ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 118 1963

ОБЩИЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ОСНОВНЫХ РАСЧЕТНЫХ ЗАДАЧ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМНОГО СФЕРОИДА

Б. Ф. КРУТОЙ

(Представлено научным семинаром кафедр маркшейдерского дела и геодезии)

1. Введем обозначения:

B_i, L_i — геодезические широта и долгота точки i земного сфероида;

$A_{iк}$ — геодезический азимут в точке i выравненной (геодезической) кривой $Г_{iк}$, проведенной на сфероиде через точку i и соседнюю точку $к$;

$s_{iк}$ — длина выравненной кривой $Г_{iк}$ между указанными точками i, $к$.

Тогда основными расчетными задачами на поверхности земного сфероида могут быть названы нижеследующие три задачи:

а) Прямая задача ($i = 1$, $к = 2$). Даны B_1, L_1, $A_{1.2}$, $s_{1.2}$; найти B_2, L_2, $A_{2.1}$.

б) Обратная задача ($i = 1, к = 2$). Даны B_1, L_1 и B_2, L_2; найти $A_{1.2}$, $A_{2.1}$, $s_{1.2}$.

в) Прямая засечка ($i = 1,2$; $к = 3$). Даны B_1, L_1, $A_{1.3}$ и B_2, L_2, $A_{2.3}$. Найти B_3, L_3, а также $A_{3.1}$, $s_{1.3}$ и $A_{3.2}$, $s_{2.3}$.

2. Для решения первых двух задач предложено более десятка частных способов [1, 2, 3], пригодных для расстояний $s_{1.2}$ не более 1000—3000 *км*, и один общий способ, принадлежащий Бесселю,—для любых расстояний $s_{1.2}$. Что касается способа А. М. Вировца [4], то на основании исследований Н. А. Урмаева [5] и А. В. Буткевича [6] его нужно считать лишь некоторым видоизменением того же способа Бесселя.

Ниже предлагается еще один общий способ решения первых двух задач, в котором вопрос о возможных соотношениях между исходными и определяемыми величинами рассмотрен с надлежащей полнотой. Выведенные здесь выражения применяются затем для решения третьей задачи.

3. В основу нового способа положен свод трех дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами, определяющий выравненную кривую $Г_{iк}$ сфероида:

$$\begin{aligned} &1)\ M\,dB + 0.dL - \cos A\,ds + 0.dA = 0 \\ &2)\ 0.dB + r\,dL - \sin A\,ds + 0.dA = 0 \\ &3)\ 0.dB + \sin B\,dL + 0.ds - 1.dA = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

и вытекающее из этого свода известное уравнение Клеро

$$\frac{r}{a}\sin A = \nu = \text{пост.} \qquad (2)$$

Здесь M, r суть радиусы кривизны меридиана и параллели в переменной точке C заданной выравненной кривой Γ, выходящей из C под азимутом A.

4. Используя указанную совокупность равенств (1), (2), получим после некоторых преобразований следующие окончательные выражения, решающие первые две основные расчетные задачи на земном сфероиде:

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ \eta\cdot s_{1.2} = a\mu\displaystyle\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{3/2}};\\[2ex]
2)\ s_{1.2} = a\nu\displaystyle\int_{A_{1.2}}^{A'_{2.1}}\sqrt{\frac{\sin^2 A - e^2\nu^2}{\sin^2 A - \nu^2}}\csc^2 A\,dA;\\[2ex]
3)\ \eta\cdot\Delta L_{1.2} = \nu\mu\displaystyle\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{(1-m^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};\\[2ex]
4)\ \Delta L_{1.2} = \displaystyle\int_{A_{1.2}}^{A'_{2.1}}\sqrt{\frac{\sin^2 A - e^2\nu^2}{\sin^2 A - \nu^2}}\,dA;\\[2ex]
5)\ 2.\Delta A_{1.2} = \arcsin\left[2\nu^2(1-e^2)\sec^2 B - (1-2e^2\nu^2)\right]\Big|_{B_1}^{B_2};\\[1ex]
5а)\ 2\cdot\Delta A_{1.2} = \arcsin(1-2\sin^2 A_{1.2}) - \arcsin(1-2g^2\sin^2 A_{1.2});\\[1ex]
6)\ \operatorname{ctg} A_{1.2} = \dfrac{V_2\cos B_1 - V_1\cos B_1\cos\Delta A_{1.2}}{V_1\cos B_2\sin\Delta A_{1.2}} = \dfrac{g-\cos\Delta A_{1.2}}{\sin\Delta A_{1.2}};\\[2ex]
7)\ -\operatorname{ctg} A'_{2.1} = \dfrac{V_1\cos B_2 - V_2\cos B_1\cos\Delta A_{1.2}}{V_2\cos B_1\sin\Delta A_{1.2}} = \dfrac{(1:g)-\cos\Delta A_{1.2}}{\sin\Delta A_{1.2}};\\[2ex]
8)\ \sin A_{1.2} = \dfrac{a\nu}{r_1} = \sqrt{1-e^2}\,\dfrac{\nu V_1}{\cos B_1};\\[2ex]
9)\ \sin A'_{2.1} = \dfrac{a\nu}{r_2} = \sqrt{1-e^2}\,\dfrac{\nu V_2}{\cos B_2};\\[2ex]
10)\ L_2 = L_1 + \Delta L_{1.2};\quad 11)\ A_{2.1} = A'_{2.1}\pm 180^\circ = (A_{1.2}+\Delta A_{1.2})\pm 180^\circ.
\end{array}\right| \qquad (3)$$

В равенствах (3) введены обозначения:

$$\left|\begin{array}{ll}
1)\ V = \sqrt{1+e'^2\cos^2 B}; & \\[1ex]
2)\ \nu = \dfrac{r_1}{a}\sin A_{1.2} = \sqrt{1+e'^2}\,\dfrac{\cos B_1\sin A_{1.2}}{V_1} = \nu_{1.2}; & \\[2ex]
3)\ \mu = \dfrac{1-e^2}{\sqrt{1-e^2\nu^2}} = \mu_{1.2}; & 4)\ \tau^2 = \dfrac{1-e^2\nu^2}{1-\nu^2} = \tau^2_{1.2};
\end{array}\right|$$

$$
\left.
\begin{array}{ll}
5)\ k^2 = e^2 : \tau^2 = k^2_{1.2}; & 6)\ m^2 = 1:\tau^2 = m^2_{1.2}; \\
7)\ \sin\varphi = \tau \sin B; & 8)\ g = \dfrac{V_2 \cos B_1}{V_1 \cos B_2}; \\
9)\ e^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}; & 10)\ e'^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{b^2}. \\
\multicolumn{2}{c}{\eta = \begin{cases} +1, \text{ если } \varphi_2 > \varphi_1 & (A'_{2.1} > A_{1.2}) \\ -1, \text{ если } \varphi_2 < \varphi_1 & (A'_{2.1} < A_{1.2}) \end{cases}}
\end{array}
\right| \qquad (4)
$$

a и b — большая и малая полуоси земного сфероида.

Свод (3) обладает двумя примечательными особенностями:

а) равенство (3.1) для $s_{1.2}$ имеет тот же вид, что и известное выражение для длины $x_{1.2}$ дуги меридиана;

б) величины $s_{1.2}$ и $\Delta L_{1.2}$ выражены не только через широту B в текущей точке C выравненной кривой $\Gamma_{1.2}$, но и в зависимости от азимута A кривой $\Gamma_{1.2}$ в той же текущей точке C.

5. Рассмотрим применение свода (3) для расчетных целей.

Интеграл (3.1) решается обычным разложением в ряд по степеням $k^2 (k^2 \leqslant e^2 = 0{,}0066934)$.

Интеграл (3.3), после разложения в ряд по степеням k^2, решается по способу, предложенному в 1935 году проф. В. П. Ветчинкиным в [7].

Интегралы (3.2) и (3.4) являются эллиптическими интегралами общего вида, и их решение проще всего получить численным интегрированием по способу Гаусса или же разложением числителя $(\sin^2 A - e^2\nu^2)^{1/2}$ в ряд по биному Ньютона.

Рабочие выражения, вытекающие из свода (3) и их применение для решения прямой и обратной задач, а также другие используемые здесь соотношения, даны в приложениях 1, 2.

6. Для нахождения B_3 и $\Delta L_{1.3}$, $\Delta L_{2.3}$ в третьей задаче — прямой засечке — решаем последовательным приближением уравнение

$$
\left.
\begin{aligned}
\eta.\Delta L_{1.2} = \eta.\Delta L_{1.3} - \eta.\Delta L_{2.3} = \nu_{1.3}\mu_{1.3} \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(1 - m^2_{1.3}\sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2_{1.3}\sin^2\varphi}} \\
- \nu_{2.3}\mu_{2.3} \int\limits_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{d\psi}{(1 - m^2_{2.3}\sin^2\psi)\sqrt{1 - k^2_{2.3}\sin^2\psi}},
\end{aligned}
\right\} \quad (5)
$$

где ν_{ij}, μ_{ij}, k^2_{ij}, m^2_{ij} находятся согласно (4.2)—(4.6), а φ и ψ связаны соотношением

$$
\sin\psi = \frac{\tau_{2.3}}{\tau_{1.3}} \sin\varphi, \qquad (6)
$$

в котором τ_{ij} подсчитывается по (4.4).

Действительное решение прямой засечки на сфероиде при разной постановке условия этой задачи дано в приложении 3.

7. Заметим, что приведенные эллиптические интегралы 3 рода $\Pi(\varphi, k, m^2)$, входящие в (3.1), (3.3) и (5), содержат в силу (4.5) и (4.6) только две независимые переменные. Поэтому указанные интегралы могут быть представлены в виде таблиц с двумя входами, наподобие

приведенного эллиптического интеграла 1 рода $F(\varphi, k)$. Наличие таких таблиц существенно облегчит решение предлагаемым способом всех трех указанных выше основных расчетных задач на сфероиде.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. R. Helmert. Die mathematischen und physikalischen Teorieen der höheren Geodäsie. I Theil, Leipzig, 1880.
2. Jordan-Eggert. Handbuch der Uermessungskunde, dritter Band. Stuttgart, 1923.
3. Ф. Н. Красовский, Руководство по высшей геодезии, ч. II, Москва, 1942.
4. Н. А. Урмаев, Сфероидическая геодезия, Москва, 1955.
5. А. М. Вировец, Решение прямой геодезической задачи при значительных расстояниях между геодезическими пунктами, „Геодезист", № 4, 1935.
6. А. В. Буткевич и В. Н. Ганьшин, О решении прямой геодезической задачи на большие расстояния методами Бесселя и Вировца, Труды НИИГАиК, том XI, Новосибирск, 1958.
7. В. П. Ветчинкин, Новые формулы и таблицы эллиптических интегралов и функций, Изд. ВВА РККА, М, 1935.

Решение
прямой задачи для выравненной кривой $\Gamma_{1.2}$

Условие задачи: даны B_1, L_1, $A_{1.2}$, $s_{1.2}$; найти B_2, L_2, $A_{2.1}$.

I. Определение B_2

1) $V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_1}$ — из геодезических таблиц.

2) $\nu = \sqrt{1+e'^2}\,\dfrac{\cos B_1 \sin A_{1.2}}{V_1}$;

3) $\mu = \dfrac{1-e^2}{\sqrt{1-e^2\nu^2}}$;

4) $\tau^2 = \dfrac{1-e^2\nu^2}{1-\nu^2} \geqslant 1$;

5) $k^2 = \dfrac{e^2}{\tau^2} \leqslant e^2$;

6) $\sin\varphi_1 = \tau \sin B$;

7) $m^2 = \dfrac{1}{\tau^2} \leqslant 1$;

8) $$C_0 = 1 + \sum_{\lambda=1}^{n} (-1)^\lambda \frac{\binom{-3/2}{\lambda}\binom{2\lambda}{\lambda}}{2^{2\lambda}} k^{2\lambda} = 1 + \sum_{\lambda=1}^{n} c_{0.2\lambda} k^{2\lambda};$$

9) $$C_{2u} = \sum_{\lambda=u}^{n} (-1)^{\lambda-u} \frac{\binom{-3/2}{\lambda}\binom{2\lambda}{\lambda-u}}{2^{2\lambda}\cdot u} k^{2\lambda} = \sum_{\lambda=u}^{n} c_{2u.2\lambda} k^{2\lambda} \qquad (u = 1,2,\ldots,n);$$

10) $$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi_{1.2} = \frac{s_{1.2}}{C_0 a \mu} - \sum_{u=1}^{n} \frac{C_{2u}}{C_0} (\sin 2u\varphi_2 - \sin 2u\varphi_1);$$

11) $\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi_{1.2}$;

12) $\sin B_2 = \dfrac{1}{\tau} \sin\varphi_2$.

В случае, если $\Delta\varphi_{1.2}$ мало, то B_2 вычисляется так:

11a) $$\Delta B''_{1.2} = (\operatorname{tg} B_1 \operatorname{ctg}\varphi_1)\Delta\varphi''_{1.2} - \frac{\operatorname{tg} B_1}{2\rho}(\Delta\varphi^2_{1.2} - \Delta B^2_{1.2})'' - \frac{1}{6\rho^2}[(\operatorname{tg} B_1 \operatorname{ctg}\varphi_1)\Delta\varphi^3_{1.2} - \Delta B^3_{1.2}]'';$$

12 a) $B_2 = B_1 + \Delta B_{1.2}$ $\qquad \rho = 206264.8.$

II. Определение $L_{1.2}$

1) $$\eta \cdot \Delta L_{1.2} = \nu\mu \sum_{\lambda=0}^{n} F(\lambda) = \nu\mu \sum_{\lambda=0}^{n} g(\lambda)\Phi(\lambda);$$

2) $L_2 = L_1 + \Delta L_{1.2}$;

Здесь:

$$\text{а) } g(\lambda) = (-1)^{\lambda}\binom{-1/2}{\lambda}k^{2\lambda}; \qquad \text{б) } \Phi(\lambda) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sin^{2\lambda}\varphi\, d\varphi}{1 - m^2\sin^2\varphi};$$

$$\text{в) } F(\lambda) = g(\lambda)\Phi(\lambda).$$

Множитель $\eta = +1$, если $\varphi_2 > \varphi_1$, $\eta = -1$, если $\varphi_2 < \varphi_1$.

Из (б) значение $\Phi(0) = F(0)$ найдем прямым интегрированием, а для $F(\lambda)$ при $\lambda > 0$ будем иметь следующее общее выражение:

$$F(\lambda) = E(\lambda)[S(\lambda - 1) - \Phi(\lambda - 1)] = E(\omega + 1)[S(\omega) - \Phi(\omega)],$$

$$(\omega = \lambda - 1 = 0,\ 1,\ 2, \dots, n),$$

где

$$\text{а) } E(\lambda) = -\frac{g(\lambda)}{m^2} = (-1)^{\lambda+1}\binom{-1/2}{\lambda}\frac{k^{2\lambda}}{m^2} = (-1)^{\lambda+1}\binom{-1/2}{\lambda}e^2k^{2(\lambda-1)};$$

$$\text{б) } S(0) = \varphi_2 - \varphi_1;$$

$$\text{в) } S(\lambda - 1) = S(\omega) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin^{2\omega}\varphi\, d\varphi = \frac{\binom{2\omega}{\omega}}{2^{2\omega}}(\varphi_2 - \varphi_1) +$$

$$+ \frac{(-1)^{\omega}}{2^{2\omega}}\sum_{\varkappa=0}^{\omega-1}(-1)^{\varkappa}\frac{\binom{2\omega}{\varkappa}}{\omega - \varkappa}[\sin 2(\omega - \varkappa)\varphi_2 - \sin 2(\omega - \varkappa)\varphi_1]$$

$$\left(\omega = \lambda - 1 = 1,\ 2, \dots, n\right).$$

Отсюда для $\nu\mu\, F(\lambda)$ получим последовательно:

$$1)\ \nu\mu\, F(0) = \frac{\nu}{|\nu|}\sqrt{1 - e^2}\,[\operatorname{arc\,tg} pt_2 - \operatorname{arc\,tg} pt_1] = \nu\mu\, \Phi(0) = R(0)$$

$$2)\ \nu\mu\, F(1) = -\nu\mu\frac{e^2}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{2}e^2R(0) = \frac{e^2}{2}\left[\nu\mu\, F(0) - \right.$$

$$\left. - \frac{\nu}{|\nu|}p\sqrt{1 - e^2}(\varphi_2 - \varphi_1)\right] = R(1)$$

$$3)\ \nu\mu\, F(2) = -\nu\mu\frac{3}{16}e^2k^2\left[(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{1}{2}(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)\right]$$

$$+ \frac{3}{4}e^2R(1) = R(2)$$

$$4)\ \nu\mu\, F(3) = -\nu\mu\frac{5}{16}e^2k^4\left[3/8(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{1}{4}(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{32}(\sin 4\varphi_2 - \sin 4\varphi_1)\right] + \frac{5}{6}e^2R(2) = R(3)$$

и т. д., причем:

$$\text{а) } p = \sqrt{1 - m^2}; \qquad \text{б) } t = \operatorname{tg}\varphi$$

Если $\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi_{1.2}$ мало, то $\nu\mu F(0)$ следует вычислять так:

$$1а)\ \nu\mu F(0) = \frac{\nu}{|\nu|}\sqrt{1 - e^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{p\sin\Delta\varphi_{1.2}}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - p^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2} =$$

$$= \frac{\nu}{|\nu|}\sqrt{1 - e^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{p\sin\Delta\varphi_{1.2}}{\cos\Delta\varphi_{1.2} - m^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2}.$$

III. Определение $A_{2.1}$

$$1)\ \sin A'_{2.1} = \sqrt{1-e^2}\,\frac{\nu V_2}{\cos B_2};$$

$$2)\ A_{2.1} = A'_{2.1} \pm 180^\circ = (A_{1.2} + \Delta A_{1.2}) \pm 180^\circ.$$

Если $A'_{2.1}$ близко 90° или 270°, но $(B_2 - B_1)$ велико, то вместо $A'_{2.1}$ вычисляют $\Delta A_{1.2}$:

$$3)\ g = \frac{V_2 \cos B_1}{V_1 \cos B_2};$$

$$4)\ 2.\Delta A_{1.2} = \arcsin(1 - 2\sin^2 A_{1.2}) - \arcsin(1 - 2 g^2 \sin^2 A_{1.2}).$$

Если $(B_2 - B_1) = \Delta B_{1.2}$ мало, то вместо $A'_{2.1}$ можно также вычислить $\Delta A_{1.2}$:

$$2.\quad \Delta A''_{1.2} = \frac{\rho''}{\sin 2A_{1.2}}\,\varepsilon \left[1 + \frac{\cos 2A_{1.2}}{2\sin^2 2A_{1.2}}\,\varepsilon + \frac{1 + 2\cos^2 2A_{1.2}}{6\sin^4 2A_{1.2}}\,\varepsilon^2\right],$$

где
$$5)\ \varepsilon = 2(g^2 - 1)\sin^2 A_{1.2}$$

Приложение 2

Решение обратной задачи для выравненной кривой $\Gamma_{1.2}$

Условие задачи: даны B_1, L_1 и B_2, L_2; найти $A_{1.2}$, $A_{2.1}$ и $s_{1.2}$.

Первый способ определения $A_{1.2}$ и $A_{2.1}$ (при $s_{1.2} > 1000$ км).

Прежде всего решаем 2 приближениями уравнение (см. приложение 1):

$$\eta \cdot \Delta L_{1.2} = \nu\mu \sum_{\lambda=0}^{n} F(\lambda) = \nu\mu F(0) + \nu\mu \sum_{\lambda=1}^{n} F(\lambda) =$$

$$= \frac{\nu}{|\nu|}\sqrt{1-e^2}\,[\operatorname{arc\,tg} pt_2 - \operatorname{arc\,tg} pt_1] + \nu\mu\sum_{\lambda=1}^{n} F(\lambda) = \qquad (*)$$

$$= \frac{\nu}{|\nu|}\sqrt{1-e^2}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{p\sin B_2}{\sqrt{\cos^2 B_2 - p^2}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{p\sin B_1}{\sqrt{\cos^2 B_1 - p^2}}\right] +$$

$$+ \nu\mu \sum_{\lambda=1}^{n} F(\lambda),$$

относительно неизвестного p, причем сумма $\nu\mu\sum_{\lambda=1}^{n} F(\lambda)$ есть малость порядка e^2.

Начальное достаточно точное значение $A_{1.2}^{(0)}$ азимута $A_{1.2}$, входящего в вычисление величины ν, находим из соотношений:

$$1)\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha'_{2.1}+\alpha_{1.2})=\frac{\cos\frac{1}{2}(B_2+B_1)}{\sin\frac{1}{2}(B_2-B_1)}\operatorname{tg}\frac{\Delta L_{1.2}}{2}$$

$$2)\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha'_{2.1}-\alpha_{1.2})=\frac{\sin\frac{1}{2}(B_2+B_1)}{\cos\frac{1}{2}(B_2-B_1)}\operatorname{tg}\frac{\Delta L_{1.2}}{2},$$

которые решаем относительно $\alpha_{1.2}$ и затем полагаем $\alpha_{1.2}=A^{(0)}_{1.2}$. Соответствующие приближенные значения неизвестного p и величин $\nu\mu$, k^2 и $R(0)$ определим тогда из выражений:

$$1)\ p=\frac{\nu\sqrt{1-\nu^2}}{\sqrt{1-e^2\nu^2}}=\cos B_0\approx\sin A^{(0)}_{1.2}\cos B_1=p^{(0)};$$

$$2)\ \nu\mu=\frac{\nu}{|\nu|}p\sqrt{1-e^2}\ ;\qquad 3)\ k^2=e^2\sin B_0;$$

$$4)\ R(0)\approx\frac{\nu}{|\nu|}\sqrt{1-e^2}\,\Delta L_{1.2}$$

при $p=p^{(0)}$.

Улучшенное значение $p^{(s+1)}$ неизвестного p в итоге s-го приближения найдем так:

$$\text{а)}\ w^{(s)}=[\nu\mu\sum_{\lambda=1}^{n}F(\lambda)]^{(s)}-\eta\cdot\Delta L_{1.2}$$

$$\text{б)}\ \frac{dw^{(s)}}{dp}=\left[\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-p^2}(t_2-t_1)\right]^{(s)}$$

$$\text{в)}\ p^{(s+1)}=p^{(s)}-\frac{dw^{(s)}}{dp}\cdot w^{(s)}.$$

Решив уравнение (*), вычисляем затем ν, $A_{1.2}$, $A_{2.1}$, причем для величины ν из (1) будем иметь обратно:

$$4)\ \nu=\frac{p}{\sqrt{(1-e^2)+p^2}}.$$

Примечание. Если между концевыми точками 1, 2 выравненной кривой $\Gamma_{1.2}$ находится ее вершина O, то уравнение (*) нужно представить в виде

$$\eta\cdot\Delta L_{1.2}=\eta(\Delta L_{1.0}+\Delta L_{0.2})=\nu\mu\sum_{\lambda=0}^{n}F_{1.0}(\lambda)+\nu\mu\sum_{\lambda=0}^{n}F_{0.2}(\lambda)+\eta\pi,\qquad(**)$$

причем широта B_0 точки O определяется выражениями:

$$5)\ \frac{\nu}{|\nu|}\sin B_0=\sqrt{\frac{1-\nu^2}{1-e^2\nu^2}}=\frac{1}{\tau}=m=\sqrt{1-p^2}$$

$$6)\ \cos B_0=\sqrt{1-m^2}=p.$$

Второй способ определения $A_{1.2}$ и $A_{2.1}$ (при $s_{1.2} \leqslant 1000$ км)

$$1)\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha'_{2.1}+\alpha_{1.2}) = \frac{\cos\frac{1}{2}(B_2+B_1)}{\sin\frac{1}{2}(B_2-B_1)}\operatorname{tg}\frac{\Delta L_{1.2}}{2} = \operatorname{tg}\frac{\bar{\alpha}_{1.2}}{2}$$

$$2)\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha'_{2.1}-\alpha_{1.2}) = \frac{\sin\frac{1}{2}(B_2+B_1)}{\cos\frac{1}{2}(B_2-B_1)}\operatorname{tg}\frac{\Delta L_{1.2}}{2} = \operatorname{tg}\frac{\Delta\alpha_{1.2}}{2}$$

Отсюда найти $\alpha_{1.2}$ и $\alpha'_{1.2}$ в отдельности.

$$3)\ Q = \frac{e^2}{\sin\Delta L_{1.2}}(V_1\sin B_2 - V_2\sin B_1);$$

$$4)\ \alpha_{2.1} = \alpha'_{2.1} \pm 180° = (\alpha_{1.2}+\Delta\alpha_{1.2}) \pm 180°$$

$$5)\ \sin\sigma_{1.2} = \frac{\cos B_2}{\sin\alpha_{1.2}}\sin\Delta L_{1.2} = -\frac{\cos B_1}{\sin\alpha_{2.1}}\sin\Delta L_{1.2}$$

$$6)\ \operatorname{ctg}A^{\circ}_{1.2} = \operatorname{ctg}\alpha_{1.2} - Q\frac{\cos B_1}{V_1\cos B_2};$$

$$7)\ \operatorname{ctg}A^{\circ}_{2.1} = \operatorname{ctg}\alpha_{2.1} - Q\frac{\cos B_2}{V_2\cos B_1}$$

$$8)\ \eta''_{1.2} = \frac{e^2}{6\rho''}(\sigma''_{1.2})^2\sin A_{1.2}\cos^2 B_1\left(\cos A_{1.2} - \frac{\sigma''_{1.2}}{4\rho''}\operatorname{tg}B_1\right)$$

$$9)\ \eta''_{2.1} = \frac{e^2}{6\rho''}(\sigma''_{1.2})^2\sin A_{2.1}\cos^2 B_2\left(\cos A_{2.1} - \frac{\sigma''_{1.2}}{4\rho''}\operatorname{tg}B_2\right)$$

$$10)\ A_{1.2} = A^{\circ}_{1.2} - \eta''_{1.2}$$

$$11)\ A_{2.1} = A^{\circ}_{2.1} - \eta''_{2.1}$$

Определение $s_{1.2}$

Вычисляем ν, τ, μ, k^2, φ_1, φ_2, C_0 и C_{2u} $(u = 1, 2, \ldots, n)$ — как в прямой задаче.

$$10)\ s_{1.2} = C_0 a\mu(\varphi_2-\varphi_1) + a\mu\sum_{u=1}^{n}C_{2u}(\sin 2u\varphi_2 - \sin 2u\varphi_1)$$

Приложение 3

Решение прямой засечки на сфероиде

Возможны 2 постановки этой задачи: общая и частная.

Общая постановка. Даны геодезические координаты B_1, L_1 и B_2, L_2 лучей $\delta Л_{1.3}$, $\delta Л_{2.3}$ с точек 1, 2 на определяемую точку 3. Найти геодезические координаты B_3, L_3 точки 3.

Частная постановка — предполагается, что задан также засекающий угол γ_3 при определяемой точке 3, а расстояния $s_{1.3}$, $s_{2.3}$ не превышают 300 — 400 *км.*

А) Решение для общего случая (при любых расстояниях $s_{1.3}$, $s_{2.3}$)

Написав при $L_1 < L_2$ основное соотношение

$$\eta.\Delta L_{1.2} = \eta.\Delta L_{1.3} - \eta\cdot\Delta L_{2.3} = \nu_{1.3}\mu_{1.3}\sum_{\lambda=0}^{n} F_{1.3}(\lambda) - \nu_{2.3}\mu_{2.3}\sum_{\lambda=0}^{n} F_{.3}(\lambda)$$

и преобразуя его согласно приложения 1, приходим к уравнению

$$\sqrt{1-e^2}\left[\frac{\nu_{1.3}}{|\nu_{1.3}|}\operatorname{arc\,tg}\frac{p_{1.3}\sin B_3}{\sqrt{(1-p_{1.3}^2)-\sin^2 B_3}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{p_{2.3}\sin B_3}{\sqrt{(1-p_{2.3}^2)-\sin^2 B_3}}\right] +$$
$$+ \left[\nu_{1.3}\mu_{1.3}\sum_{\lambda=1}^{n} F_{1.3}(\lambda) - \nu_{2.3}\mu_{2.3}\sum_{\lambda=1}^{n} F_{2.3}(\lambda)\right] - w = \Phi(B_3) + \varepsilon(B_3) - w = 0 \qquad (1)$$

с неизвестным B_3, причем поправочный член $\varepsilon(B_3)$ есть малость порядка e^2, а свободный член w определяется выражением:

$$w = \eta.\Delta L_{1.2} - \sqrt{1-e^2}\left[\frac{\nu_{2.3}}{|\nu_{2.3}|}\operatorname{arc\,tg}\frac{p_{2.3}\sin B_2}{\sqrt{(1-p_{2.3}^2)-\sin^2 B^2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{\nu_{1.3}}{|\nu_{1.3}|}\operatorname{arc\,tg}\frac{p_{1.3}\sin B_1}{\sqrt{(1-p_{1.3}^2)-\sin^2 B_1}}\right]. \qquad (2)$$

Уравнение (1) решаем способом последовательных приближений и с этой целью основной член $\Phi(B_3)$ в отдельных приближениях представляем в виде

$$\Phi(B_3) = \Phi(B_3^{(s+1)}) = \Phi(B_3^{(s)}) + \Phi'(B_3^{(s)})\cdot\delta B_3^{(s)},\ (s = 1,2,\ldots n), \qquad (3)$$

где $\Phi(B_3^{(s)})$ найдено из предшествующего приближения, $\delta B_3^{(s)}$ — новое неизвестное, а

$$1)\ \Phi'(B_3) = (1-e^2)\cos B_3\left[\frac{\left(\frac{\nu}{|\nu|}p\tau\right)_{1.3}\sec^3\varphi_3}{1+p_{1.3}^2\operatorname{tg}^2\varphi_3} - \frac{\left(\frac{\nu}{|\nu|}p\tau\right)_{2.3}\sec^3\psi_3}{1+p_{2.3}^2\operatorname{tg}^2\psi_3}\right],$$

$$2)\ \sin\varphi_3 = \tau_{1.3}\sin B_3 \qquad 3)\ \sin\psi_3 = \tau_{2.3}\sin B_3.$$

Начальное значение $B_3^{(0)}$ широты B_3 берем с карты.

Б) Решение для частного случая (при заданном угле γ_3)

$$0)\ i = 1,2 = л, п; \qquad 1)\ \nu_{i3} = \frac{\cos B_i \sin A_{i3}}{V_i\sqrt{1-e^2}}$$

$$\left.\begin{aligned} &2)\ \operatorname{ctg} A_{3.1} = \left(\cos\gamma_3 - \frac{\nu_{2.3}}{\nu_{1.3}}\right)\operatorname{csc}\gamma_3 \\ &3)\ \operatorname{ctg} A_{3.2} = \left(\frac{\nu_{1.3}}{\nu_{2.3}} - \cos\gamma_3\right)\operatorname{csc}\gamma_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{Поверка: } A_{3.1} = A_{3.2} + \gamma_3$$

$$4а)\ \sin^2 B_3 = \frac{\sin^2 A_{3i} - \nu^2_{i3}}{\sin^2 A_{3i} - e^2 \nu^2_{i3}};$$

$$4б)\ \cos^2 B_3 = \frac{(1 - e^2)\, \nu^2_{i3}}{\sin^2 A_{3i} - e^2\, \nu^2_{i3}};$$

$$4в)\ \mathrm{tg}^2 B_3 = \frac{\sin^2 A_{3i} - \nu^2_{i3}}{(1 - e^2)\nu^2_{i3}};$$

$$5)\ \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,\Delta L_{i3} = \frac{\cos\, \frac{1}{2}\,(B_3 - B_i)}{\sin\, \frac{1}{2}(B_3 + B_i)}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,\Delta A_{i3},$$

где $\Delta A_{i3} = A_{3i} - A_{i3} \pm 180^\circ$

Поверка: $\Delta L_{1.3} - \Delta L_{2.3} = \Delta L_{1.2}$.

Примечание. Если длины $s_{1.3}$, $s_{2.3}$ превышают 250—400 км, то при особо точных вычислениях нужно в разности ΔA_{i3}, входящие в (5), вводить соответствующие малые поправки.