ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМЕНИ С. М. КИРОВА

Том 254 1975

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЛАМИНАРНАЯ КОНВЕКЦИЯ НА ИЗЛУЧАЮЩЕЙ ПЛАСТИНЕ

В. В. САЛОМАТОВ, Е. М. ПУЗЫРЕВ

(Представлена кафедрой теплофизики и атомной энергетики)

Исследуется влияние теплового излучения на ламинарный пограничный слой непоглошающей жидкости, обтекающей теплоизлучающую пластину в условиях естественной или вынужденной конвекции.

Вопросы нестационарной конвекции и, в частности, взаимодействия теплового излучения с нестационарным ламинарным пограничным слоем непоглощающей жидкости представляют значительный интерес. Задачи такого рода возникают при работе теплообменных устройств в переменных режимах, различных элементов электронных приборов при их форсированном пуске, при обтекании теплоотдающих поверхностей в условиях существенной нестационарности и т. д.

Из исследований, которые касаются частных вопросов данной проблемы, следует отметить статьи [1—3]. В работе [1] решена задача нестационарной вынужденной ламинарной конвекции при граничном условии первого рода. Показано, что при ступенчатом скачке скорости и температуры переход из неустановившегося режима в стационарный происходит при переходе через фронт тепловой и динамической волн, движущихся от передней кромки пластины. На такой же характер процесса в случае естественной конвекции указывают экспериментальные исследования Гебхарта [3]. В статье [2] рассматривается задача взаимодействия теплового излучения с ламинарным пограничным слоем непоглощающей жидкости в условиях вынужденной и естественной стационарной конвекции.

Показано, что для постоянного граничного условия второго рода по длине пластины имеет место переход от теплообмена при граничном условии второго рода к теплообмену с граничным условием первого рода и получены аналитические решения, но лишь для предельных случаев: малых и больших значений параметра излучения ζ.

В настоящей работе рассматривается более общая задача взаимодействия теплового излучения с ламинарным пограничным слоем непоглощающей жидкости для нестационарной естественной и вынужденной конвекции.

Естественная конвекция. Рассматривается нестационарная ламинарная естественная конвекция непоглощающей жидкости с постоянными теплофизическими свойствами, возникающая около вертикальной пластины при ступенчатом подводе к ее поверхности постоянного теплового потока q_w. Теплопередача осуществляется при взаимодействии лучистого теплообмена (к окружающей среде температуры — T_e) и конвекции (к омывающей жидкости с температурой — T_∞).

Математически задача описывается уравнениями сохранения массы, импульса и энергии:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+g\beta(T-T_\infty), \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{3}$$

с граничными условиями в предположении равенства толщин теплового и гидродинамического пограничных слоев:

для $\tau\leqslant 0$

$$u=0, T=T_\infty, \tag{4}$$

для $\tau>0$

при $y=0$
$$\frac{\partial T}{\partial y}=-\frac{q_k}{\lambda}=-\frac{q_w-\sigma\varepsilon(T_w^4-T_e^4)}{\lambda}, \tag{5}$$

$$u=v=0, \tag{6}$$

при $y=\delta$

$$T=T_\infty,\ \frac{\partial T}{\partial y}=0 \tag{7}$$

$$u=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{8}$$

Граничным условием (5), (7) удовлетворяет профиль температуры,

$$T-T_\infty=\frac{q_k\delta}{2\lambda}\left(\frac{y^2}{\delta^2}-2\frac{y}{\delta}+1\right), \tag{9}$$

дающий при $y=0$ соотношение

$$\delta=\frac{2\lambda(T_w-T_\infty)}{q_k}=\frac{2\lambda(\Theta_w-1)}{\sigma\varepsilon T_\infty^3(\Theta_л^4-\Theta_w^4)}. \tag{10}$$

Представив уравнение (2) в виде

$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+g\beta(T-T_\infty)=C_1 \tag{11}$$

и интегрируя его с учетом (9), после определения констант из граничных условий (6), (8) получим профиль скорости:

$$u=\frac{g\beta q_k\delta^3}{6\lambda\nu}\left(-\frac{y^4}{4\delta^4}+\frac{y^3}{\delta^3}-\frac{5}{4}\cdot\frac{y^2}{\delta^2}+\frac{y}{2\delta}\right). \tag{12}$$

Интегрируя (3) от $y=0$ до $y=\delta$ с привлечением (1), (6), (8), получим уравнение теплового потока

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^\delta (T-T_\infty)dy+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta u(T-T_\infty)dy=-a\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}, \tag{13}$$

из которого следует

$$\frac{\partial}{\partial\tau}q_k\delta^2+\frac{g\beta}{140\lambda\nu}\frac{\partial}{\partial x}q_k^2\delta^5=6aq_k. \tag{14}$$

Используя (10), запишем характеристическую систему полученного уравнения [6].

$$\frac{2(\Theta_w-1)d\Theta_w}{(\Theta_л^4-\Theta_w^4)^2}+\frac{(\Theta_w-1)^2d\Theta_w^4}{(\Theta_л^4-\Theta_w^4)^3}=6a\left(\frac{\sigma\varepsilon T_\infty^3}{2\lambda}\right)^2d\tau, \tag{15}$$

$$\frac{5(\Theta_w-1)^4d\Theta_w}{(\Theta_л^4-\Theta_w^4)^4}+\frac{3(\Theta_w-1)^5d\Theta_w^4}{(\Theta_л^4-\Theta_w^4)^5}=\frac{420\nu a}{g\beta T_\infty}\left(\frac{\sigma\varepsilon T_w^3}{2\lambda}\right)^4dx, \tag{16}$$

$$\frac{5(\Theta_л^4-\Theta_w^4)+12(\Theta_w-1)\Theta_w^3}{2(\Theta_л^4-\Theta_w^4)+4(\Theta_w-1)\Theta_w^3}\cdot\frac{(\Theta_w-1)^3}{(\Theta_л^4-\Theta_w^4)^2}d\tau=$$
$$=\frac{70\nu\,dx}{g\beta T_\infty}\left(\frac{\sigma\varepsilon T_\infty^3}{2\lambda}\right)^2. \tag{17}$$

Интеграл дифференциального уравнения (15) при граничном условии — $\Theta_w\ (\tau=0)=1$ дает трансцендентное уравнение для расчета изменения температуры поверхности пластины при нестационарном теплообмене

$$\frac{(\Theta_w-1)^2}{2(\Theta_л^4-\Theta_w^4)^2}+F(\Theta_л;\Theta_w)-F(\Theta_л;1)=6a\left(\frac{\sigma\varepsilon T_\infty^3}{2\lambda}\right)^2\tau. \tag{18}$$

и конвективной теплоотдачи

$$\mathrm{Nu}_\tau=\frac{q_kx_*}{(T_w-T_\infty)\lambda}=\frac{2x_*}{\delta}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3\mathrm{F}_0-\frac{1}{2}\left(\frac{2\lambda}{\sigma\varepsilon\cdot T_\infty^3\cdot x_*}\right)^2\left[F(\Theta_л,\Theta_w)-F(\Theta_л,1)\right]}}, \tag{19}$$

где

$$F(\Theta_л,\Theta_w)=\int\frac{(\Theta_w-1)d\Theta_w}{(\Theta_л^4-\Theta_w^4)^2}=\frac{\Theta_w(\Theta_w-1)}{4\Theta_л^4(\Theta_л^4-\Theta_w^4)}+$$

$$+\frac{1}{8\Theta_л^6}\ln\left|\frac{\Theta_л^2+\Theta_w^2}{\Theta_л^2-\Theta_w^2}\right|-\frac{3}{16\Theta_л^7}\left[\ln\left|\frac{\Theta_л+\Theta_w}{\Theta_л-\Theta_w}\right|+2\operatorname{arctg}\frac{\Theta_w}{\Theta_л}\right], \qquad (20)$$

x_* — некоторый фиктивный линейный размер, служащий только для записи критериальной зависимости (19).

Интегрируя дифференциальное уравнение (16) при граничном условии на передней кромке пластины $=\Theta_w(x=0)=1$, получим стационарное решение в виде трансцендентного уравнения для расчета изменения температуры по длине пластины

$$\frac{3}{5}\frac{(\Theta_w-1)^5}{(\Theta_л^4-\Theta_w^4)^4}+G(\Theta_л;\Theta_w)-G(\Theta_л;1)=\frac{336a\nu x}{g\beta T_\infty}\left(\frac{\sigma\varepsilon T_\infty^3}{2\lambda}\right)^4, \qquad (21)$$

а следовательно, и конвективной теплоотдачи

$$\mathrm{Nu}_x=\frac{q_k x}{(T_w-T_\infty)\lambda}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[4]{\frac{35}{\mathrm{Gr_x Pr}}-\frac{5}{3(\Theta_w-1)}\left(\frac{\lambda}{\sigma\varepsilon T_\infty^3 x}\right)^4[G(\Theta_л;\Theta_w)+G(\Theta_л,1)]}}, \qquad (22)$$

где

$$G(\Theta_л,\Theta_w)=\int\frac{(\Theta_d-1)^4 d\Theta_w}{(\Theta_л^4-\Theta_w^4)^4}=\frac{\Theta_w(\Theta_w-1)^4}{12\Theta_л^4(\Theta_л^4-\Theta_w^4)^3}+$$

$$\frac{1}{384\Theta_л^{12}(\Theta_л^4-\Theta_w^4)^2}(21\Theta_л^8\Theta_w+7\Theta_л^4\Theta_w^5-128\Theta_л^8+486\Theta_л^4\Theta_w^3-270\Theta_w^7-400\Theta_л^4\Theta_w^2+$$

$$+240\Theta_w^6+121\Theta_л^4\Theta_w-770\Theta_w^5)+$$

$$+\frac{(-7\Theta_к^4+270\Theta_к^2+77)}{512\Theta_к^{15}}\ln\left|\frac{\Theta_л+\Theta_w}{\Theta_л-\Theta_w}\right|=\frac{5}{16\Theta_л^{24}}\ln\left|\frac{\Theta_л^2+\Theta_w^2}{\Theta_л^2-\Theta_w^2}\right|+$$

$$\frac{(-7\Theta_л^4-270\Theta_л^2+77)}{256\Theta_л^{15}}\operatorname{arctg}\frac{\Theta_w}{\Theta_л}. \qquad (23)$$

Для анализа полученных решений определим по правилу Лопиталя относительный вклад членов $[F(\Theta_л;\Theta_w)-F(\Theta_л;1)]$ и $[G(\Theta_л;\Theta_w)-G(\Theta_л;1)]$ в уравнениях (18), (21) для предельных случаев: малой (τ или $x\to0$; $\Theta_w\to1$) и большой (τ или x-велико: $\Theta_w\to\Theta_л$, так как $q_k\to0$ толщины пограничного слоя:

$$\lim\frac{\int_1^{\Theta_w}\frac{(\Theta_w-1)d\Theta_w}{(\Theta_л^4-\Theta_w^4)^2}}{\frac{(\Theta_w-1)^2}{2(\Theta_л^4-\Theta_w^4)^2}}=\begin{cases}1 & (\Theta_w\to1)\\ 0 & (\Theta_w\to\Theta_л),\end{cases} \qquad (24)$$

$$\lim\frac{\int_1^{\Theta_w}\frac{(\Theta_w-1)^4 d\Theta_w}{(\Theta_л^4-\Theta_w^4)^4}}{\frac{3}{5}\frac{(\Theta_w-1)^5}{(\Theta_л^4-\Theta_e^4)^4}}=\begin{cases}\frac{1}{3} & (\Theta_w\to1)\\ 0 & (\Theta_w\to\Theta_л)\end{cases} \qquad (25)$$

Соотношение (24) позволяет представить уравнение (19) в виде

$$\mathrm{Nu}_\tau=\sqrt{\frac{2}{3\mathrm{F}_0}}, \cdot \quad (\delta(\tau)=\sqrt{6a\tau})-\Theta\to 1\ (\tau\to 0) \qquad (19\ \text{а})$$

$$\text{и } \mathrm{Nu}_\tau=\frac{1}{\sqrt{3\mathrm{F}_0}},\ (\delta(\tau)=\sqrt{12a\tau})-\Theta_w\to\Theta_\text{л}\ (\tau\text{—велико}), \qquad (19\ \text{б})$$

т. е. уравнение (19), описывающее процесс нестационарной конвекции, совпадает в предельных случаях с точностью до 7% с уравнением нестационарной теплопроводности в полуограниченном теле с граничным условием (5). Тепловое излучение вызывает переход от теплообмена при граничном условии второго рода $(\mathrm{Bi}=\frac{1}{2\mathrm{ierfc}(0)}\mathrm{F}_0^{-\frac{1}{2}})$ к теплообмену с граничным условием первого рода $(\mathrm{Bi}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\mathrm{F}_0^{-\frac{1}{2}})$ [4].

Аналогично с учетом (25) представим (23) в виде:

$$\mathrm{Nu}_x=0{,}442(\mathrm{Gr}_x\cdot\mathrm{Pr})^{\frac{1}{4}} \quad \Theta_w\to 1(x\to 0) \qquad (22\ \text{а})$$

$$\text{и } \mathrm{Nu}_x=0{,}409(\mathrm{Gr}_x\cdot\mathrm{Pr})^{\frac{1}{4}} \quad \Theta_w\to\Theta_\text{л}(x\text{—велико}), \qquad (22\ \text{б})$$

таким образом, уравнение (22) описывает переход от теплообмена при граничном условии второго рода (22а) к теплообмену с граничным условием первого рода (22б), вызываемый наличием теплового излучения. Отличие предельных решений от точных значений не более 4% [2].

Решение уравнения (17), описывающего движение фронта тепловой волны (граница перехода от нестационарного решения к стационарному), можно найти лишь для предельных случаев, так как уравнения (18) и (21) не дают явных зависимостей $\Theta_w(\tau)$ или $\Theta_w(x)$:

$$x_\text{т}=\frac{0{,}105g\beta q_k\sqrt{a}}{\lambda\cdot\mathrm{Pr}}\cdot\tau^{\frac{5}{2}} \qquad \Theta_w\to 1 \qquad (17\ \text{а})$$

$$\text{и } x_\text{т}=\frac{0{,}257g\beta(T_w-T_\infty)}{\mathrm{Pr}}\cdot\tau^2 \qquad \Theta_w\to\Theta_\text{л}. \qquad (17\ \text{б})$$

Критериальный вид (17а) совпадает с экспериментальными данными [3] (фис. 2.).

В ы н у ж д е н н а я к о н в е к ц и я. Рассматривается нестационарное обтекание пластины ламинарным потоком непоглощающей жидкости с постоянными теплофизическими свойствами, возникающее при ступенчатом скачке скорости. Одновременно на поверхности пластины задается ступенчатый скачок теплового потока — q_w, который передается при взаимодействии лучистого теплообмена (к окружающей среде температуры T_e) и конвекции (к набегающему потоку с температурой T). Сжимаемость и вязкая диссипация не учитываются.

Математическая постановка данной задачи совпадает с предыдущей, за исключением соотношений (2), (8), которые принимают вид:

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad (2')$$

$$\tau>0,\ y=\delta_g,\ u=U_\infty, \frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{8'}$$

а также учитывается отличие в толщинах теплового и гидродинамического пограничных слоев.

Граничным условием (6), (8′) удовлетворяет полином

$$u=U_\infty \frac{y}{\delta_g}\left(2-\frac{y}{\delta_g}\right). \tag{26}$$

дающий после его подстановки в интегральное соотношение Кармана дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial\delta_g}{\partial\tau}+U_\infty \frac{2}{5}\frac{\partial\delta_g}{\partial x}=\frac{6\nu}{\delta_g}. \tag{27}$$

Характеристическая система данного уравнения [6]

$$d\tau=\frac{dx}{\frac{2}{5}U_\infty}=\frac{\delta_g d\delta_g}{6\nu} \tag{28}$$

позволяет получить нестационарное и стационарное решения, а также уравнение движения динамической волны соответственно:

$$\delta_g(\tau)=\sqrt{12\nu\tau},\ \delta_g(x)=\sqrt{\frac{30\nu x}{U_\infty}},\ x_{\text{н}}=04U_\infty\tau. \tag{29}$$

Производя интегрирование в уравнении теплового потока (13) от $y=0$ до $y=\delta_{\text{m}}$ с учетом (9) и (26), получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}q_k\delta_{\text{m}}^2+U_\infty\frac{\partial}{\partial x}q_k\delta_{\text{m}}^2 H(\Delta)=6aq_k, \tag{30}$$

где

$$H(\Delta)=\frac{\Delta}{2}-\frac{\Delta^2}{10} \qquad \text{при } \Delta=\frac{\delta_{\text{m}}}{\delta_g}<1,$$

$$H(\Delta)=1-\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{2\Delta^2}-\frac{1}{10\Delta^3} \quad \text{при } \Delta>1.$$

Уравнение (30) имеет четыре решения в зависимости от рассматриваемой зоны.

Стационарная зона I имеет место после прохождения тепловой и динамической волн — $\delta_g(x)$, $\delta_{\text{m}}(x)$,

$$U_\infty\frac{\partial}{\partial x}q_k\delta_{\text{m}}^2 H(\Delta)=6aq_k. \tag{30—I}$$

Уравнение (30—1) как и (16) описывает переход по длине пластины от теплообмена при граничном условии второго рода к теплообмену с граничным условием первого рода. В общем случае уравнение (30—1) можно решить только численно. Для построения его приближенного решения заменим отношение $\Delta=\frac{\delta_{\text{m}}}{\delta_g}$, равное $\Pr^{-\frac{1}{3}}$ при $T_w=\text{const}$ [5] и

$0{,}78\ \mathrm{Pr}^{-\frac{1}{3}}$ при $q_k=\mathrm{const}$, (решение (30—1) для $q=\mathrm{const}$, средним значением $-\Delta=0{,}89\ \mathrm{Pr}^{-\frac{1}{3}}$ и с учетом (10) приведем (30—1) к виду, аналогичному (16):

$$\frac{2(\Theta_w-1)d\Theta_w}{(\Theta_л^4-\Theta_w^4)^2}+\frac{(\Theta_w-1)^2 d\Theta_w^4}{(\Theta_л^4-\Theta_w^4)^3}=\left(\frac{\sigma\varepsilon T_\infty^3}{2\lambda}\right)^2\frac{6adx}{U_\infty H(0{,}89\mathrm{Pr}^{-\frac{1}{3}})}. \quad (31)$$

Интегрируя полученное уравнение при граничном условии $\Theta_w(x=0)=1$, получим соотношения для расчета изменения температуры и конвективной теплоотдачи по длине пластины:

$$\frac{1}{2}\,\frac{(\Theta_w-1)^2}{(\Theta_л^4-\Theta_w^4)^2}+F(\Theta_л;\ \Theta_w)-F(\Theta_л;\ 1)=\left(\frac{\sigma\varepsilon T_w^3}{2\lambda}\right)^2\frac{6ax}{U_\infty H(0{,}89\mathrm{Pr}^{-\frac{1}{3}})}, \quad (32)$$

$$\mathrm{Nu}_x=\frac{q_k x}{\lambda(T_w-T_\infty)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{3}{H(0{,}89\mathrm{Pr}^{-\frac{1}{3}})\mathrm{Re}_x\mathrm{Pr}}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\lambda}{\sigma\varepsilon T_\infty^3 x}\right)^2[F(\Theta_л;\ \Theta_w)-F(\Theta_л;\ 1)]}}, \quad (33)$$

Предельные решения (33) на 5% отличаются от точных значений [2]:

$$\mathrm{Nu}_x=\sqrt{H(0{,}89\,\mathrm{Pr}^{-\frac{1}{3}})\frac{2}{3}\mathrm{Re}_x\cdot\mathrm{Pr}},\ \mathrm{Nu}_x=0{,}43\,\mathrm{Re}_x^{\frac{1}{2}}\,(\mathrm{Pr}=0{,}7), \quad (33\,а)$$

$$\mathrm{Nu}_x=\sqrt{H(0{,}89\mathrm{Pr}^{-\frac{1}{3}})\frac{1}{3}\mathrm{Re}_x\mathrm{Pr}},\ \mathrm{Nu}_x=0{,}304\mathrm{Re}_x^{\frac{1}{2}}\,(\mathrm{Pr}=0{,}7). \quad (33\,б)$$

Нестационарная зона II находится перед фронтами тепловой и динамической волн — $\delta_g(\tau)$, $\delta_m(\tau)$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}q_k\delta_m^2=6aq_k. \quad (30—II)$$

Уравнение (30—II) совпадает с уравнением (15) и имеет решения (18), (19).

Используя полученные решения, можно определить распространение фронта тепловой волны при совпадении его с фронтом динамической волны для предельных случаев из равенства $\delta_m(\tau)=\delta_m(x_т)$: вблизи передней кромки пластины при малых τ (граничное условие второго рода) — $x_T=0{,}33U_\infty\ \mathrm{Pr}^{-\frac{1}{3}}$, для больших x и τ (граничное условие первого рода) — $x_т=0{,}4U_\infty\mathrm{Pr}^{-\frac{1}{3}}$.

Таким образом, скорость распространения тепловой волны растет по мере ее движения от $0{,}33\ \mathrm{Pr}^{-\frac{1}{3}}$ до $0{,}4\ \mathrm{Pr}^{-\frac{1}{3}}$, т. е. при $\mathrm{Pr}>1$—$x_T<x_н$ при $\mathrm{Pr}<0{,}56$—$x_т>x_н$ и при $1>\mathrm{Pr}>0{,}56$,— тепловая волна постепенно догоняет и обгоняет динамическую.

Решение для переходной зоны III, находящейся между динамической и следующей за ней тепловой волнами ($\Delta<1$), можно найти лишь в предельных случаях: $q_k=\text{const}$, или $T_w=\text{const}$. Пренебрегая с целью упрощения членом $\frac{\Delta^2}{10}$ и вводя новую переменную $\xi=U_\infty\tau/x$ с учетом

$\delta_g(x)=\sqrt{\frac{30\nu x}{U_\infty}}$, получим дифференциальные уравнения

$$\Delta\cdot\Delta^1\xi\left(2-\frac{3}{2}\Delta\xi\right)=\frac{1}{5\text{Pr}} \qquad q_k=\text{const}, \tag{34 а}$$

$$\Delta\cdot\Delta^1\xi(1-\Delta\cdot\xi)=\frac{1}{5\text{Pr}} \qquad T_w=\text{const}, \tag{34 б}$$

которые имеют решения

$$\xi=10\text{Pr}\exp(-2{,}5\Delta^3\text{Pr})\int_0^\Delta\exp(2{,}5\Delta^3\text{Pr})\Delta d\Delta,\quad q_k=\text{const} \tag{35 а}$$

$$\xi=5\text{Pr}\exp(-1{,}67\Delta^3\text{Pr})\int_0^\Delta\exp(1{,}67^3\text{Pr})\Delta d\Delta,\quad T_w=\text{const}. \tag{35 б}$$

Для вычислений при малых Δ можно использовать разложение (35) в ряд Маклорена.

Решение для зоны IV, находящейся между тепловой и следующей за ней динамической волнами $\Delta>1$, определим из характеристической системы уравнения (30), которая имеет вид (так как $\delta_g=\sqrt{12a\tau}$):

$$\frac{d\tau}{\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{(\Theta_w-1)^2}{(\Theta_л^4-\Theta_w^4)}\right]d\tau}=\frac{dx}{U_\infty\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\Theta_w-1)^2}{(\Theta_л^4-\Theta_w^4)}H(\Delta)\right]dx}=$$
$$=\left(\frac{2\lambda}{\sigma\varepsilon T_\infty^3}\right)^2\frac{1}{6a(\Theta_л^4-\Theta_w^4).} \tag{36}$$

Пренебрегая с целью упрощения в H (Δ) членом $\frac{1}{10\Delta^3}$, запишем дифференциальное уравнение для зоны IV:

$$\frac{2(\Theta_w-1)\,d\Theta_w}{(\Theta_л^4-\Theta_w^4)^2}+\frac{(\Theta_w-1)d\Theta_w^4}{(\Theta_л^4-\Theta_w^4)^3}-\delta_g\frac{\sigma\varepsilon T_\infty^3}{2\lambda}\,\frac{d\Theta_w}{\Theta_л^4-\Theta_w^4}-$$
$$-\frac{\delta_q^2}{2}\left(\frac{\sigma\varepsilon T_\infty^3}{2\lambda}\right)^2\frac{d\Theta_w^4}{\Theta_л^4-\Theta_w^4}=\frac{6a}{U_\infty}\left(\frac{\sigma\varepsilon T_\infty^3}{2\lambda}\right)^2dx, \tag{37}$$

которое после интегрирования при граничном условии в точке обгона $\Theta_w=(x=x_т=x_н)=\Theta_0$ дает трансцендентное уравнение для расчета температуры поверхности пластины:

$$\frac{1}{2}\,\frac{(\Theta_w-1)^2}{(\Theta_л^4-\Theta_w^4)^2}+F(\Theta_л;\,\Theta_w)-F(\Theta_л;\,\Theta_0)-\frac{\sigma\varepsilon T_\infty^3}{2\lambda}\,\frac{\delta_g}{4\Theta_4^3}\left[\ln\left|\frac{\Theta_л+\Theta_w}{\Theta_л-\Theta_w}\right|-\right.$$
$$\left.-\ln\left|\frac{\Theta_л+\Theta_0}{\Theta_л-\Theta_0}\right|+2\text{arctg}\frac{\Theta_w}{\Theta_л}-2\text{arctg}\frac{\Theta_0}{\Theta_л}\right]+$$
$$+\frac{\delta_q^2}{2}\left(\frac{\sigma\varepsilon T_\infty^3}{2\lambda}\right)^2[\ln|\Theta_л^4-\Theta_w^4|-\ln|\Theta_л^4-\Theta_0^4=\frac{6ax}{U_\infty}\left(\frac{\sigma\varepsilon T_\infty^3}{2\lambda}\right)^2. \tag{38}$$

В заключение отметим, что решения для переходных зон (35) и (38) около фронта первой волны переходят в нестационарные (18), (19), а вблизи фронта отстающей волны—в стационарные (32), (33), [1].

ОБОЗНАЧЕНИЯ

T_w, T_e, T_∞ — абсолютные температуры стенки, окружающей среды и омывающей жидкости соответственно: $\Theta_w=\frac{T_w}{T_\infty}$ —безразмерная температура стенки; $\Theta_л=\sqrt[4]{\frac{q_w+\sigma\varepsilon T_c^4}{\sigma\varepsilon T_\infty^4}}$ — безразмерная температура стенки в случае теплообмена только излучением; δ, $\delta_т$, δ_w — толщина пограничного слоя тоже гидродинамического и теплового; q_w, q_k — тепловые потоки —на стенке и конвективный соответственно; $x_т$, $x_н$ — координаты фронта тепловой и динамической волн; $\beta=\frac{1}{T_\infty}$—коэффициент теплового расширения;

$\mathrm{Gr}_x=\frac{g\beta(T_w-T_\infty)x^3}{\nu_2}$ критерий Грасгофа; σ — постоянная Стефана-Больцмана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Л. Розеншток. Сб. Тепло- и массоперенос, 1. Конвективный теплообмен в однородной среде. «Наука и техника», Минск, 1965, стр. 277.
2. Р. Д. Сесс. Сб. Проблемы теплообмена. «Атомиздат», М., 1967, стр. 7.
3. Г. Гебхарт. Теплопередача 89, серия С., № 3, 1967.
4. А. В. Лыков. Теория теплопроводности. «Высшая школа», М., 1967.
5. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. ИЛ., 1956.
6. Э. Камке. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого ряда. «Наука», М., 1966.