

УДК 51-72:530.145

**О СТРУКТУРЕ КОНФОРМНО ИНВАРИАНТНЫХ МОДЕЛЕЙ В ОДНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

А.В. Галажинский, О. Лехтенфельд\*, К.В. Половников

Томский политехнический университет

\*Ганноверский университет, г. Ганновер, Германия

E-mail: galajin@mph.phtd.tpu.edu.ru, lechtenf@itp.uni-hannover.de,

kir@mph.phtd.tpu.edu.ru

*Изучается общая структура конформно инвариантной квантовой механики в одномерном пространстве. Исследуется поведение системы относительно унитарных преобразований, генерируемых конформной алгеброй. Строится унитарное преобразование, посредством которого любая конформно инвариантная квантовая механика в одном измерении может быть преобразована в свободную систему, с нелокально реализованной полной конформной симметрией.*

В последнее время наблюдается всплеск интереса к конформно инвариантным моделям в одномерном пространстве. С одной стороны этот интерес обусловлен исследованием различных аспектов  $AdS/CFT$  соответствия. Несмотря на значительный прогресс в понимании  $AdS/CFT$  дуальности [1], содержательные примеры  $AdS_2/CFT_1$  соответствия практически неизвестны. В этом контексте изучение конформно инвариантных моделей в одном измерении и установление взаимосвязи с теориями поля в двумерном пространстве анти де Ситтера представляет значительный интерес.

С другой стороны конформная группа определяет изометрии метрики пространства анти де Ситтера и модели частиц на таком фоне автоматически являются конформно инвариантными. Поскольку геометрия анти де Ситтера описывает область вблизи горизонта событий целого класса экстремальных черных дыр (см., например, обзор [2]), в работах [3, 4] было высказано предположение о том, что конформная механика может обеспечить определенную информацию о квантовых свойствах черных дыр. Данная идея интенсивно развивалась в ряде работ [5–10], где, в частности, была построена и исследована конформная квантовая механика на пространстве модулей системы статических черных дыр в четырехмерном и пятимерном пространствах. В этом контексте также привлекательно выглядит гипотеза Гиббонса и Таунсенда [4], согласно которой  $N=4$  суперконформное расширение одномерной модели Калоджеро [11] в пределе большого числа частиц способно обеспечить микроскопическое описание экстремальной черной дыры Райсснера-Нордстрема вблизи горизонта событий. Построение лагранжиановой или гамильтоновой формулировки для  $N=4$  суперконформной модели Калоджеро представляет собой открытую проблему [12–15].

Отдельное направление исследований посвящено изучению одномерных (конформно инвариантных) моделей в контексте теории интегрируемых систем и точно решаемых моделей квантовой механики (см. классические обзоры [16, 17]). Наиболее при-

стальное внимание привлекли различные модификации модели Калоджеро и их разнообразные физические применения (см. монографию [18] и цитируемую там литературу). Подробное обсуждение одномерных систем в контексте современной теории калибровочных полей приведено в работе [19].

Целью настоящей работы является изучение общей структуры конформно инвариантной квантовой механики в одномерном пространстве. В частности, исследовано поведение конформной системы общего вида относительно унитарных преобразований, генерируемых конформной алгеброй. Построено унитарное преобразование, посредством которого любая конформно инвариантная квантовая механика в одном измерении может быть преобразована в свободную систему, с нелокально реализованной полной конформной симметрией. В практических вычислениях использование такого преобразования позволяет существенно упростить анализ спектра и построение волновых функций, а также предлагает принципиально новый метод построения суперсимметричных расширений.

Рассмотрим квантовую механику  $n$  частиц в одномерном пространстве, определяемую оператором Гамильтона общего вида<sup>1</sup>

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2m_i} p_i p_i + U(x^1, \dots, x^n),$$

где  $m_i$  – масса и  $p_i$  – оператор импульса  $i$ -ой частицы,  $U$  – потенциал взаимодействия исходной конформной квантовой механики.

Класс конформно инвариантных моделей выделяется наложением коммутационных соотношений алгебры Ли  $so(1, 2)$

$$[H, D] = iH, [H, K] = 2iD, [D, K] = iK, \quad (1)$$

где  $D$  и  $K$  – генераторы дилатаций и специальных конформных преобразований в стандартной реализации [20]:

$$D = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (x^i p_i + p_i x^i), \quad K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i x^i x^i. \quad (2)$$

<sup>1</sup> В данной работе используется естественная система единиц ( $\hbar=1$ ) и стандартное координатное представление  $p_i = -i \frac{\partial}{\partial x^i}$ .

Первое равенство в (1) подразумевает ограничение на вид потенциала взаимодействия

$$[U, D] = iU \Rightarrow \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i} U + 2U = 0,$$

которое в дальнейшем мы предполагаем выполненным.

Простейшим примером конформно инвариантной модели в одном измерении является система  $n$  невзаимодействующих частиц. Соответствующий гамильтониан обозначим символом  $H_0$ .

Рассмотрим унитарное преобразование наблюдаемых

$$O \rightarrow O' = e^{iG} O e^{-iG},$$

где в качестве оператора  $G$  выберем произвольный элемент конформной алгебры

$$G = \alpha H + \beta K + \gamma D,$$

$\alpha, \beta, \gamma$  – произвольные вещественные постоянные.

Используя формулу Бейкера-Хаусдорфа

$$e^{iG} O e^{-iG} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{n!} O_n, \quad O_0 = O,$$

$$O_n = [G, [G, \dots [G, O] \dots]] \quad (n \text{ раз}),$$

находим, что операторы  $H', D', K'$  являются линейными комбинациями исходных  $H, D, K$ , при этом соответствующие коэффициенты представимы в виде бесконечных рядов по  $\alpha, \beta$ , и  $\gamma$ .

Наложение условия

$$\gamma^2 = 4\alpha\beta,$$

позволяет оборвать ряды на конечном (третьем) шаге и приводит к значительному упрощению

$$H' = (1 + \gamma + \alpha\beta)H + \beta(2 + \gamma)D + \beta^2 K,$$

$$D' = -\alpha \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)H + \left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right)D + \beta \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)K,$$

$$K' = \alpha^2 H + \alpha(\gamma - 2) + \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)^2 K. \quad (3)$$

В частности, выбирая коэффициенты в следующем виде:

$$\alpha\beta = 1 \Rightarrow \gamma = -2,$$

отображаем исходный гамильтониан в генератор специальных конформных преобразований  $K$ .

Как уже отмечалось ранее, гамильтониан системы невзаимодействующих частиц  $H_0 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2m_i} p_i p_i$  и операторы (2) реализуют представление конформной алгебры (1). Для данного представления можно рассмотреть оператор

$$G_0 = \lambda H_0 + \sigma K + \delta D,$$

где  $\lambda, \sigma, \delta$  – произвольные вещественные постоянные, и построить преобразование, аналогичное (3). В частности, следующий выбор коэффициентов:

$$\lambda\sigma = -1, \quad \delta = 2,$$

позволяет отобразить оператор  $K$  в гамильтониан  $H_0$  свободной системы.

Применим суперпозицию указанных преобразований к операторам  $H, D, K$  и наложим дополнительное условие на коэффициенты

$$\beta\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\alpha.$$

В итоге имеем унитарное преобразование

$$H \rightarrow H_0, \quad D \rightarrow D, \quad K \rightarrow K + \alpha^2 e^{iG_0} U e^{iG_0}. \quad (4)$$

Таким образом, предъявлено унитарное преобразование, посредством которого любая конформно инвариантная одномерная квантовая механика может быть преобразована в свободную систему. Отметим, что специальные конформные преобразования реализованы в ней нестандартным и, в частности, нелокальным образом.

Полезно подчеркнуть, что стационарные состояния  $\psi$  конформного гамильтониана  $H$  могут быть построены в терминах оператора обратного преобразования  $V^{-1}$  и стационарных состояний свободной системы  $\psi_0$  (см., например, работы [21–23], где в этом контексте обсуждается модель Калоджеро)

$$\psi = V^{-1} \psi_0.$$

Покажем, что построенное преобразование не зависит от выбора размерного параметра  $\alpha$ , который не фиксируется изложенным выше формализмом. Принимая во внимание явный вид операторов  $G$  и  $G_0$

$$G = \alpha H + \frac{1}{\alpha} K - 2D, \quad G_0 = -\alpha H_0 - \frac{1}{\alpha} K + 2D,$$

и коммутационные соотношения (1), которые выполнены как для  $H$ , так и для  $H_0$ , находим

$$\frac{d e^{iG_0}}{d\alpha} = -\frac{2i}{\alpha} e^{iG_0} \left(D - \frac{1}{\alpha} K\right), \quad \frac{d e^{iG}}{d\alpha} = \frac{2i}{\alpha} \left(D - \frac{1}{\alpha} K\right) e^{iG},$$

откуда следует желаемый результат

$$\frac{d}{d\alpha} (e^{iG_0} e^{iG}) = 0.$$

Наиболее интересным физическим примером, иллюстрирующим общие рассуждения, приведенные выше, является модель Калоджеро [11], описывающая парные взаимодействие  $n$  тождественных частиц, расположенных на вещественной прямой

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i < j} \frac{g}{(x_i - x_j)^2}, \quad (5)$$

где  $g$  – константа связи. Детальный квантово-механический анализ процессов рассеяния для модели (5) был проделан в работе [24]. В частности, было установлено, что процесс рассеяния  $n$  частиц с асимптотическими импульсами  $(k_1, \dots, k_n)$  приводит только к перестановке возможных  $k_i$  без изменения их значений (отметим, что гамильтониан (5) инвариантен относительно группы перестановок тождественных частиц). Асимптотические волновые функции системы до и после рассеяния отличается только на фазовый множитель. Иными словами, рассеяние в системе (5) выглядит так же, как и рассеяние в системе  $n$  невзаимодействующих частиц (в этом контексте см. также монографию [18]).

В заключение отметим, что предложенное преобразование может быть использовано для построения суперсимметричных обобщений исходной конформной механики. Для этого достаточно построить суперсимметричное расширение свободной системы, возникающей в результате преобразования (4), и применить к нему обратное преобразование. Мы надеемся, что данный метод окажется

эффективным при построении  $N=4$  суперконформного расширения модели Калоджеро.

*Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (гранты МД-8970.2006.2, НШ-4489.2006.2), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 06-02-16346, № 06-02-04012), Немецкого научного фонда (грант № 436 RUS 113/669/0-3) и Международной ассоциации ИИТАС (грант № 03-51-6346).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Aharony O., Gubser S., Maldacena J., Ooguri H., Oz Y. Large  $N$  Field theories, string theory and gravity // Phys. Rept. – 2000. – V. 323. – P. 183–386.
- Mohaupt T. Black holes in supergravity and string theory // Class. Quant. Grav. – 2000. – V. 17. – P. 3429–3482.
- Claus P., Derix M., Kallosh R., Kumar J., Townsend P., Van Proeyen A. Black holes and superconformal mechanics // Phys. Rev. Lett. – 1998. – V. 81. – P. 4553–4556.
- Gibbons G.W., Townsend P.K. Black holes and Calogero models // Phys. Lett. B. – 1999. – V. 454. – P. 187–192.
- Michelson J., Strominger A. Supergravity spectrum on  $AdS_2 \times S^2$  // J. High Energy Phys. – 1999. – V. 9909. – P. 005–029.
- Michelson J., Strominger A. The geometry of (super) conformal quantum mechanics // Commun. Math. Phys. – 2000. – V. 213. – P. 1–17.
- Britto-Pacumio R., Strominger A., Volovich A. Two-black-hole bound states // J. High Energy Phys. – 2001. – V. 0103. – P. 050–071.
- Britto-Pacumio R., Maloney A., Stern M., Strominger A. Spinning bound states of two and three black holes // J. High Energy Phys. – 2001. – V. 0111. – P. 054–076.
- Maloney A., Spradlin M., Strominger A. Superconformal multiblack hole moduli spaces in four-dimensions // J. High Energy Phys. – 2002. – V. 0204. – P. 003.
- Gaiotto D., Strominger A., Yin X. Superconformal black hole quantum mechanics // J. High Energy Phys. – 2005. – V. 0511. – P. 017–025.
- Calogero F. Solution of the one-dimensional  $N$ -body problem with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials // J. Math. Phys. – 1971. – V. 12. – P. 419–436.
- Wyllard N. (Super)conformal many-body quantum mechanics with extended supersymmetry // J. Math. Phys. – 2000. – V. 41. – P. 2826–2838.
- Galajinsky A. Comments on  $N=4$  superconformal extension of the Calogero model // Mod. Phys. Lett. A. – 2003. – V. 18. – P. 1493–1498.
- Bellucci S., Galajinsky A., Krivonos S. Many-body superconformal systems from hamiltonian reductions // Phys. Rev. D. – 2003. – V. 68. – P. 064010.
- Bellucci S., Galajinsky A., Latini E. New insight into WDVV equation // Phys. Rev. D. – 2005. – V. 71. – P. 044023.
- Olshanetsky M., Perelomov A. Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras // Phys. Rept. – 1981. – V. 71. – P. 313–404.
- Olshanetsky M., Perelomov A. Quantum integrable systems related to Lie algebras // Phys. Rept. – 1983. – V. 94. – P. 313–400.
- Sutherland B. Beautiful models. – Singapore: World Scientific, 2004. – 398 p.
- Gorsky A., Mironov A. Integrable many body systems and gauge theories // Preprint hep-th/0011197.
- De Alfaro V., Fubini S., Furlan G. Conformal invariance in quantum mechanics // Nuovo Cim. A. – 1976. – V. 34. – P. 569.
- Gurappa N., Panigrahi P.K. Equivalence of the Calogero-Sutherland model to free harmonic oscillators // Phys. Rev. B. – 1999. – V. 59. – P. 2490–2493.
- Brzezinski T., Gonera C., Maslanka P. On the equivalence of the rational Calogero-Moser system to free particles // Phys. Lett. A. – 1999. – V. 254. – P. 185–196.
- Basu-Mallick B., Gupta K.S., Meljanac S., Samsarov A. Quantization and conformal properties of a generalized Calogero model // Preprint hep-th/0609111.
- Polychronakos A. Nonrelativistic bosonization and fractional statistics // Nucl. Phys. B. – 1989. – V. 324. – P. 597–630.