ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 249 1973

# О НЕГОЛОНОМНЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ ГАМБЬЕ

М. Р. ВАЙНТРУБ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В работе изучаются неголономные конгруэнции окружностей комплекса, у которых циклические точки являются двукратными фокусами. Устанавливается связь таких конгруэнций с неголономными линейчатыми конгруэнциями, ассоциированными с комплексом осей.

1. В трехмерном евклидовом пространстве $E_3$ рассматриваются комплексы окружностей, плоскости которых образуют трехпараметрическое семейство (комплексы {3.3}). С каждой окружностью комплекса {3.3} ассоциируется локальный ортонормированный репер $(\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, начало $A$ которого совмещено с центром текущей окружности комплекса, а векторы $e_1$ и $e_2$ располагаются в плоскости этой окружности. Инфинитезимальное перемещение репера определяется уравнениями

$$d\bar{A} = \omega^\alpha \bar{e}_\alpha, \quad d\bar{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar{e}_\beta, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где формы Пфаффа $\omega^\alpha$, $\omega_\alpha^\beta$ удовлетворяют условиям кососимметричности и структурным уравнениям Картана ([1], стр. 137—138). Относительно таким образом выбранного репера уравнения текущей окружности комплекса {3.3} записываются в виде

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - R^2 = 0, \quad x^3 = 0. \tag{2}$$

Шесть форм Пфаффа $\omega^i \equiv \omega_i$, $\omega_3^i$, $\omega^3$, $\Theta_0 \equiv -RdR$, $(i, j = 1, 2)$ являются первичными формами окружности в $E_3$. Выберем в качестве базисных формы $\omega_3^i$, $\omega^3$, которые определяют положение плоскости окружности в пространстве. Тогда замкнутая система дифференциальных уравнений комплекса {3.3} запишется в виде:

$$\begin{aligned}
&\Theta_0 = \Gamma_{0i}\omega_3^i + \Gamma_{03}\omega^3,\\
&\omega_i = \Gamma_{ij}\omega_3^j + \Gamma_{i3}\omega^3,\\
&[\Delta\Gamma_{0i}\omega_3^i] + [\Delta\Gamma_{03}\omega^3] = 0,\\
&[\Delta\Gamma_{ij}\omega_3^j] + [\Delta\Gamma_{i3}\omega^3] = 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}
&\Delta\Gamma_{0i} = d\Gamma_{0i} - \Gamma_{0\kappa}\omega_i^\kappa - \Gamma_{03}\omega_i,\\
&\Delta\Gamma_{03} = d\Gamma_{03},\\
&\Delta\Gamma_{ii} = d\Gamma_{ii} - (\Gamma_{i\kappa} + \Gamma_{\kappa i})\omega_i^\kappa - \Gamma_{i3}\omega_i,\\
&\Delta\Gamma_{i\kappa} = d\Gamma_{i\kappa} + (\Gamma_{ii} - \Gamma_{\kappa\kappa})\omega_i^\kappa - \Gamma_{i3}\omega_\kappa,\\
&\Delta\Gamma_{i3} = d\Gamma_{i3} - \Gamma_{\kappa 3}\omega_i^\kappa - \omega_i^3,
\end{aligned} \tag{4}$$

$(\kappa \neq i = 1, 2$; по $\kappa$ не суммировать!)

Осуществляя построение цепи интегральных элементов по формам базиса $\omega_3^1$, $\omega_3^2$, $\omega^3$, убеждаемся, что комплексы {3.3} существуют и определяются с произволом 3 функций 3 аргументов.

2. Определение 1. Основным диаметром окружности комплекса {3.3} называется такой диаметр, которому соответствует однопараметрическое семейство окружностей с касательной к линии центров, ортогональной этому диаметру.

Уравнения вида

$$\Gamma_{12}(x^1)^2+(\Gamma_{22}-\Gamma_{11})x^1x^2-\Gamma_{21}(x^2)^2=0,\ x^3=0 \tag{5}$$

определяют два действительных, два мнимых или один основной диаметр.

Определение 2. Точки пересечения окружности с ее основными диаметрами называются основными точками окружности комплекса. Используя основные диаметры и основные точки окружности, можно произвести окончательную кононизацию репера комплекса {3.3}, направив вектор $\bar{e}_1$ репера либо в основную точку, либо по биссектрисе угла между основными направлениями.

Одно не вполне интегрируемое уравнение Пфаффа

$$\omega^3=0$$

можно рассматривать как уравнение неголономной поверхности, ортогональной оси окружности и описываемой ее центром. Разыскивая линии кривизны второго рода на неголономной поверхности центров $(A)_{\omega^3=0}$, убеждаемся, что им соответствуют подмногообразия, ассоциированные с основными диаметрами окружности комплекса. Это позволяет дополнить геометрическую картину канонизации репера. В дальнейшем будем предполагать, что с каждой окружностью комплекса {3.3} ассоциирован некоторый канонический репер.

3. Произвольная неголономная конгруэнция окружностей комплекса {3.3} определяется одним не вполне интегрируемым уравнением Пфаффа [2].

$$\omega\equiv a\omega_3^1+b\omega_3^2-c\omega^3=0, \tag{6}$$

где

$a$, $b$, $c$ — инварианты неголономной конгруэнции (6), являющиеся функциями первичных параметров.

Разыскивая фокусы неголономной конгруэнции $(\bar{A}\bar{e}_3)_{\omega=0}$ соответствующей конгруэнции (6), убеждаемся, что конгруэнциям $c=0$ соответствуют неголономные цилиндрические конгруэнции в комплексе осей. Исключая из рассмотрения такие конгруэнции, будем считать $c=1$.

Фокусы и фокальные семейства конгруэнции $\omega=0$ определяются системой уравнений:

$$\begin{gathered}(x^1)^2+(x^2)^2-R^2=0,\quad x^3=0,\\ (x^i\Gamma_{i1}-\Gamma_{01})\,\omega_3^1+(x^i\Gamma_{i2}-\Gamma_{02})\,\omega_3^2+(x^i\Gamma_{i3}-\Gamma_{03})\,\omega^3=0,\\ x^1\omega_3^1+x^2\omega_3^2-\omega^3=0,\\ a\omega_3^1+b\omega_3^2-\omega^3=0.\end{gathered} \tag{7}$$

В дальнейшем будем считать, что

$$\begin{aligned}&A=b\Gamma_{13}+\Gamma_{12},\quad B=a\Gamma_{23}+\Gamma_{21},\\ &C=b\Gamma_{23}-a\Gamma_{13}+\Gamma_{22}-\Gamma_{11},\\ &D=b(\Gamma_{11}-\Gamma_{03})-a\Gamma_{12}-\Gamma_{02},\\ &E=b\Gamma_{21}-a(\Gamma_{22}-\Gamma_{03})+\Gamma_{01},\\ &F=a\Gamma_{02}-b\Gamma_{01}.\end{aligned} \tag{8}$$

Исключая из уравнений (7) отношение $\omega_3^1 : \omega_3^2 : \omega^3$ базисных форм, получаем систему уравнений

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - R^2 = 0, \quad x^3 = 0,$$
$$A(x^1)^2 - B(x^2)^2 + Cx^1x^2 + Dx^1 + Ex^2 + F = 0, \tag{9}$$

которая определяет координаты фокусов конгруэнции. Эта система эквивалентна уравнениям

$$\begin{gathered}(x^1)^2 + (x^2)^2 - R^2 = 0, \quad x^3 = 0,\\ [C^2 + (A+B)^2](x^2)^4 + [2CD - 2E(A+B)](x^2)^3 + \\ + [D^2 - C^2R^2 + E^2 - 2(A+B)(F + AR^2)](x^2)^2 + \\ + [2E(F + AR^2) - 2CDR^2]x^2 + (F + AR^2)^2 - R^2D^2 = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

4. Определение 3. Конгруэнциями Гамбье [3, 4] неголономными или голономными называются такие конгруэнции окружностей, у которых циклические точки являются двукратными фокусами. Из (8) и (10) следует, что такие конгруэнции характеризуются условиями

$$A + B = 0, \; C = 0 \tag{11}$$

и существуют в произвольном комплексе.

Теорема 1. Неголономная конгруэнция комплекса {3.3} тогда и только тогда является конгруэнцией Гамбье, когда граничные точки соответствующей неголономной конгруэнции осей совпадают.

Доказательство. Рассуждая обычным образом ([5], стр. 52), для нахождения абсцисс граничных точек неголономной конгруэнции $(\overline{A}e_3)_{\omega=0}$ получаем квадратное уравнение, дискриминант которого определяется по формуле

$$\overline{D} = C^2 + (A+B)^2. \tag{12}$$

Справедливость утверждения теоремы следует из сравнения условий (11) с условиями обращения в нуль дискриминанта (12).

Теорема 2. Неголономной конгруэнции Гамбье, принадлежащей комплексу {3.3}, соответствует бицентральная [6] неголономная конгруэнция в комплексе осей.

Доказательство. Бицентральная неголономная конгруэнция в комплексе осей определяется условием

$$\begin{gathered}2\Gamma_{13}\Gamma_{23}(\Gamma_{12} + \Gamma_{21}) + (\Gamma_{11} - \Gamma_{22})[(\Gamma_{13})^2 - (\Gamma_{23})^2] + \\ + (a\Gamma_{13} + b\Gamma_{23})[(\Gamma_{13})^2 + (\Gamma_{23})^2] = 0.\end{gathered} \tag{13}$$

Используя (8), из (11) получаем:

$$a = \frac{\Gamma_{13}(\Gamma_{22} - \Gamma_{11}) - \Gamma_{23}(\Gamma_{12} + \Gamma_{21})}{(\Gamma_{13})^2 + (\Gamma_{23})^2},$$
$$b = -\frac{\Gamma_{13}(\Gamma_{12} + \Gamma_{21}) + \Gamma_{23}(\Gamma_{22} - \Gamma_{11})}{(\Gamma_{13})^2 + (\Gamma_{23})^2}. \tag{14}$$

Подставляя значения $a$ и $b$ из (14) в условие (13), убеждаемся в справедливости утвреждения теоремы.

## ЛИТЕРАТУРА


1. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. М.—Л., 1948.
2. Р. Н. Щербаков. О методе подвижного репера и репеража подмногообразий. Труды Томского университета. Т. 191, сер. механико-математическая, 1967, стр. 179—184.
3. Gambier, M. B., C. R., t. 195, 1932, p. 928.
4. Vincensini, P., Points focaux des cercles d'une congruence, C. R., t. 195, 1932, pp. 1359—1361.
5. Н. И. Кованцов. Теория комплексов. Киев, 1963.
6. Р. Н. Щербаков. Эквиафинно-инвариантные неголономные конгруэнции линейчатого комплекса. Математический сборник. Т. 60 (102), № 2, 1963, стр. 131—158.