ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГАУССА В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В статье изучены случаи представления функции Гаусса

$$F(a, b; c; z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(a)_{\kappa} (b)_{\kappa}}{\kappa! (c)_{\kappa}} z^{\kappa}, \quad |z| < 1,$$

$$c \neq 0, -1, \dots; (a)_{\kappa} = a(a+1) \dots (a+\kappa-1) \quad (1)$$

элементарными функциями.

Теорема. Гипергеометрический ряд (1) представляет собой элементарные функции в следующих случаях:

1. Для комплексных параметров a, b, c таких, что

1) $a, b, c-a$ или $c-b = 0, -1, \dots;$

2) $a, c = 1, 2, \dots$

функция (1) является элементарной.

2. Если комплексные параметры a, b, c таковы, что два из трех чисел $\frac{1}{2} - c, a - b - \frac{1}{2}, a + b - c - \frac{1}{2} = 0, \pm 1, \dots$, то ряд (1) представляет собой элементарные функции.

3. Если параметр $a = 1, 2, \dots$ и остальные b, c принимают рациональные значения такие, что $c-b$ или $b = 1, 2, \dots$, то и в этом случае функция (1) будет элементарной.

Доказательство. 1. 1) На основании равенств

$$F(-n, b; c; z) = \sum_{\kappa=0}^n \frac{(-n)_{\kappa} (b)_{\kappa}}{\kappa! (c)_{\kappa}} z^{\kappa}, \quad (2)$$

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-a} F(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}) \quad (3)$$

теорема справедлива, если $a, b, c-a$ или $c-b = 0, -1, \dots$

2) Для $a = m, c = 1, \dots, m$ на основании равенства (3) мы получаем элементарные функции. Если $a = m; c = m+1, m+2, \dots$ то в силу следующих равенств

$$\left\{ \begin{aligned}
 F(m, b; c; z) &= \sum_{\kappa=1}^{m-1} (-1)^\kappa C_{m-1}^{\kappa-1} \frac{(b+1-\kappa)_{m-1}}{(1)_{m-1}} \times \\
 &\times \left[\sum_{j=0}^{m-\kappa-1} \frac{(c-b-m+\kappa)_j \sqrt{m}}{(1-b-m-\kappa)_{j+1}} \frac{c-1}{(1-z)^{j+1}} \right] + \frac{(1-b)_{m-1}}{(1)_{m-1}} \times \\
 &\times F(1-m, b-c+1; 1+b-m; \left(\frac{1}{1-z}\right)) \cdot F(1, b; c; z),
 \end{aligned} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 F(1, b; c; z) &= (-1)^{c-1} \frac{(c-1)!}{(1-b)_{c-1}} \left(\frac{1-z}{z}\right)^{c-1} \times \\
 &\times \left[\frac{1}{(1-z)^b} - \frac{1}{1-z} \sum_{\kappa=0}^{c-2} (-1)^\kappa \frac{(1-b)_\kappa}{\kappa!} \left(\frac{z}{1-z}\right)^\kappa \right]
 \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Функция Гаусса представляется элементарными функциями.

2. Пусть, в частности, $\frac{1}{2} - c = a - b - \frac{1}{2} = 0$, тогда $c = \frac{1}{2}$,

$$a = b + \frac{1}{2}$$

и ряд (1) на основании ([1], стр. 110 (5)) следующий:

$$F\left(b, b + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; z\right) = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{z})^{-2b} + \frac{1}{2} (1 - \sqrt{z})^{-2b}. \quad (6)$$

Если $a - b - \frac{1}{2} = a + b - c - \frac{1}{2} = 0$, то $a = b + \frac{1}{2}$, $c = 2b$

и ряд (1) следующий ([1], стр. 110 (6)):

$$F\left(b, b + \frac{1}{2}; 2b; z\right) = \frac{1}{\sqrt{1-z}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1-z}\right)^{1-2b}. \quad (7)$$

В общем случае, если

$$\frac{1}{2} - c = \pm \kappa, \quad a - b - \frac{1}{2} = \pm m,$$

значения параметров c, a в зависимости от случая можно повысить или понизить на целое число согласно рекуррентных формул ([1], стр. 110 (20) – (27)). Таким образом, функция (1) преобразуется к сумме многочлена и произведения многочлена на функцию (6). Аналогично упомянутые выше формулы применяются и для случая

$$a - b + \frac{1}{2} = \pm \kappa, \quad a + b - c - \frac{1}{2} = \pm m \quad (m, \kappa = 1, 2, \dots).$$

Функция (1) преобразуется к сумме многочлена и произведению многочлена на функцию (7). В последнем случае, когда

$$\frac{1}{2} - c = \pm \kappa,$$

$$a + b - c - \frac{1}{2} = \pm m \quad (m, \kappa = 1, 2, \dots).$$

Здесь применяется также формула (3) и функция (1) приводится к сумме многочлена и произведению многочлена, степенной функции и функции (6).

3. Более общим случаем равенства (4) является равенство [2]

$$\begin{aligned}
 F(1+m, b; c; z) &= \sum_{\kappa=1}^m (-1)^\kappa C_m^{\kappa-1} \frac{(b+1-\kappa)_m}{m!} \times \\
 &\times \left[\sum_{j=0}^{m-\kappa} \frac{(c-b-m-1+\kappa)_j c-1}{(-b-m+\kappa)_{j+1} (1-z)^{j+1}} \right] + \frac{(1-b)_m (c-1)}{(1-z)^{b+1-c}} \times \\
 &\times \frac{z^{1-c}}{m!} F\left(-m, b-c+1; b-m; \frac{1}{1-z}\right) \int_0^1 \frac{t^{c-2} dt}{(1-t)^{c-b}}, \quad c > 1. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Если $c-b$ или $b=1, 2, \dots$, то при рациональных c и b интеграл в правой части равенства (8) представляется элементарными функциями [2]. Теорема доказана.

Доказательство равенства (8) аналогично тому, которое изложено в статье ([3], стр. 17 (14)).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бейтмен и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. М., Физматгиз, 1965.
2. В. Е. Корнилов. Выделение алгебраической части интегралов от биноминых дифференциалов. Изв. ТПИ. Т. 131, 1965.
3. В. Е. Корнилов. Преобразование в цепные дроби некоторых степенных рядов. Изв. ТПИ. Т. 154, 1967.