

МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.И.Рубан

В работе предложен метод расчета оптимальных уравнений для нелинейных динамических объектов:

$$\dot{x} = f(x, t) + \varphi(x, t, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

когда $u(t)$ принадлежит заданной замкнутой области U и удовлетворяет критерию

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (Q(x, t) + \psi(t, u)) dt = \min_{u(t) \in U}. \quad (2)$$

Здесь $x(t)$ и $u(t)$ соответственно n и m - мерные вектор-столбцы фазовых координат и управляющих воздействий; $Q(x, t)$ характеризует качество процесса управления; $\psi(t, u)$ - потери, вызванные работой сигналов управления.

Пусть положительно определенная функция $V(x, t)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению (ДУ) в частных производных

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} f(x, t) = -Q(x, t), \quad V(x(t_1), t_1) = 0. \quad (3)$$

Тогда необходимым и достаточным условием минимума функционала (2) является

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \varphi(x, t, u) + \psi(t, u) = \min_{u(t) \in U}. \quad (4)$$

Так, если, $\varphi(x, t, u) = B(x, t)u(t)$, $\psi(t, u) = \frac{1}{2}u^T D^{-1}u$, где $D^{-1}(t)$ - матрица, обратная диагональной матрице положительных коэффициентов $D(t)$, T - операция транспонирования и на $u(t)$ наложены ограничения типа $|u(t)| \leq H(t)$, то из (4) следует, что

$$u_2(t) = \begin{cases} -D(t)B^T\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T & \text{при } |DB^T\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T| \leq H, \\ -H \operatorname{sign} B^T\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T & \text{при } |DB^T\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T| \geq H; \end{cases} \quad (5)$$

$\text{sign } \tilde{x} = 1$, если $\tilde{x} > 0$, $\text{sign } \tilde{x} = -1$, если $\tilde{x} < 0$.

Для случая, когда $f(x, t) = A(t)x(t)$, $Q = \frac{1}{2} x^T(t) C(t)x(t)$, где $C(t)$ — диагональная матрица положительных коэффициентов, положительно определенную функцию $[1] V(x, t)$ следует искать в виде $V = x^T \Gamma x$. В соответствии с уравнением (3) матрица $\Gamma(t)$ является решением линейного ДУ

$$\dot{\Gamma} = -(\Gamma + \Gamma^T)A - C, \quad \Gamma(t_1) = 0. \quad (6)$$

Приведенные результаты можно использовать и как эффективный метод синтеза регуляторов при наличии ограничений на управления на основе использования критерия

$$J + V(x(t_1), t_1) = \min_{u(t) \in U} \quad (7)$$

Рассмотрим пример: синтез регулятора температурного режима реактора идеального смешения, в котором идет реакция типа $A+B \rightleftharpoons C+D$

Обозначения: $x_1(t), x_2(t)$ — соответственно концентрации веществ A и B на выходе реактора, $x_{10}(t), x_{20}(t)$ — на входе; $v_0(t)$ — скорость входного потока; $\theta(t)$ — объем зоны реакции. Тогда уравнения реактора приобретают вид

$$\dot{x}_l(t) = -K(t)x_1(t)x_2(t) + (x_{l0}(t) - x_l(t)) \frac{v_0(t)}{\theta(t)}, \quad l=1,2, \quad K(t) = K_0 \exp\left\{-\frac{E}{RT(t)}\right\}, \quad (8)$$

где температура имеет пороговые ограничения $b_1 \leq T(t) \leq b_2$. (9)

Искомым управляющим воздействием считаем

$$u(t) = K(t) - \frac{(x_{10} - x_{20}) \cdot v_0}{2x_1 x_2 \theta}, \quad (10)$$

причем $h_1(t) \leq u(t) \leq h_2(t)$, $h_i = K_0 \exp\left\{-\frac{E}{RT_i}\right\} - \frac{(x_{10} - x_{20})v_0}{2x_1 x_2 \theta}$, $i=1,2$. (11)

В случае необходимости всегда можно перейти от $u(t)$ к температуре $T(t)$. Тогда в соответствии с (5) алгоритм работы регулятора приобретает вид

$$u_2(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & \text{при } h_1(t) \leq \tilde{x}(t) \leq h_2(t), \\ h_1(t) & \text{при } \tilde{x}(t) \leq h_1(t), \\ h_2(t) & \text{при } \tilde{x}(t) \geq h_2(t), \end{cases} \quad (12)$$

$\tilde{x}(t) = 4d(t)\gamma(t)(x_1(t) + x_2(t))$, $\dot{\gamma}(t) = 2\gamma(t)v_0(t)\theta^{-1}(t) - C(t)$ и $u_2(t)$ обеспечивает минимум функционала

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [(x_1 + x_2)^2 C + u^2 d^{-1}] dt + V(x_1(t_1) + x_2(t_1), t_1), \quad V(x, t) = x^2 \gamma.$$

Л и т е р а т у р а

1. А.А.Красовский. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, № 3, 164-175, (1970).