

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В КОРОТКОМ ЦИЛИНДРЕ С ВНУТРЕННИМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ

Ю. А. КОРОЛЕНКО, Г. П. БОЙКОВ

(Представлено профессором, доктором Г. И. Фуксом)

Катушки с внутренним тепловыделением, выполненные в той или иной форме, являются важной частью электрических устройств. Вопросу о расчете температурного поля таких катушек посвящен ряд работ ([2] и др.).

Расчетные соотношения, даваемые в этих работах, как правило, очень сложны по форме и неудобны для инженерной практики.

Применим к исследованию температурного поля цилиндрической катушки метод параллельного интегрирования [3]. Температурное поле катушки описывается уравнениями:

$$\frac{\partial^2 t(r; y)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t(r; y)}{\partial r} + \frac{\partial^2 t(r; y)}{\partial y^2} + \frac{\omega}{\lambda} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial t(0; y)}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial t(r; 0)}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\partial t(R_1; y)}{\partial r} &= \alpha [t(R_1; y) - t_f]; \\ -\lambda \frac{\partial t(r; R_2)}{\partial y} &= \alpha [t(r; R_2) - t_f]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $2R_1$ и $2R_2$ — измерения тела, r и y — текущие координаты точек сечения тела, t_f — температура окружающей среды, ω — внутреннее тепловыделение, одинаковое по всему объему катушки.

Уравнение (1) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 t(r; y)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t(r; y)}{\partial r} \right] \left[1 + \frac{\frac{\partial^2 t(r; y)}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2 t(r; y)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t(r; y)}{\partial r}} \right] &= -\frac{\omega}{\lambda}, \\ \frac{\partial^2 t(r; y)}{\partial y^2} \left[1 + \frac{1}{\frac{\frac{\partial^2 t(r; y)}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2 t(r; y)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t(r; y)}{\partial r}}} \right] &= -\frac{\omega}{\lambda}. \end{aligned}$$

Считая согласно [1] отношение составляющих расхождения градиента температуры постоянной величиной, последние формулы запишем так:

$$\frac{\partial^2 t(r; y)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t(r; y)}{\partial r} = -\frac{w}{\lambda \xi},$$

$$\frac{\partial^2 t(r; y)}{\partial y^2} = -\frac{\xi - 1}{\xi} \frac{w}{\lambda}.$$

Решение уравнений (4)

$$t(r; y) = -\frac{w}{4\lambda\xi} r^2 + \varphi_1(y) \ln r + \varphi_2(y),$$

$$t(r; y) = -\frac{\xi - 1}{\xi} \frac{w}{2\lambda} y^2 + \varphi_1(r) y + \varphi_2(r).$$

Из условий симметрии (2) вытекает, что

$$\varphi_1(y) = \varphi_1(r) = 0.$$

С учетом центральных условий при $r = 0$, а затем $y = 0$,

$$t(0; y) = \varphi_2(y), \quad t(r; 0) = \varphi_2(r).$$

Тогда

$$t(r; y) = -\frac{w}{4\lambda\xi} r^2 + t(0; y); \quad (5)$$

$$t(r; y) = -\frac{\xi - 1}{\xi} \frac{w}{2\lambda} y^2 + t(r; 0). \quad (6)$$

Полагая в уравнениях (4) соответственно $r = 0$ и $y = 0$, получим систему обычных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 t(r; 0)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt(r; 0)}{dr} = -\frac{w}{\lambda \xi},$$

$$\frac{d^2 t(0; y)}{dy^2} = -\frac{\xi - 1}{\xi} \frac{w}{\lambda}.$$

Их решение:

$$t(r; 0) = -\frac{w}{4\lambda\xi} r^2 + D_1,$$

$$t(0; y) = -\frac{\xi - 1}{\xi} \frac{wy^2}{2\lambda} + D_2.$$

Так как при $r = y = 0$ $t(0; 0) = D$ (температура центра), то $D_1 = D_2 = D$ и уравнения (5) и (6) становятся одинаковыми:

$$t(r; y) = D - \frac{w}{4\lambda\xi} r^2 - \frac{\xi - 1}{\xi} \frac{wy^2}{2\lambda}. \quad (7)$$

Решение (7) удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности (1) и условию симметрии (2).

Для удовлетворения граничных условий (3) необходимо соответствующим образом определить D и ξ .

Используем условия (3), приближенно переписав их в виде

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\partial t(R_1; y)}{\partial r} &= \alpha [t(R_1; y)_{cp} - t_f], \\ -\lambda \frac{\partial t(r; R_2)}{\partial y} &= \alpha [t(r; R_2)_{cp} - t_f], \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} t(R_1; y)_{cp} &= \frac{1}{R^2} \int_0^{R_2} t(R_1; y) dy = D - \frac{\xi - 1}{\xi} \frac{wR_2^2}{6\lambda} - \frac{wR_1^2}{4\lambda\xi}, \\ t(r; R_2)_{cp} &= \frac{2}{R_1^2} \int_0^{R_1} t(r; R_2) r \cdot dr = D - \frac{wR_1^2}{8\lambda\xi} - \frac{\xi - 1}{\xi} \frac{wR_2^2}{2\lambda}. \end{aligned}$$

Подставляя значения $t(R_1; y)_{cp}$ и $t(r; R_2)_{cp}$ в (8), после преобразований получим

$$\xi = 1 + \frac{\frac{R_1}{2\alpha} + \frac{R_1^2}{8\lambda}}{\frac{R_2}{\alpha} + \frac{R_2^2}{3\lambda}}. \quad (9)$$

Температура центра тела

$$D = \frac{wR_1}{2\alpha\xi} + \frac{\xi - 1}{\xi} \frac{wR_2^2}{6\lambda} + \frac{wR_1^2}{4\lambda\xi}. \quad (10)$$

№№ катушек	Координаты точек (мм)		Температура точек		Расхождение, %
	r	y	по 7, 9, 10	методом элементарных балансов	
1	0	0	61,98	62,0	0
2	5	0	60,32	60,4	0,14
3	10	0	55,33	55,3	0,05
4	13	0	50,75	50,4	0,7
5	0	10	58,63	58,7	0,12
6	5	10	56,97	57,05	0,14
7	10	10	51,98	52,2	0,42
8	13	10	47,40	47,9	1,05
9	0	20	48,58	48,6	0,4
10	5	20	46,92	46,3	1,34
11	10	20	41,93	42,5	1,0
12	13	20	37,35	39,1	4,5

Значение температур, найденных по формулам (7), (9) и (10) для различных точек катушки, хорошо совпадает с данными, полученными методом элементарных балансов.

Результаты сравнения приведены в табл. 1.

При расчетах принято:

наружный диаметр катушки $D = 2 R_1 = 30$ мм;

длина катушки $L = 2 R_2 = 50$ мм;

коэффициент теплопроводности намотки катушки

$$\lambda = 0,3 \frac{\text{ккал}}{\text{м. час. } ^\circ\text{C}} ;$$

коэффициент теплоотдачи катушки $\alpha = 15 \text{ ккал/м}^2 \cdot \text{час. } ^\circ\text{C}$; объемное тепловыделение в катушке $w = 100000 \text{ ккал/м}^3 \cdot \text{час}$; температура окружающей среды $t_f = 0^\circ\text{C}$.

Заключение

Изложенный приближенный метод расчета температурного поля цилиндрической катушки с внутренним тепловыделением отличается простотой и достаточной точностью (кроме точек, лежащих на поверхности катушки и близких к ним). Точность расчетов по формулам 7, 9 и 10 особенно высока при малых значениях критерия Био (Bi).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. П. Бойков. Прогрев тел конечных размеров под действием лучистого тепла. Известия ТПИ, т. 101, 1958.
2. Шнейдер. Инженерные проблемы теплопроводности. Изд. иностранной литературы, М., 1960.
3. Г. П. Бойков, Ю. А. Короленко. Температурное поле в телах эллипсого сечения при внутренних источниках тепла. Инженерно-физический журнал, № 12, 1960.