left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^{10}$	$\cdot 10^{40} = 0,004\ 832$	467 306	206 478	558 349	89					
$\left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^{11}$	$\cdot 10^{44} = 0,002\ 835$	213 818	851 840	061						
$\left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^{12}$	$\cdot 10^{48} = 0,001\ 663$	423 027	877 382							
$\left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^{13}$	$\cdot 10^{52} = 0,000\ 975$	932 097	6							
$\left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^{14}$	$\cdot 10^{56} = 0,000\ 572$	580 4								

$$\begin{aligned}
1 + \kappa_1 \frac{\Delta a}{a_0} &= 1,000\ 029\ 335\ 054\ 323\ 186\ 960\ 301\ 671\ 031\ 367\ 173\ 540\ 847\ 729\ 733\ 477\ 697\ 358\ 245\ 017\ 0 \\
\kappa_3 \left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^3 &= 12\ 622\ 073\ 206\ 411\ 615\ 701\ 382\ 742\ 851\ 568\ 373\ 754\ 990\ 316\ 929\ 526\ 9 \\
\kappa_5 \left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^5 &= 19\ 008\ 267\ 581\ 672\ 929\ 554\ 316\ 402\ 596\ 402\ 991\ 378\ 713\ 1 \\
\kappa_7 \left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^7 &= 38\ 556\ 911\ 156\ 233\ 888\ 377\ 884\ 372\ 932\ 356\ 7 \\
\kappa_9 \left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^9 &= 89\ 862\ 426\ 880\ 291\ 015\ 316\ 345\ 3 \\
\kappa_{11} \left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^{11} &= 227\ 071\ 053\ 034\ 951\ 7 \\
\kappa_{13} \left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^{13} &= 605\ 003\ 8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= 1,000\ 029\ 335\ 054\ 335\ 809\ 033\ 527\ 090\ 914\ 638\ 786\ 124\ 499\ 710\ 825\ 314\ 722\ 108\ 441\ 914\ 5 \\
\kappa_2 \left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^2 &= 0,000\ 000\ 000\ 430\ 272\ 706\ 072\ 164\ 984\ 770\ 281\ 649\ 908\ 673\ 241\ 263\ 523\ 551\ 054\ 556\ 454\ 9 \\
\kappa_4 \left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^4 &= 462\ 836\ 503\ 976\ 659\ 206\ 390\ 808\ 832\ 008\ 984\ 898\ 130\ 335\ 267\ 1 \\
\kappa_6 \left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^6 &= 836\ 412\ 843\ 147\ 073\ 528\ 703\ 605\ 659\ 124\ 006\ 695\ 7 \\
\kappa_8 \left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^8 &= 1\ 837\ 987\ 260\ 366\ 423\ 509\ 525\ 047\ 245\ 9 \\
\kappa_{10} \left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^{10} &= 4\ 481\ 402\ 596\ 049\ 480\ 200\ 0 \\
\kappa_{12} \left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^{12} &= 11\ 656\ 997\ 933\ 0 \\
\kappa_{14} \left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^{14} &= 317\ 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_2 &= 0,000\ 000\ 000\ 430\ 272\ 706\ 535\ 001\ 489\ 583\ 353\ 701\ 234\ 542\ 866\ 823\ 940\ 225\ 540\ 424\ 028\ 3 \\
\Sigma_1 - \Sigma_2 &= 1,000\ 029\ 334\ 624\ 063\ 102\ 498\ 525\ 601\ 331\ 335\ 084\ 839\ 956\ 844\ 001\ 374\ 496\ 568\ 017\ 886\ 2
\end{aligned}$$

$$\sqrt{0,75} = \sqrt{a_0} \left(1 + \frac{\Delta a}{a_0}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,866 (\Sigma_1 - \Sigma_2).$$

$$\sqrt{0,75} = 0,866\ 025\ 403\ 784\ 438\ 646\ 763\ 723\ 170\ 752\ 936\ 183\ 471\ 402\ 626\ 905\ 190\ 314\ 027\ 903\ 489$$

Примечание. Через κ_i обозначены коэффициенты при $\left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^i$ (формула 10).

быть получено любым из известных нам способов: на арифмометре, из таблиц или, наконец, вычислением на бумаге. Зная Δ_1 , мы можем получить Δ_1^2 , которое в схеме записано как

$$(\Delta_1^2)_1 + (\Delta_1^2)_2.$$

Тогда из второй колонки схемы получим Δ_2 .

$$(\Delta_1^2)_2 + 2(\Delta_1 \Delta_2)_1 = \delta_2;$$

$$2\Delta_2 = \frac{\delta_2 - (\Delta_1^2)_2}{\Delta_1}.$$

Возведя Δ_2 в квадрат и подставив его в схему, из третьей колонки сможем получить Δ_3 .

$$2\Delta_3 = \frac{\delta_3 - (\Delta_2^2)_1 - 2(\Delta_1 \Delta_2)_2}{\Delta_1}.$$

Затем найдем

$$2\Delta_4 = \frac{\delta_4 - (\Delta_3^2)_2 - 2(\Delta_1 \Delta_3)_2 - 2(\Delta_2 \Delta_3)_1}{\Delta_1}$$

и так далее.

Такой способ вычисления несравненно проще вышеприведенного, но в нем имеется существенный недостаток, — значения $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \dots$ из написанных выше выражений могут быть найдены с ошибками порядка одной-двух единиц последнего знака группы. Однако при соответствующем навыке вычислений этот недостаток не будет иметь серьезного препятствия.

Вычисление корней с любым показателем подобно вычислению квадратного корня. Ниже приводятся ряды для получения корней 3, 4 и 5 степени.

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \\ + \frac{22}{729}x^5 - \frac{154}{6561}x^6 + \dots$$

$$\sqrt[4]{1+x} = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{7}{128}x^3 - \frac{77}{2048}x^4 + \\ + \frac{231}{8192}x^5 - \frac{1461}{65536}x^6 + \dots$$

$$\sqrt[5]{1+x} = 1 + \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2 + \frac{6}{125}x^3 - \frac{21}{625}x^4 + \\ + \frac{399}{15625}x^5 - \frac{1596}{78125}x^6 + \dots$$

В целом все действия с многозначными числами сводятся к умножению и возведению в квадрат этих чисел и к делению их на 6—7-значные числа.

Таблицы тригонометрических функций

Авторами настоящей работы предлагаемые методы оперирования с многозначными числами были применены для ряда вычислений при составлении геодезических таблиц. Одним из наиболее крупных ра-

счетов такого рода было вычисление авторами таблицы синусов и косинусов с 27 знаками после запятой, которые и приводятся в приложениях 1 и 2.

Значения тригонометрических функций вычислены по формулам суммы и разности аргументов и по формулам двойных и тройных углов.

$$\sin(x \pm h) = \sin x \cdot \cos h \pm \cos x \cdot \sin h,$$

$$\cos(x \pm h) = \cos x \cdot \cos h \pm \sin x \cdot \sin h,$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

$$\sin 3x = \sin x (4 \cos^2 x - 1),$$

$$\cos 3x = \cos x (1 - 4 \sin^2 x).$$

При использовании в вычислениях косинуса малых углов брались его дополнения до единицы.

$$\cos h = 1 - \varepsilon_h; \cos x = 1 - \varepsilon_x.$$

$$\sin(x + h) = \sin x + \sin h - \varepsilon_h \sin x - \varepsilon_x \sin h.$$

$$\cos^2 h = (1 - \varepsilon_h)^2 = (1 + \varepsilon_h^2) - 2 \varepsilon_h.$$

Объем вычислений в этом случае сокращается в 1,5—2 раза.

Непосредственным вычислением из рядов получены значения синусов и косинусов 1° , $1'$, $1''$, 10° , $10'$, $10''$, $6'$, $15'$, $40'$, $50'$ и 17° с точностью не менее, чем до 1.10^{-33} . Кроме того, вычислены $\sqrt{2}$ с точностью до 1.10^{-42} и $\sqrt{0,75}$ с точностью до 1.10^{-66} , дающие синус и косинус 45° , косинус 30° и синус 60° .

Вычисления начаты с получения значений $\frac{1}{\rho}$ и $\frac{1}{n!}$. Значение $\frac{1}{\rho^\circ}$,

равное $\frac{\pi}{180}$, получено путем набора числа π на результирующей каретке арифмометра. Результаты вычислений основных данных приведены в приложениях 3—8.

Таким образом, пользуясь описанными выше приемами работы, можно на арифмометре производить вычисления с любым числом значащих цифр.

ТАБЛИЦЫ

27-ЗНАЧНЫХ СИНУСОВ И КОСИНУСОВ И ИХ КВАДРАТОВ

ЧЕРЕЗ 1°

Sin X

1°	0,017 452	406 437	283 512	819 418	979	89°
2	0,034 899	496 702	500 971	645 995	182	88
3	0,052 335	956 242	943 832	722 118	630	87
4	0,069 756	473 744	125 300	775 958	835	86
5	0,087 155	742 747	658 173	558 064	271	85
6	0,104 528	463 267	653 471	399 834	155	84
7	0,121 869	343 405	147 481	112 893	919	83
8	0,139 173	100 960	065 444	112 496	663	82
9	0,156 434	465 040	230 869	010 105	319	81
10	0,173 468	177 666	930 348	851 716	627	80
11	0,190 808	995 376	544 812	405 140	488	79
12	0,207 911	690 817	759 337	101 742	284	78
13	0,224 951	054 343	864 998	051 107	208	77
14	0,241 921	895 599	667 722	560 442	374	76
15	0,258 819	045 102	520 762	348 898	838	75
16	0,275 637	355 816	999 185	649 971	575	74
17	0,292 371	704 722	736 728	097 468	695	73
18	0,309 016	994 374	947 424	102 293	417	72
19	0,325 568	154 457	156 668	714 008	936	71
20	0,342 020	143 325	668 733	044 099	615	70
21	0,358 367	949 545	300 273	484 137	789	69
22	0,374 606	592 415	912 035	414 963	775	68
23	0,390 731	128 489	273 755	062 084	589	67
24	0,406 736	643 075	800 207	753 985	990	66
25	0,422 618	261 740	699 436	186 978	490	65
26	0,438 371	146 789	077 417	452 734	541	64
27	0,453 990	499 739	546 791	560 408	366	63
28	0,469 471	562 785	890 775	959 462	288	62
29	0,484 809	620 246	337 029	075 379	622	61
30	0,500 000	000 000	000 000	000 000	000	60
31	0,515 038	074 910	054 210	081 631	936	59
32	0,529 919	264 233	204 954	046 781	152	58
33	0,544 639	035 015	027 082	224 083	692	57
34	0,559 192	903 470	746 830	160 428	140	56
35	0,573 576	436 351	046 096	108 031	913	55
36	0,587 785	252 292	473 129	168 705	955	54
37	0,601 815	023 152	048 279	917 977	000	53
38	0,615 661	475 325	658 279	668 811	093	52
39	0,629 320	391 049	837 452	705 902	458	51
40	0,642 787	609 686	539 326	322 643	410	50
41	0,656 059	028 990	507 284	782 495	964	49
42	0,669 130	606 358	858 213	826 273	331	48
43	0,681 998	360 062	498 500	442 225	785	47
44	0,694 658	370 458	997 286	656 406	299	46
45°	0,707 106	781 186	547 524	400 844	362	45°

Cos X

Sin X

46°	0,719 339	800 338	651 139	356 054	674	44°
47	0,731 353	701 619	170 483	287 543	608	43
48	0,743 144	825 477	394 235	014 697	049	42
49	0,754 709	580 222	771 997	942 984	220	41
50	0,766 044	443 118	978 035	202 392	651	40
51	0,777 145	961 456	970 879	979 937	744	39
52	0,788 010	753 606	721 956	693 977	788	38
53	0,798 635	510 047	292 846	284 000	804	37
54	0,809 016	994 374	947 424	102 293	417	36
55	0,819 152	044 288	991 789	684 488	386	35
56	0,829 037	572 555	041 692	006 336	842	34
57	0,838 670	567 945	424 029	637 590	942	33
58	0,848 048	096 156	425 970	386 176	179	32
59	0,857 167	300 702	112 287	465 217	980	31
60	0,866 025	403 784	438 646	763 723	171	30
61	0,874 619	707 139	395 800	284 636	959	29
62	0,882 947	592 858	926 942	032 171	360	28
63	0,891 006	524 188	367 862	359 709	571	27
64	0,898 794	046 299	166 992	782 295	677	26
65	0,906 307	787 036	649 963	242 552	657	25
66	0,913 545	457 642	600 895	502 127	572	24
67	0,920 504	853 452	440 327	396 894	723	23
68	0,927 183	854 566	787 400	806 474	451	22
69	0,933 580	426 497	201 748	990 043	063	21
70	0,939 692	620 785	908 384	054 109	277	20
71	0,945 518	575 599	316 810	348 124	708	19
72	0,951 056	516 295	153 572	116 439	333	18
73	0,956 304	755 963	035 481	338 650	817	17
74	0,961 261	695 938	318 861	916 497	049	16
75	0,965 925	826 289	068 286	749 743	200	15
76	0,970 295	726 275	996 472	306 377	874	14
77	0,974 370	064 785	235 228	539 694	480	13
78	0,978 147	600 733	805 637	928 566	748	12
79	0,981 627	183 447	663 953	496 504	900	11
80	0,984 807	753 012	208 059	336 743	025	10
81	0,987 688	340 595	137 726	190 040	248	9
82	0,990 268	068 741	570 315	083 774	867	8
83	0,992 546	151 641	322 034	980 061	589	7
84	0,994 521	895 368	273 336	922 691	945	6
85	0,996 194	698 091	745 532	295 010	402	5
86	0,997 564	050 259	824 247	613 162	681	4
87	0,998 629	534 754	573 873	784 492	058	3
88	0,999 390	827 019	095 730	006 243	440	2
89	0,999 847	695 156	391 239	157 011	559	1
90°	0,000 000	000 000	000 000	000 000	000	0°

Cos X

$\sin^2 X$

1°	0,000 304	586 490	452 134	996 878	280	89°
2	0,001 217	974 870	087 876	193 418	660	88
3	0,002 739	052 315	863 331	538 654	028	87
4	0,004 865	965 629	214 842	458 112	566	86
5	0,007 596	123 493	895 970	316 628	488	85
6	0,010 926	199 633	097 181	035 716	626	84
7	0,014 852	136 862	001 763	846 811	063	83
8	0,019 369	152 030	840 569	041 751	476	82
9	0,024 471	741 852	423 213	941 780	333	81
10	0,030 153	689 607	045 807	972 945	361	80
11	0,036 408	072 716	606 299	596 762	774	79
12	0,043 227	271 178	699 552	248 936	214	78
13	0,050 602	976 850	416 503	608 852	162	77
14	0,058 526	203 570	536 528	983 914	320	76
15	0,066 987	298 107	780 676	618 138	415	75
16	0,075 975	951 921	787 014	806 911	911	74
17	0,085 481	213 722	479 153	996 831	579	73
18	0,095 491	502 812	526 287	948 853	291	72
19	0,105 994	623 196	639 021	653 011	106	71
20	0,116 977	778 440	510 982	398 803	675	70
21	0,128 427	587 261	302 882	492 651	476	69
22	0,140 330	099 830	674 430	321 972	663	68
23	0,152 670	814 770	501 356	671 796	850	67
24	0,165 434	696 820	570 893	086 863	335	66
25	0,178 606	195 156	730 336	838 678	295	65
26	0,192 169	262 337	170 860	165 594	454	64
27	0,206 107	373 853	763 435	415 647	023	63
28	0,220 403	548 264	626 584	919 785	930	62
29	0,235 040	367 883	397 522	976 609	424	61
30	0,250 000	000 000	000 000	000 000	000	60
31	0,265 264	218 607	054 612	020 268	856	59
32	0,280 814	426 605	461 291	273 632	730	58
33	0,296 631	678 462	099 896	123 007	005	57
34	0,312 696	703 292	043 982	292 518	113	56
35	0,328 989	928 337	165 633	477 950	193	55
36	0,345 491	502 812	526 287	948 853	291	54
37	0,362 181	322 091	500 407	175 014	213	53
38	0,379 039	052 200	166 138	719 778	813	52
39	0,396 044	154 591	120 331	449 128	858	51
40	0,413 175	911 166	534 825	574 141	687	50
41	0,430 413	449 519	967 277	943 751	668	49
42	0,447 735	768 366	173 264	300 082	923	48
43	0,465 121	763 127	937 349	612 020	582	47
44	0,482 550	251 648	749 514	177 002	409	46
45°	0,500 000	000 000	000 000	000 000	000	45°

 $\cos^2 X$

$\sin^2 X$

46°	0,517 449	748 351	250 485	822 997	591	44°
47	0,534 878	236 872	062 650	387 979	418	43
48	0,552 264	231 633	826 735	699 917	077	42
49	0,569 586	550 480	032 722	056 248	332	41
50	0,586 824	088 833	465 174	425 858	313	40
51	0,603 955	845 408	879 669	550 871	142	39
52	0,620 960	947 799	833 861	280 221	187	38
53	0,637 817	677 908	499 592	824 985	787	37
54	0,654 508	497 187	473 712	051 146	709	36
55	0,671 010	071 662	834 366	522 049	807	35
56	0,687 303	296 707	956 017	707 481	887	34
57	0,703 368	321 537	900 103	876 992	995	33
58	0,719 185	573 394	538 708	726 367	270	32
59	0,734 735	781 392	945 387	979 731	144	31
60	0,750 000	000 000	000 000	000 000	000	30
61	0,764 959	632 116	602 477	023 390	576	29
62	0,779 596	451 735	373 415	080 214	070	28
63	0,793 892	626 146	236 564	584 352	977	27
64	0,807 830	737 662	829 139	834 405	546	26
65	0,821 393	804 843	269 663	161 321	705	25
66	0,834 565	303 179	429 106	913 136	665	24
67	0,847 329	185 229	498 643	328 203	150	23
68	0,859 669	900 169	325 569	678 027	337	22
69	0,871 572	412 738	697 117	507 348	524	21
70	0,883 022	221 559	489 017	601 196	325	20
71	0,894 005	376 803	360 978	346 988	804	19
72	0,901 508	497 187	473 712	051 146	709	18
73	0,914 518	786 277	520 846	003 168	421	17
74	0,924 024	048 078	212 985	193 088	089	16
75	0,933 012	701 892	219 323	381 861	585	15
76	0,941 473	796 429	463 471	016 085	680	14
77	0,949 397	023 149	583 496	391 147	838	13
78	0,956 772	728 821	300 447	751 063	786	12
79	0,963 591	927 283	393 700	403 237	226	11
80	0,969 846	310 392	954 192	027 054	639	10
81	0,975 528	258 147	576 786	058 219	667	9
82	0,980 630	847 969	159 430	958 248	524	8
83	0,985 147	863 137	998 236	153 188	937	7
84	0,989 073	800 366	902 818	964 283	374	6
85	0,992 403	876 506	104 029	683 371	512	5
86	0,995 134	034 370	785 157	541 887	434	4
87	0,997 260	947 684	136 668	461 345	972	3
88	0,998 782	025 129	912 123	806 581	340	2
89	0,999 695	413 509	547 865	003 121	720	1
90°	1,000 000	000 000	000 000	000 000	000	0°

 $\cos^2 X$

ТАБЛИЦЫ

27-ЗНАЧНЫХ СИНУСОВ И КОСИНУСОВ ЧЕРЕЗ 1'
В ПРЕДЕЛАХ ОДНОГО ГРАДУСА И ЧЕРЕЗ 1"
В ПРЕДЕЛАХ ОДНОЙ МИНУТЫ

1'	0,000 290	888 204	563 424	596 374	297
2	0,000 581	776 384	513 067	610 614	395
3	0,000 872	664 515	235 149	543 304	589
4	0,001 163	552 572	115 895	060 465	990
5	0,001 454	440 530	541 535	076 274	491
6	0,001 745	328 365	898 308	835 778	203
7	0,002 036	216 053	572 465	997 614	191
8	0,002 327	013 568	950 268	716 724	326
9	0,002 617	990 887	417 993	727 070	078
10	0,002 908	877 984	361 934	424 346	077
11	0,003 199	764 835	168 402	948 692	265
12	0,003 490	651 415	223 732	267 404	463
13	0,003 781	537 699	914 278	257 643	169
14	0,004 072	423 664	626 421	789 140	428
15	0,004 363	309 284	746 570	806 904	576
16	0,004 654	194 535	661 162	413 922	704
17	0,004 945	079 392	756 664	953 860	643
18	0,005 235	963 831	419 580	093 760	318
19	0,005 526	847 827	036 444	906 734	273
20	0,005 817	731 354	993 833	954 657	202
21	0,006 108	614 390	678 361	370 854	312
22	0,006 399	496 909	476 682	942 786	334
23	0,006 690	378 886	775 498	194 731	007
24	0,006 981	260 297	961 552	470 460	868
25	0,007 272	141 118	421 639	015 917	161
26	0,007 563	021 323	542 601	061 879	689
27	0,007 853	900 888	711 333	906 632	445
28	0,008 144	779 789	314 786	998 624	831
29	0,008 435	658 000	739 966	019 128	295
30	0,008 726	535 498	373 934	964 888	214
31	0,009 017	412 257	603 818	230 770	838
32	0,009 308	288 253	816 802	692 405	128
33	0,009 599	162 950	400 139	788 819	301
34	0,009 890	037 858	741 147	605 071	917
35	0,010 180	911 418	227 212	954 877	329
36	0,010 471	784 116	245 793	463 225	307
37	0,010 762	655 928	184 419	648 994	680
38	0,011 053	526 829	430 697	007 560	808
39	0,011 344	396 795	372 308	093 396	707
40	0,011 635	265 801	397 014	602 667	655
41	0,011 926	133 822	892 659	455 819	103
42	0,012 217	000 835	247 168	880 157	711
43	0,012 507	866 813	848 554	492 425	335
44	0,012 798	738 734	084 915	381 365	790
45	0,013 089	595 571	344 440	190 284	210
46	0,013 380	458 301	015 409	199 598	832
47	0,013 671	319 386	486 196	409 385	025
48	0,013 962	180 339	145 271	621 911	388
49	0,014 253	039 598	381 202	524 167	743
50	0,014 543	897 651	582 656	770 384	846
51	0,014 834	754 474	138 404	064 545	635
52	0,015 125	610 041	437 318	242 887	850
53	0,015 416	464 328	868 379	356 397	834
54	0,015 707	317 311	820 675	753 295	353
55	0,015 998	168 965	683 406	161 509	250
56	0,016 289	019 265	845 881	771 143	754
57	0,016 579	868 187	697 528	316 935	284
58	0,016 870	715 706	627 888	160 699	552
59	0,017 161	561 798	026 622	373 768	796
60'	0,017 452	406 437	283 512	819 418	979

Cos X

1'	0,999 999	957 692	025 327	951 262	487
2	999	830 768	104 891	734 491	650
3	999	619 228	249 431	137 709	674
4	999	323 072	476 845	806 610	470
5	998	942 300	812 195	243 045	082
6	998	476 913	287 698	802 901	248
7	997	926 909	942 735	693 377	134
8	997	292 290	823 844	969 649	224
9	996	573 055	984 725	530 934	370
10	995	769 205	486 236	115 946	012
11	994	880 739	396 395	297 744	560
12	993	907 657	790 381	477 981	931
13	992	849 960	750 532	880 540	264
14	991	707 648	366 347	544 564	790
15	990	840 720	734 483	316 890	870
16	989	169 177	958 757	843 865	202
17	987	773 020	150 148	562 561	189
18	986	292 247	426 792	691 388	480
19	984	726 859	913 987	220 096	677
20	983	076 857	744 188	899 173	210
21	981	342 241	057 014	228 635	385
22	979	523 009	999 239	446 216	600
23	977	619 164	724 800	514 946	735
24	975	630 705	394 793	110 126	714
25	973	557 632	177 472	605 697	241
26	971	399 945	248 254	060 001	713
27	969	157 644	789 127	200 943	309
28	966	830 730	991 581	410 536	252
29	964	419 204	050 755	708 851	260
30	961	923 064	171 288	737 355	165
31	959	342 311	564 393	741 644	727
32	956	676 946	448 443	553 574	620
33	953	926 969	048 970	572 779	610
34	951	092 379	598 666	747 590	915
35	948	173 178	337 383	555 346	758
36	945	169 369	512 131	982 097	101
37	942	080 941	377 082	501 702	584
38	938	907 906	193 565	054 327	639
39	935	650 260	230 069	024 327	820
40	932	308 003	762 243	217 531	309
41	928	881 137	072 895	837 914	637
42	925	369 660	451 994	463 672	597
43	921	773 574	196 666	022 682	362
44	918	092 378	611 196	767 361	809
45	914	327 574	007 032	248 922	047
46	910	477 660	702 777	291 014	159
47	906	543 139	024 195	962 770	149
48	902	524 009	304 211	551 238	108
49	898	420 271	882 906	533 211	593
50	894	231 927	107 522	546 453	227
51	889	958 975	332 460	360 312	518
52	885	601 416	919 279	845 737	897
53	881	159 252	236 699	944 682	994
54	876	362 481	660 598	638 907	128
55	872	021 105	574 012	918 170	038
56	867	325 124	367 138	747 820	844
57	862	544 538	437 331	035 781	244
58	857	679 348	189 103	598 922	954
59	852	729 554	034 129	128 839	382
60'	0,999 847	695 156	391 239	157 011	559

		Cos X				
1"	0,999 999	999 988	247 784	730 474	076	
2		999 952	991 138	922 172	534	
3		999 894	230 062	575 924	061	
4		999 811	964 555	693 109	802	
5		999 706	194 618	275 663	362	
6		999 576	920 250	326 070	802	
7		999 424	141 451	847 370	644	
8		999 247	858 222	843 153	865	
9		999 048	070 563	317 563	902	
10		998 824	778 473	275 296	652	
11		998 577	981 952	721 600	467	
12		998 307	681 001	662 276	158	
13		998 013	875 620	103 676	996	
14		997 696	565 808	052 708	710	
15		997 355	751 565	516 829	484	
16		996 991	432 892	504 049	965	
17		996 603	609 789	022 933	255	
18		996 192	282 255	082 594	915	
19		995 757	450 290	692 702	964	
20		995 299	113 895	863 477	882	
21		994 817	273 070	605 692	602	
22		994 311	927 814	930 672	520	
23		993 783	078 128	850 295	488	
24		993 230	724 012	376 991	817	
25		992 654	865 465	523 744	275	
26		992 055	502 488	304 088	090	
27		919 432	635 080	732 110	948	
28		990 786	263 242	822 452	992	
29		990 116	386 974	590 306	824	
30		989 423	006 276	051 417	504	
31		988 706	121 147	222 082	550	
32		987 965	731 588	119 151	941	
33		987 201	837 598	760 028	109	
34		986 414	439 179	162 665	950	
35		985 603	536 329	345 572	813	
36		984 769	129 049	327 808	509	
37		983 911	217 339	128 985	306	
38		983 029	801 198	769 267	930	
39		982 124	880 628	269 373	565	
40		981 196	455 627	650 571	854	
41		980 244	526 196	934 684	899	
42		979 269	092 336	144 087	257	
43		978 270	154 045	301 705	947	
44		977 247	711 324	431 020	445	
45		976 201	764 173	556 062	684	
46		975 132	312 592	701 417	056	
47		974 039	356 581	892 220	411	
48		972 922	896 141	154 162	060	
49		971 782	931 270	513 483	767	
50		970 619	461 969	996 979	759	
51		969 432	488 239	631 996	719	
52		968 222	010 079	446 433	788	
53		966 988	027 489	468 742	566	
54		965 730	540 469	727 927	112	
55		964 449	549 020	253 543	941	
56		963 145	053 141	075 702	028	
57		961 817	052 832	225 062	806	
58		960 465	548 093	732 840	166	
59		959 090	538 925	630 800	457	
60"	0,999 999	957 692	025 327	951 262	487	

		Cos X				
1"	0,999 999	999 988	247 784	730 474	076	
2		999 952	991 138	922 172	534	
3		999 894	230 062	575 924	061	
4		999 811	964 555	693 109	802	
5		999 706	194 618	275 663	362	
6		999 576	920 250	326 070	802	
7		999 424	141 451	847 370	644	
8		999 247	858 222	843 153	865	
9		999 048	070 563	317 563	902	
10		998 824	778 473	275 296	652	
11		998 577	981 952	721 600	467	
12		998 307	681 001	662 276	158	
13		998 013	875 620	103 676	996	
14		997 696	565 808	052 708	710	
15		997 355	751 565	516 829	484	
16		996 991	432 892	504 049	965	
17		996 603	609 789	022 933	255	
18		996 192	282 255	082 594	915	
19		995 757	450 290	692 702	964	
20		995 299	113 895	863 477	882	
21		994 817	273 070	605 692	602	
22		994 311	927 814	930 672	520	
23		993 783	078 128	850 295	488	
24		993 230	724 012	376 991	817	
25		992 654	865 465	523 744	275	
26		992 055	502 488	304 088	090	
27		919 432	635 080	732 110	948	
28		990 786	263 242	822 452	992	
29		990 116	386 974	590 306	824	
30		989 423	006 276	051 417	504	
31		988 706	121 147	222 082	550	
32		987 965	731 588	119 151	941	
33		987 201	837 598	760 028	109	
34		986 414	439 179	162 665	950	
35		985 603	536 329	345 572	813	
36		984 769	129 049	327 808	509	
37		983 911	217 339	128 985	306	
38		983 029	801 198	769 267	930	
39		982 124	880 628	269 373	565	
40		981 196	455 627	650 571	854	
41		980 244	526 196	934 684	899	
42		979 269	092 336	144 087	257	
43		978 270	154 045	301 705	947	
44		977 247	711 324	431 020	445	
45		976 201	764 173	556 062	684	
46		975 132	312 592	701 417	056	
47		974 039	356 581	892 220	411	
48		972 922	896 141	154 162	060	
49		971 782	931 270	513 483	767	
50		970 619	461 969	996 979	759	
51		969 432	488 239	631 996	719	
52		968 222	010 079	446 433	788	
53		966 988	027 489	468 742	566	
54		965 730	540 469	727 927	112	
55		964 449	549 020	253 543	941	
56		963 145	053 141	075 702	028	
57		961 817	052 832	225 062	806	
58		960 465	548 093	732 840	166	
59		959 090	538 925	630 800	457	
60"	0,999 999	957 692	025 327	951 262	487	

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

$\pi = 3,141\ 592$	653 589	793 238	462 643	383 279	502 884	197 169
399 375	105 820	974 944	592 307	816 406	286 208	998 628
$\sqrt{2} = 1,414\ 213$	562 373	095 048	801 688	724 209	698 087	569 671
875 376	948 073	176 679	738			
$\sqrt{3} = 1,732\ 050$	807 568	877 293	527 446	341 505	872 366	942 805
253 810	380 628	055 806	979 452			
$\frac{1}{\rho^{\circ}} = 0,017\ 453$	292 519	943 295	769 236	907 684	886 127	134 428
718 885	417 254	560 971	914 402			
$\frac{1}{\rho'} = 0,000\ 290$	888 208	665 721	596 153	948 461	414 768	785 573
811 981	423 620	909 349	531 906	694		
$\frac{1}{\rho''} = 0,000\ 004$	848 136	811 095	359 935	899 141	023 579	479 759
563 533	023 727	015 155	825 531	778		
$\sin 1^{\circ} = 0,017\ 452$	406 437	283 512	819 418	978 516	316 192	472 252
720 307	139 642	68				
$\cos 1^{\circ} = 0,999\ 847$	695 156	391 239	157 011	558 813	914 851	692 740
310 583	185 939	66				
$\sin 1' = 0,000\ 290$	888 204	563 424	596 374	297 415	740 000	929 832
946 872	185					
$\cos 1' = 0,999\ 999$	957 692	025 327	951 262	487 173	335 823	531 849
468 518	206					
$\sin 1'' = 0,000\ 004$	848 136	811 076	367 820	079 090	940 916	766 269
913 530	127					
$\cos 1'' = 0,999\ 999$	999 988	247 784	730 474	076 217	925 179	115 270
314 920	592					
$\frac{1}{\rho^g} = 0,015\ 707$	963 267	948 966	192 313	216 916	397 514	420 985
846 996	875 529	104 874	722 961			
$\frac{1}{\rho^c} = 0,000\ 157$	079 632	679 489	661 923	132 169	163 975	
$\frac{1}{\rho^{cc}} = 0,000\ 001$	570 796	326 794	896 619	231 321	691 640	

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

n	$(1:\rho^0)^n$					
1	0,017 453	292 519	943 295	769 236	907 684	886
2	0,304 617	419 786	708 599	346 743	549 378	$89 \cdot 10^{-3}$
3	5,316 576	934 207	788 095	932 152	789 28	10^{-6}
4	0,092 791	772 437	511 847	695 130	632 42	10^{-6}
5	1,619 521	947 795	906 012	711 589	686	10^{-9}
6	0,028 265	990 297	350 283	152 028	501	10^{-9}
7	0,498 334	597 025	533 471	520 612	788	10^{-12}
8	8,610 313	032 094	983 428	667 191	18	10^{-15}
9	0,150 278	312 037	433 653	027 966	67	10^{-15}
10	2,622 851	339 392	645 320	304 827	34	10^{-18}
11	0,045 777	391 662	744 911	144 283	04	10^{-18}
12	0,798 966	207 489	900 348	562 003	1	10^{-21}
13	0,013 944	590 932	870 940	964 901	2	10^{-21}
14	0,243 379	024 622	345 498	765 92	10^{-24}	
15	4,247 765	309 952	277 898	092	10^{-27}	
16	0,074 137	490 510	664 707	131	10^{-27}	
17	1,293 943	308 577	151 404	10^{-30}		
18	0,022 583	571 068	820 276	10^{-30}		
19	0,394 157	672 009	048 78	10^{-33}		
20	6,879 349	148 553	794	10^{-36}		
21	0,120 067	293 036	532	10^{-36}		
22	2,095 569	587 444	35	10^{-39}		

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

n	$(1:\rho')^n$					
1	0,290 888	208 665	721 596	153 948	461 414	$769 \cdot 10^{-3}$
2	0,084 615	949 940	752 388	707 428	763 716	$36 \cdot 10^{-6}$
3	0,024 613	782 102	813 833	777 463	670 321	10^{-9}
4	7,159 858	984 375	914 174	006 993	242	10^{-15}
5	2,082 718	554 264	282 423	754 616	366	10^{-18}
6	0,605 838	269 404	798 592	936 139	004	10^{-21}
7	0,176 231	208 928	302 709	019 423	292	10^{-24}
8	0,051 263	580 676	148 497	208 095	1	10^{-27}
9	0,014 911	971 152	675 537	447 048	10^{-30}	
10	4,337 716	576 276	702 730	969 505	10^{-36}	

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

n	$(1:p'')^n$					
1	4,848 136	811 095	359 935	899 141	023 579	48.10^{-6}
2	2,350 443	053 909	788 575	206 354	547 677	10^{-11}
3	1,139 526	949 204	344 156	364 058	811 15	10^{-16}
4	0,552 458	254 967	277 328	241 280	343	10^{-21}
5	2,678 393	202 500	363 199	272 911	99	10^{-27}
6	1,298 521	667 962	959 947	136 786	10^{-32}	
7	6,295 410	698 456	172 447	253 1	10^{-38}	
8	3,052 101	234 814	892 047	235 5	10^{-43}	

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

n	$n!$					
1						1
2						2
3						6
4						24
5						120
6						720
7						5 040
8						40 320
9						362 800
10					3	628 800
11					39	916 800
12					479	001 600
13					6 227	020 800
14					87 178	291 200
15				1	307 674	368 000
16				20	922 789	888 000
17				355	687 428	096 000
18				6 402	373 705	728 000
19				121 645	100 408	832 000
20			2	432 902	008 176	640 000
21			51	090 942	171 709	440 000
22			1 124	000 727	777 607	680 000
23			25 852	016 738	884 976	640 000
24			620 448	401 733	239 439	360 000
25		15	511 210	043 330	985 984	000 000
26		403	291 461	126 605	635 584	000 000
27		10 888	869 450	418 352	160 768	000 000
28		304 888	344 611	713 860	501 504	000 000
29	8	841 761	993 739	701 954	543 616	000 000
30	265	252 859	812 191	058 636	308 480	000 000

n	$1:n!$								
1	1,0								
2	0,5								
3	0,166 666	. . .							
4	0,041 666	. . .							
5	0,008 333	. . .							
6	0,001 388	888 . . .							
7	0,000 1(98	412 6) . . .							
8	0,000 024	8(01 587 3)	. . .	. . .					
9	0,000 002	7(55 731	922 398	589 065	2)	. . .	. . .	. . .	
10	0,000 000	27(557 3	192 239	858 906	52)	. .	. . .	. . .	
11	0,000 000	02(505 2	108 385	441 718	77)	. .	. . .	. . .	
12	2,087 675	698 786	809 897	921 009	032 120	143 231	254 342	10^{-9}	
13	0,160 590	438 368	216 145	993 923	771 701	549 479	327 257	10^{-9}	
14	1,470 745	597 729	724 713	851 697	978 682	105 666	232 648	10^{-12}	
15	0,764 716	373 181	981 647	590 113	198 578	807 044	415 510	10^{-12}	
16	0,047 794	773 323	873 852	974 382	074 911	175 440	275 969	10^{-12}	
17	2,811 457	254 345	520 763	198 945	583 010	320 016	233 493	10^{-15}	
18	0,156 192	069 685	862 264	622 163	643 500	573 334	235 194	10^{-15}	
19	8,220 635	246 624	329 716	955 981	236 872	280 749	220 739	10^{-18}	
20	0,411 031	762 331	216 485	847 799	061 843	614 037	461 037	10^{-18}	
21	0,019 572	941 063	391 261	230 847	574 373	505 430	355 287	10^{-18}	
22	0,889 679	139 245	057 328	674 889	744 250	246 834	331 249	10^{-21}	
23	0,038 681	701 706	306 840	377 169	119 315	228 123	231 798	10^{-21}	
24	1,611 737	571 096	118 349	048 713	304 801	171 801	324 726	10^{-24}	
25	0,064 469	502 843	844 733	961 948	532 192	046 872	052 989	10^{-24}	
26	2,479 596	263 224	797 460	074 943	545 847	956 616	828 656	10^{-27}	
27	0,091 836	898 637	955 461	484 257	168 364	739 133	978 617	10^{-27}	
28	3,279 889	237 069	837 910	152 041	727 312	111 927	807 745	10^{-30}	
29	0,113 099	628 864	477 169	315 587	645 769	383 169	924 405	10^{-30}	
30	3,769 987	628 815	905 643	852 921	525 646	105 664	146 834	10^{-33}	