ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 249 1973

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГАУССА В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В статье изучены случаи представления функции Гаусса

$$F(a,\ b;\ c;\ z)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(a)_\kappa\,(b)_\kappa}{\kappa!\,(c)_\kappa}z^\kappa,\ |z|<1,$$

$$c\neq 0,\ -1,\dots;\ (a)_\kappa=a\,(a+1)\dots(a+\kappa-1) \qquad (1)$$

элементарными функциями.

Теорема. Гипергеометрический ряд (1) представляет собой элементарные функции в следующих случаях:

1. Для комплексных параметров a, b, c таких, что

1) a, b, $c—a$ или $c—b=0, -1, \dots$;

2) $a, c=1, 2, \dots$

функция (1) является элементарной.

2. Если комплексные параметры a, b, c таковы, что два из трех чисел $\frac{1}{2}-c$, $a-b-\frac{1}{2}$, $a+b-c-\frac{1}{2}=0, \pm 1, \dots$, то ряд (1) представляет собой элементарные функции.

3. Если параметр $a=1, 2, \dots$ и остальные b, c принимают рациональные значения такие, что $c—b$ или $b=1, 2, \dots$, то и в этом случае функция (1) будет элементарной.

Доказательство. 1. 1) На основании равенств

$$F(-n,\ b;\ c;\ z)=\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{(-n)_\kappa\,(b)_\kappa}{\kappa!\,(c)_\kappa}z^\kappa, \qquad (2)$$

$$F(a, b; c; z)=(1-z)^{-a}F\left(a, c-b, c;\ \frac{z}{z-1}\right) \qquad (3)$$

теорема справедлива, если a, b, $c-a$ или $c-b=0, -1, \dots$

2) Для $a=m$, $c=1, \dots, m$ на основании равенства (3) мы получаем элементарные функции. Если $a=m$; $c=m+1,\ m+2, \dots$ то в силу следующих равенств

$$\begin{cases} F(m,\ b;\ c;\ z) = \sum\limits_{\kappa=1}^{m-1} (-1)^{\kappa} C_{m-1}^{\kappa-1} \dfrac{(b+1-\kappa)_{m-1}}{(1)_{m-1}} \times \\ \times \left[\sum\limits_{j=0}^{m-\kappa-1} \dfrac{(c-b-m+\kappa)_j \sqrt{m}}{(1-b-m-\kappa)_{j+1}} \dfrac{c-1}{(1-z)^{j+1}} \right] + \dfrac{(1-b)_{m-1}}{(1)_{m-1}} \times \\ \times F\left(1-m,\ b-c+1;\ 1+b-m;\ \left(\dfrac{1}{1-z}\right)\right) \cdot F(1,\ b;\ c;\ z), \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} F(1,\ b;\ c;\ z) = (-1)^{c-1} \dfrac{(c-1)!}{(1-b)_{c-1}} \left(\dfrac{1-z}{z}\right)^{c-1} \times \\ \times \left[\dfrac{1}{(1-z)^b} - \dfrac{1}{1-z} \sum\limits_{\kappa=0}^{c-2} (-1)^{\kappa} \dfrac{(1-b)_{\kappa}}{\kappa!} \left(\dfrac{z}{1-z}\right)^{\kappa} \right] \end{cases} \tag{5}$$

функция Гаусса представляется элементарными функциями.

2. Пусть, в частности, $\frac{1}{2} - c = a - b - \frac{1}{2} = 0$, тогда $c = \frac{1}{2}$,

$$a = b + \frac{1}{2}$$

и ряд (1) на основании ([1], стр. 110 (5)) следующий:

$$F\left(b,\ b+\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ z\right) = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{z}\right)^{-2b} + \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{z}\right)^{-2b}. \tag{6}$$

Если $a - b - \frac{1}{2} = a + b - c - \frac{1}{2} = 0$, то $a = b + \frac{1}{2}$, $c = 2b$

и ряд (1) следующий ([1], стр. 110 (6)):

$$F\left(b,\ b+\frac{1}{2};\ 2b;\ z\right) = \frac{1}{\sqrt{1-z}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-z}\right)^{1-2b}. \tag{7}$$

В общем случае, если

$$\frac{1}{2} - c = \pm\kappa,\ a - b - \frac{1}{2} = \pm m,$$

значения параметров c, a в зависимости от случая можно повысить или понизить на целое число согласно рекуррентных формул ([1], стр. 110 (20) — (27)). Таким образом, функция (1) преобразуется к сумме многочлена и произведения многочлена на функцию (6). Аналогично упомянутые выше формулы применяются и для случая

$$a - b + \frac{1}{2} = \pm\kappa,\ a + b - c - \frac{1}{2} = \pm m\,(m,\ \kappa = 1, 2, \ldots).$$

Функция (1) преобразуется к сумме многочлена и произведению многочлена на функцию (7). В последнем случае, когда

$$\frac{1}{2} - c = \pm\kappa,$$

$$a + b - c - \frac{1}{2} = \pm\,(m,\ \kappa = 1, 2, \ldots).$$

Здесь применяется также формула (3) и функция (1) приводится к сумме многочлена и произведению многочлена, степенной функции и функции (6).

3. Более общим случаем равенства (4) является равенство [2]

$$F(1+m,\, b;\, c;\, z) = \sum_{\kappa=1}^{m} (-1)^{\kappa} C_m^{\kappa-1} \frac{(b+1-\kappa)_m}{m!} \times$$

$$\times \left[\sum_{j=0}^{m-\kappa} \frac{(c-b-m-1+\kappa)_j\, c-1}{(-b-m+\kappa)_{j+1} (1-z)^{j+1}} \right] + \frac{(1-b)_m (c-1)}{(1-z)^{b+1-c}} \times$$

$$\times \frac{z^{1-c}}{m!} F\left(-m,\, b-c+1;\, b-m;\, \frac{1}{1-z}\right) \int\limits_0^t \frac{t^{c-2}\, dt}{(1-t)^{c-b}}, \quad c > 1. \qquad (8)$$

Если $c-b$ или $b=1, 2, \ldots$, то при рациональных c и b интеграл в правой части равенства (8) представляется элементарными функциями [2]. Теорема доказана.

Доказательство равенства (8) аналогично тому, которое изложено в статье ([3], стр. 17 (14)).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бейтмен и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. М., Физматгиз, 1965.
2. В. Е. Корнилов. Выделение алгебраической части интегралов от биномных дифференциалов. Изв. ТПИ. Т. 131, 1965.
3. В. Е. Корнилов. Преобразование в цепные дроби некоторых степенных рядов. Изв. ТПИ. Т. 154, 1967.