

УСЛОВИЯ ПРИМЕНЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ ПРОЧНОСТИ

Л. М. СЕДОКОВ

(Представлена научным семинаром кафедры сопротивления материалов)

В основе деления теорий прочности на классические и новые [1—3] лежит не только история их разработки. Все классические теории прочности предполагают весьма существенную, самую максимальную идеализацию механических свойств материалов. Несмотря на это, в ряде случаев расчет по классическим теориям прочности, в том числе по теории наибольших нормальных напряжений, которая игнорирует существование двух других главных напряжений и полностью снимает проблему разработки теорий прочности, оказывается весьма близок к фактическим значениям прочности [1]. Поэтому необходимо установить те условия, при которых применение классических теорий прочности не приводит к существенным ошибкам.

На рис. 1 приведены диаграммы линейного растяжения и линейного сжатия реального материала в общем виде. Там же пунктиром показана идеализация механических свойств этого материала, заложенная в основу расчетов по классическим теориям прочности. Если материал в ходе пластической деформации, предшествующей разрушению, упрочняется, то критерий прочности распадается на два: а) условие возникновения пластической деформации и б) критерий разрушения. В первом случае константой материала служит предел текучести $\sigma_{тр}$, а во втором — предел прочности σ_p . В последнем случае предполагается справедливость закона Гука до разрушающего напряжения σ_p .

В основе всех классических теорий прочности лежит также предположение о равенстве сопротивления материалов растяжению и сжатию:

$$\sigma_c = \sigma_p; \quad \sigma_{mc} = \sigma_{mp}.$$

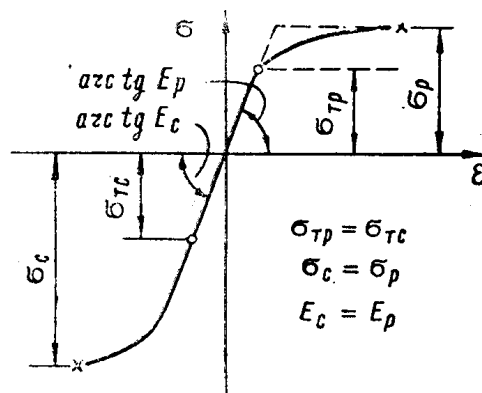


Рис. 1. Физические и идеализированные диаграммы растяжения и сжатия реальных хрупких и пластичных материалов

Расхождение между теоретической и фактической прочностью объясняется прежде всего тем, что поведение реальных материалов под нагрузкой существенно отличается от указанной идеализации. Но область применения классических теорий прочности значительно шире, чем это можно было предполагать, сопоставляя идеальные и фактические свойства материалов и по кратким рекомендациям в учебниках и монографиях.

На рис. 2 показано сопоставление четырех классических теорий прочности для двухосного напряженного состояния в безразмерных ко-

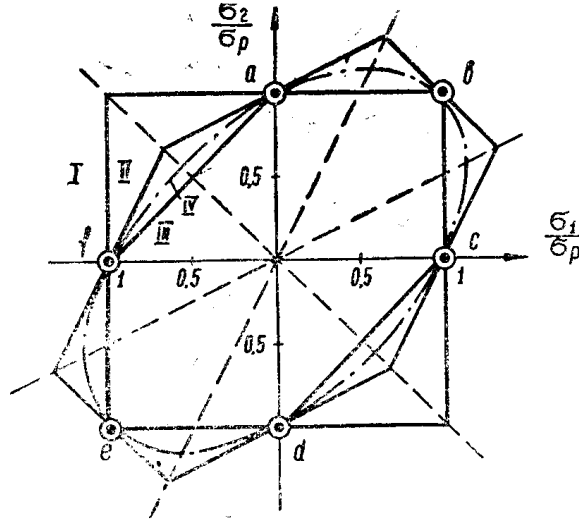


Рис. 2. Контуры предельной прочности по четырем классическим теориям прочности для плоского напряженного состояния в безразмерных координатах.

ординатах. Для сохранения индексов осей координат пришлось отказаться от широко используемого условия

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

Аналитическую запись границ прочности по четырем классическим теориям прочности можно сделать в следующем виде:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{I}} = |\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3|_{\text{max}} = \sigma_p,$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{II}} = |\sigma_1 - \sigma_0; \sigma_2 - \sigma_0; \sigma_3 - \sigma_0|_{\text{max}} = \frac{2}{3} \sigma_p,$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = |\sigma_1 - \sigma_2; \sigma_2 - \sigma_3; \sigma_3 - \sigma_1|_{\text{max}} = \sigma_p,$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1)^{1/2} = \sigma_p.$$

Границы прочности по первым трем теориям являются сингулярными. Критерий прочности по второй теории прочности записан по условию постоянства наибольшего компонента девиатора напряжений [2]. Это условие полностью совпадает с теорией наибольших удлинений, если коэффициент поперечной деформации имеет предельное значение ($\mu = 0,5$) [1], а также с условием равенства тех частей наибольших удлинений, которая идет на изменение формы [3]:

$$2\sigma_{\text{экв}}^{\text{II}} = |2\sigma_k - \sigma_l - \sigma_m|_{\text{max}} = 2\sigma_p.$$

Здесь $k, l, m = 1, 2, 3$ и $k \neq l; l \neq m$.

Четыре контура прочности по классическим теориям прочности, представленные на рис. 2, имеют шесть общих точек a, b, c, d, e и f .

Поэтому при двухосном напряженном состоянии, когда одно из главных напряжений численно много меньше другого (точки a, c, d, f) или когда они численно близки друг к другу, но имеют разные знаки (точки b и e), расчёты по всем классическим теориям прочности, в том числе и по первой, дают примерно одинаковое значение эквивалентного напряжения и выбор какой-то определенной теории прочности для указанных классов напряженных состояний теряет практически смысл.

Наибольшее расхождение классической теории прочности дают при численном равенстве главных напряжений, имеющих разные знаки (сдвиг) и при одинаковых знаках, когда численное значение одного напряжения в два раза меньше другого (см. пунктирные линии на рис. 2).

Соотношение между эквивалентными напряжениями, рассчитанными по классическим теориям прочности, удобно представить графически, как это сделано на рис. 3, а, где построены круги напряжений для трехосного растяжения, их верхние половины. На диаметре большого круга напряжений строится равносторонний треугольник ABC . Из точки D , соответствующей среднему главному напряжению, проводится прямая в вершину C . Из точки D также опускается перпендикуляр DE на сторону AC . Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{I}} &= \overline{OB}, \\ \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{II}} &= \overline{EC}, \\ \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} &= \overline{AC}, \\ \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} &= \overline{DC}.\end{aligned}$$

Отрезки $\overline{OB}$ и $\overline{AC}$ соответствуют указанным теориям прочности по построению. Доказательство того, что $\overline{DC} = \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}}$ приведено А. М. Розенберг и Г. С. Смирновым-Аляевым [4]. Остается доказать $\overline{EC} = \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{II}}$. Из точки H (рис. 3, б) опустим перпендикуляр на AC . Тогда

$$CE = CK + EK.$$

$$\text{Но } CK = CH \cdot \cos 30^\circ, \text{ а } CH = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_1 - \sigma_3).$$

Следовательно,

$$CK = \frac{3}{4} (\sigma_1 - \sigma_3).$$

Из чертежа на рис. 3, б видно, что

$$EK = HD \sin 30^\circ = \frac{-2\sigma_2 + \sigma_1 + \sigma_3}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$CE = \frac{3}{4} \sigma_1 - \frac{3}{4} \sigma_3 - \frac{\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1}{4} + \frac{\sigma_3}{4},$$

$$CE = \sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{II}},$$

что и требовалось доказать.

Для случая, когда точка D , соответствующая среднему главному напряжению, ближе к точке B (рис. 3, в), аналогично легко доказать

$$CF = \left| \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right| = \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{II}}.$$

Графическое определение эквивалентных напряжений, показанное на рис. 3, дает возможность наглядно сопоставить эквивалентные напряжения между собой и сделать три вывода:

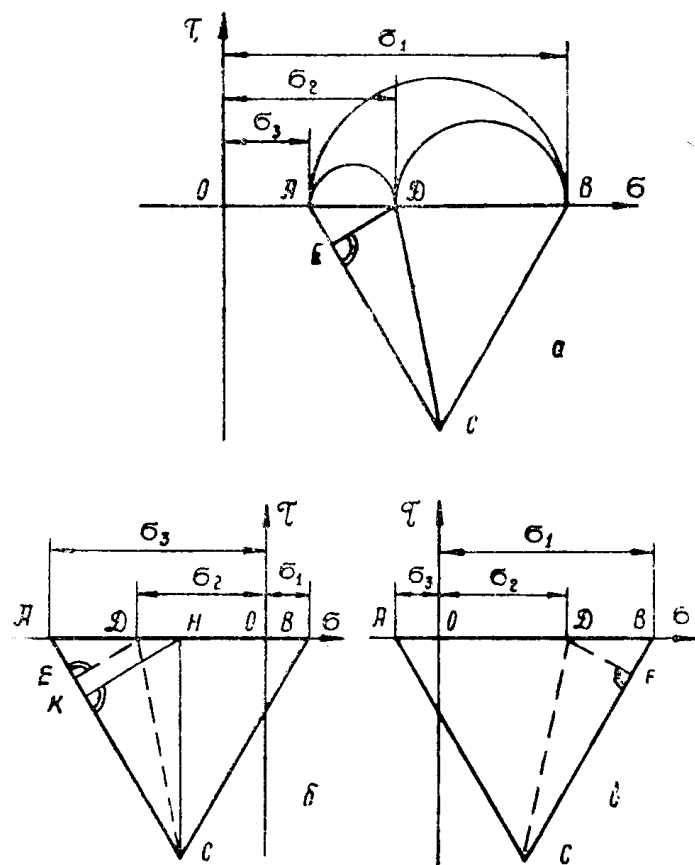


Рис. 3. Графическое определение проведенных напряжений по классическим теориям прочности

1. Если среднее главное напряжение σ_2 по знаку и величине близко к σ_1 или к σ_3 , то значения эквивалентных напряжений, рассчитанные по второй, третьей и четвертой теориям прочности, будут близки друг к другу $AC \approx DC \approx EC$.

2. Если среднее главное напряжение будет близко к полуразности двух других главных напряжений

$$\sigma_2 \approx \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

то значения эквивалентных напряжений, подсчитанные по второй, третьей и четвертой теориям прочности, будут иметь наибольшее расхождение

$$AC : HC : CE = 1 : \frac{1}{\sqrt{3}} : \frac{2}{3}.$$

3. При трехосном растяжении и трехосном сжатии расчетное значение эквивалентных напряжений по теории наибольших нормальных напряжений существенно отличается от соответствующих значений по другим классическим теориям прочности и противоречит фактическим результатам.

Поведение реальных материалов под нагрузкой существенно отличается от той идеализации, которая предполагается при исполь-

зовании классических теорий прочности (рис. 1). Именно это отличие приводит к подтверждению в опытах то одной, то другой из трех теорий.

На рис. 4, а показано схематически несколько фактических границ прочности ряда хрупких материалов при плоском напряженном состоянии, когда одно из главных напряжений сжимающее, а другое — растягивающее

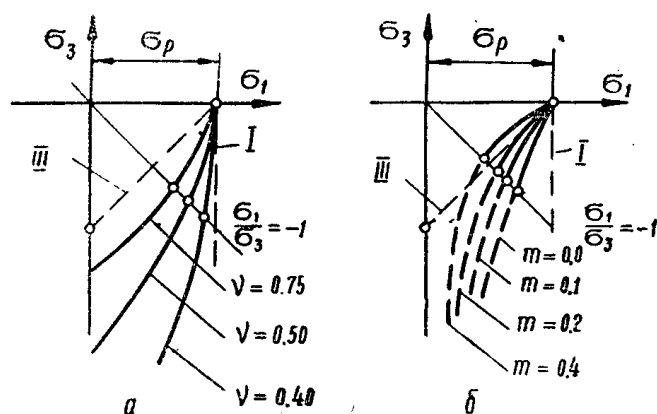


Рис. 4. Граница прочности хрупких (а) и пластичных (б) материалов при плоском напряженном состоянии, когда одно из главных напряжений сжимающее, а другое — растягивающее

нии, когда главные напряжения имеют разные знаки. Если соотношение между прочностью на растяжение σ_p и сжатие σ_c

$$\nu = \frac{\sigma_p}{|\sigma_c|}$$

будет уменьшаться от 1 до 0, то при сопоставлении фактической и расчетной величины сопротивления сдвигу можно подтвердить и теорию наибольших удлинений ($\nu \rightarrow 1$) и теорию наибольших нормальных напряжений ($\nu \rightarrow 0$).

На рис. 4, б схематично показаны прочности для упрочняющихся материалов на основе анализа экспериментальных результатов [1]. Упрочнение материала можно характеризовать отношением пределов прочности и текучести, относительным равномерным сужением или показателем при степенной аппроксимации кривой растяжения m .

Сопоставление фактической и расчетной величины сопротивления сдвигу упрочняющихся материалов может подтвердить и теорию наибольших удлинений ($m \rightarrow 0$), и теорию октаэдрических напряжений ($m \approx 0,15$), и теорию максимальных касательных напряжений ($m \approx 0,3$).

Рассматривая рис. 5, где фактические значения соотношений $\tau_{сд}/\sigma_p$ поставлены в зависимость от коэффициента ν и показателя m , можно

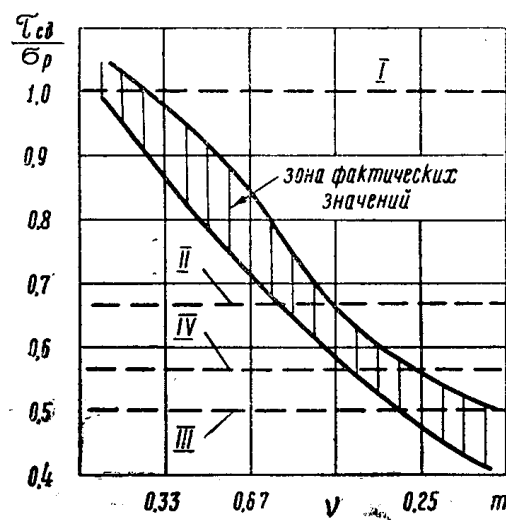


Рис. 5. Сопоставление фактических и расчетных по классическим теориям прочности соотношений между прочностью на сдвиг и прочностью на растяжение

высказать следующие рекомендации по применению классических теорий прочности для напряженных состояний, близких к сдвигу:

1. Теорию наибольших нормальных напряжений следует применять только для очень хрупких материалов ($\nu < 0,3$).

2. Теорию наибольших удлинений при $\mu = 0,5$ можно применять и для хрупких материалов, если $\nu \rightarrow 1$ и для пластичных, если $m \rightarrow 0$.

3. Расчет по теории эктаэдрических напряжений дает удовлетворительное совпадение с опытными данными для слабоупрочняющихся материалов ($m \approx 0,15$).

4. Теория наибольших касательных напряжений применима для материалов, которые в ходе пластической деформации, предшествующей разрушению, существенно упрочняются ($m \approx 0,3$).

Возвращаясь к рис. 2, можно высказать дополнительные рекомендации по плоскому состоянию.

Все классические теории ориентировочно можно применять и для хрупких материалов, если

а) соотношение главных напряжений близко к точкам a, b, c и характеристикой прочности материала принято сопротивление линейному растяжению.

б) соотношение главных напряжений близко к точкам d, e, f и характеристикой прочности материала принят предел прочности его при линейном сжатии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Седоков. Пределы применения основных теорий прочности для хрупких материалов при плоском напряженном состоянии. «Вестник машиностроения», 1969, № 10.

2. Л. М. Седоков. Сопротивление материалов большим пластическим деформациям. Томск, изд-во ТГУ, 1966.

3. А. Ю. Ишлинский. Гипотеза прочности формоизменения. Ученые записки МГУ, «Механика», 46, М., 1940.

4. Г. А. Смирнов-Аляев, В. М. Розенберг. Теория пластических деформаций металлов. Машгиз, 1956.
