

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЧАСТНЫМИ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В этой статье используются известные тождественные преобразования частного двух гипергеометрических рядов для получения элементарных соотношений между этими рядами.

Для функций F , Φ , ${}_2F_0$ элементарные соотношения получены в частном случае ($b=0$) и для функции I в общем случае (здесь $F \equiv F(a, b; c; z)$ и т. д.). В статье применяется следующая запись произведения $(a)_\kappa = a(a+1)\dots(a+\kappa-1)$.

Соотношения получены для следующих рядов:

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{m! (c)_m} z^m, \quad |z| < 1; \quad \Phi(b; c; z) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(b)_m z^m}{m! (c)_m}; \quad {}_2F_0(a; b;; z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{m! z^{-m}}, \\ |z| &\ll 1; \quad I(c, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m! (c)_m}. \end{aligned}$$

1. Изучим следующую конечную цепную дробь (тождество) ([1]), стр. 98; [2], стр. 132):

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{F(a, b+1; c+1; z)}{F(a, b; c; z)} \equiv \frac{1}{1} - \frac{u_1 z}{1} - \frac{v_1 z}{1} - \dots - \\ &\frac{v_n z \frac{F(a+n, b+n+1; c+2n+1; z)}{F(a+n, b+n; c+2n; z)}}{1}, \\ &u_j = \frac{(a+j-1)(c-b+j-1)}{(c+2n-2)_2}, \\ &v_j = \frac{(b+j)(c-a+j)}{(c+2j-1)_2}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Представим правую часть тождества (1) подходящей дробью в частном случае ($b=0$), получим

$$\frac{F(a, 1; c+1; z)}{1} \equiv \frac{p_{2n} F_1 - v_n z p_{2n-1} F_2}{q_{2n} F_1 - v_n z q_{2n-1} F_2}$$

(явные значения p_m, q_m в п. 4). Из последнего тождества нетрудно получить следующие элементарные соотношения:

$$\begin{cases} F(a, 1; c+1; z) = p_{2n} F(a+n, n; c+2n; z) - \\ - p_{2n-1} v_n z F(a+n, n+1; c+2n-1; z); \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 1 = q_{2n} F(a+n, n; c+2n; z) - \\ - v_n z q_{2n-1} F(a+n, n+1; c+2n-1; z). \end{cases} \quad (3)$$

2. Три предельных случая тождества (1) следующие ([2], стр. 134—137):

$$\begin{cases} \frac{\Phi(b+1; c+1; z)}{\Phi(b; c; z)} \equiv \frac{1}{1} - \frac{a_1 z}{1} - \frac{b_1 z}{1} - \dots - \\ - \frac{b_n z \Phi(b+n+1; c+2n+1; z) [\Phi(b+n; c+2n; z)]^{-1}}{1}, \\ a_j = \frac{c-b+j-1}{(c+2j-2)_2}, \quad b_j = \frac{-b-j}{(c+2j-1)_2}, \quad j=1, \dots, n; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{{}_2F_0(a, b+1;; z)}{{}_2F_0(a, b;; z)} \equiv \frac{1}{1} - \frac{c_1 z}{1} - \frac{d_1 z}{1} - \dots - \\ - \frac{d_n z {}_2F_0(a+n, b+n+1;; z) [{}_2F_0(a+n, b+n;; z)]^{-1}}{1}, \\ c_j = a+j-1, \quad d_j = b+j, \quad j=1, \dots, n; \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} I(c+1, z) [I(c, z)]^{-1} \equiv \frac{1}{1} + \frac{e_1 z}{1} + \frac{g_1 z}{1} + \dots \\ \dots + \frac{g_n z I(c+2n+1, z) [I(c+2n, z)]^{-1}}{1}, \\ e_j^{-1} = (c+2j-2)_2, \quad g_j^{-1} = (c+2j-1)_2. \end{cases} \quad (6)$$

3. Аналогично п. 1 получим элементарные соотношения для частных значений функций из равенств (4), (5) ($b=0$) и функции I :

$$\begin{cases} \Phi(1; c+1; z) = A_{2n} \Phi(n; c+2n; z) + \\ + b_n z A_{2n-1} \Phi(n+1; c+2n+1; z); \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 1 = B_{2n} \Phi(n; c+2n; z) + \\ + b_n z B_{2n-1} \Phi(n+1; c+2n+1; z); \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} {}_2F_0(a, 1;; z) = C_{2n} {}_2F_0(a+n, n;; z) - \\ - d_n z C_{2n-1} {}_2F_0(a+n, n+1;; z); \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} 1 = D_{2n} {}_2F_0(a+n, n;; z) - \\ - d_n z D_{2n-1} {}_2F_0(a+n, n+1;; z); \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} I(c+1, z) = E_{2n} I(c+2n, z) + \\ + g_n z E_{2n-1} I(c+2n+1, z); \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} I(c, z) = G_{2n} I(c+2n, z) + \\ + g_n z G_{2n-1} I(c+2n+1, z). \end{cases} \quad (12)$$

4. Значения многочленов в равенствах (2), (3), (7)–(12) следующие ([3], стр. 21, 23; [4]):

$$\left\{ \begin{aligned} q_{2n-1} &= \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_{n-1}^{\kappa} \frac{(1-a-n)_{\kappa}}{(2-c-2n)_{\kappa}} (-z)^{\kappa}; \\ q_{2n} &= \sum_{\kappa=0}^n C_n^{\kappa} \frac{(1-a-n)_{\kappa}}{(1-c-2n)_{\kappa}} (-z)^{\kappa}; \\ p_{2n-1} &= \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_{n-1}^{\kappa} \frac{(1-a-n)_{\kappa}}{(2-c-2n)_{\kappa}} (-z)^{\kappa} \sum_{m=0}^{n-\kappa-1} \frac{(a+1)_m}{(c+2)_m} z^m; \\ p_{2n} &= \sum_{\kappa=0}^n C_n^{\kappa} \frac{(1-a-n)_{\kappa}}{(1-c-2n)_{\kappa}} (-z)^{\kappa} \sum_{m=0}^{n-\kappa-1} \frac{(a)_m}{(c+1)_m} z^m. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{aligned} A_m &= \lim_{a \rightarrow \infty} p_m \left(\frac{z}{a} \right); \quad B_m = \lim_{a \rightarrow \infty} q_m \left(\frac{z}{a} \right); \\ C_m &= \lim_{c \rightarrow \infty} p_m(cz); \quad D_m = \lim_{c \rightarrow \infty} q_m(cz). \end{aligned} \right. \quad (14)$$

$$\left\{ \begin{aligned} E_{2n-1} &= \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{C_{2n-\kappa-2}^{\kappa} z^{\kappa}}{(c+1)_{\kappa} (c+2n-1-\kappa)_{\kappa}}; \\ E_{2n} &= \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_{2n-\kappa-1}^{\kappa} [(c+1)_{\kappa} (c+2n-\kappa)_{\kappa}]^{-1} z^{\kappa}; \\ G_{2n-1} &= \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_{2n-\kappa-1}^{\kappa} [(c)_{\kappa} (c+2n-1-\kappa)_{\kappa}]^{-1} z^{\kappa}; \\ G_{2n} &= \sum_{\kappa=0}^n C_{2n-\kappa}^{\kappa} [(c)_{\kappa} (c+2n-\kappa)_{\kappa}]^{-1} z^{\kappa}; \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \right. \quad (15)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бейтмен и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. М., Физматгиз, 1965.
2. А. Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., Гостехиздат, 1956.
3. В. Е. Корнилов. Приложение цепных дробей к вычислению интегралов от биномных дифференциалов. Изв. ТПИ. Т. 131, 1965.
4. В. Е. Корнилов. Применение произведения биномов для вычисления функций Бесселя. Изв. ТПИ. Т. 205, 1970.