ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 249 1973

ЭЛЕМЕНТЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЭНГЕЛЕВЫХ КОЛЬЦАХ ЛИ

А. Б. ЯДРЫШНИКОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

Целью данной работы является упрощение одного пункта в доказательстве нильпотентности энгелевых колец Ли. Мы приведем здесь результаты, относящиеся к элементам второго порядка. Будем говорить, что элемент $a \in L$, где L — кольцо Ли, удовлетворяющее n-му условию Энгеля

$$[uv^{n}] = 0$$

для всех u, $v \in L$ с характеристикой $p > n$ (p — простое число) или $p = 0$, будет иметь порядок k, если

$$a^{k-1} \neq 0, a^{k} = 0;$$

очевидно, для любого элемента второго порядка выполняются соотношения

$$c^2 = cuc = 0$$

для любого

$$u \in L.$$

А. И. Кострикиным [1] доказана следующая теорема:

В произвольном кольце Ли L с n-м условием Энгеля и характеристикой $p > n$ (или $p = 0$) существует элемент второго порядка.

Доказательство проводится методом спуска. Доказывается, что если $v^m = 0$ $(4 \leqslant m \leqslant n)$, то $[uv^{m-1}]^{m-1} = 0$. Таким образом, можно получить элементы всех порядков от n до 3 включительно. Для перехода от элемента третьего порядка к элементу второго порядка доказывается предварительно ряд тождеств, а затем нужный элемент находится путем многократного уменьшения показателя в одном из этих тождеств.

В предлагаемом нами доказательстве устанавливается, что сумма двух элементов второго порядка есть элемент третьего порядка. Действительно, если $a, b \in L$, $a^2 = b^2 = 0$, то

$$(a+в)^2 = ab + ba,$$
$$(a+b)^3 = (ab+ba)(a+b) = 0.$$

Далее,

$$(a-b)^3 = 0.$$

Тогда зная, что существуют элементы второго порядка, можно получать их из элементов третьего порядка. Кроме того, лиево произведение двух элементов второго порядка есть также элемент второго порядка.

Следовательно, исходя даже из пары элементов 2 порядка, можно получить достаточно много элементов 2 порядка. Но мы можем обойтись и без предположения о существовании хотя бы двух элементов второго порядка. Именно, пусть v — элемент третьего порядка. Рассмотрим элемент

$$w = [[uv]\,[uv^2]],$$

где

u — произвольный элемент кольца L. Выразим элемент w через сумму произведений степеней элементов u, v:

$$w = [[uv]\,[uv^2]] = [uv]\,[uv^2] - [uv^2]\,[uv] =$$

$$= -vu^2v^2 - 2uv^2uv + 4vuvuv - 2vuv^2u - v^2u^2v.$$

Рассмотрим теперь квадрат элемента w:

$$w^2 = (-vu^2v^2 - 2uv^2uv + 4vuvuv - 2vuv^2u - v^2u^2v)^2;$$

следующая таблица поясняет ход вычислений:

$$\begin{aligned} vu^2v^2 &\ -1,\\ uv^2uv &\ -2,\\ vuvuv &\ \ \ 4,\\ vuv^2u &\ -2,\\ v^2u^2v &\ -1\ - \end{aligned}$$

здесь записаны слагаемые в выражении для w в первой степени. Справа указаны их коэффициенты. Далее указаны всевозможные произведения каждого из этих элементов на каждый:

$$\begin{aligned}
uu^2v^2\cdot vu^2v^2 &\quad 1, &\\
vu^2v^2\cdot uv^2uv &\quad 2, &\\
vu^2v^2\cdot vuvuv &\ -4, &\\
vu^2v^2\cdot vuv^2u &\quad 2, &\\
vu^2v^2\cdot v^2u^2v &\quad 1, &\\
uv^2uv\cdot vu^2v^2 &\quad 2, &\\
uv^2uv\cdot uv^2uv &\quad 4, &\\
uv^2uv\cdot vuvuv &\ -8, &\\
uv^2uv\cdot vuv^2u &\quad 4, &\\
uv^2uv\cdot v^2u^2v &\quad 2, &\\
vuvuv\cdot vu^2v^2 &\ -4, & 1)\\
vuvuv\cdot uv^2uv &\ -8, & 2)\\
vuvuv\cdot vuvuv &\quad 16, & 3)\\
vuvuv\cdot vuv^2u &\ -8, &\\
vuvuv\cdot v^2u^2v &\ -4, &\\
vuv^2u\cdot vu^2v^2 &\quad 2, & 4)\\
vuv^2u\cdot uv^2uv &\quad 4, & 5)\\
vuv^2u\cdot vuvuv &\ -8, & 6)\\
vuv^2u\cdot vuv^2u &\quad 4, &
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{lll}
vuv^2u \cdot v^2u^2v & 2, & \\
v^2u^2v \cdot vu^2v^2 & 1, & 7) \\
v^2u^2v \cdot uv^2uv & 2, & 8) \\
v^2u^2v \cdot vuvuv & -4, & 9) \\
v^2u^2v \cdot vuv^2u & 2, & \\
v^2u^2v \,.\, v^2u^2v & 1. &
\end{array}
$$

Слагаемые, не отмеченные цифрой со скобкой, обращаются в нуль в силу одного из соотношений:

$$v^3 = 0,$$

$$v^2uv = vuv^2,$$

$$v^2uv^2 = 0,$$

справедливых для любого элемента третьего порядка v и произвольного элемента кольца L u. Сумма членов, отмеченных номерами 2), 3), 6), дает нуль, так как эти члены одно- или двукратным применением равенства делаются подобными. Сумма членов 1), 4), 5), 8), 9) также равна нулю, потому что, применив помимо тождества $v^2uv = vuv^2$ также тождество

$$v^2u^2v^2uv = vuv^2uv^2.$$

мы получаем, что они подобны. Остается единственный член 7):

$$v^2u^2v^2u^2v^2.$$

Но и он равен нулю в силу тождества

$$v^2(u^2v^2)^m = 0; \; m = 0, 1, \ldots, n.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Кострикин. О проблеме Бернсайда. Известия АН СССР, Т. 23, серия математическая, вып. 1, 1959, стр. 3—34.