ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 269 1976

К ВОПРОСУ О РАЗЛОЖЕНИИ СХЕМ НА МИНИМАЛЬНО ВЗАИМОСВЯЗАННЫЕ ПОДСХЕМЫ

А. В. КОРНИЕНКО
(Представлена научным семинаром кафедры автоматизированных систем управления)

Рассматривается часто возникающая при компоновке цифровых устройств задача разложения схемы на не пересекающиеся между собой подсхемы, удовлетворяющие некоторому критерию минимума количества связей между ними. Аналогичные вопросы рассматривались ранее как точными методами [1], так и на основе эвристических принципов [2]. В данный статье развивается подход [3], базирующийся на понятии минимальной (сильно связанной) группы элементов. В частности, исследуются условия минимальности групп, вводится понятие квазиминимальной группы, на основе полученных результатов предлагается экономный алгоритм нахождения всех минимальных групп схемы.

Основные понятия и постановка задачи

Схеме V, построенной из функциональных элементов и соединений между ними, ставится в соответствие граф Γ [4], в котором различается два множества вершин: E и C. Вершины из E соответствуют функциональным элементам, вершины из C — электрическим соединениям схемы. Вершина $c_i \in C$ соединяется ребрами с вершинами $e_j, e_k, \ldots, e_m$ $(e_q \in E,\ q=j, \kappa, \ldots, m)$, если i=е электрическое соединение связывает между собой функциональные элементы $j, \kappa, \ldots, m$.

Для удобства последующего изложения условимся называть в графе Γ вершины из множества E элементами, а из множества C — соединениями. Элементы на графе будем обозначать кружками, соединения — точками. Будем также обозначать через $E(c_i)$ множество элементов, смежных соединению c_i, и через $C(e_j)$ — множество соединений, смежных элементу e_j.

Определение 1. Соединение $c_i \in C$ называется для множества $B \subset E$ элементов

— внутренним, если $E(c_i) \cap B = E(c_i)$;

— граничным (или выводом), если $E(c_i) \cap B \neq E(c_i)$;

— внешним, если $E(c_i) \cap B = \varnothing$.

Определение 2*. Подграф $R \subset \Gamma$, определяемый множеством $B \subset E$ элементов и множеством $C(B)$ соединений, называется группой.

Так как выбором B однозначно определяется R, то впредь для удобства группой будем называть всякое множество $B \subset E$ элементов, подразумевая определяемый этим множеством подграф. Для группы H, состоящей из n попарно непересекающихся групп ($H = \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$, $B_i \cap B_j = \varnothing$ при $i \neq j$), число ее выводов определяется [3] по формуле

$$h = \sum_{i=1}^{n} \alpha(B_i) + \sum_{i,\, j=1}^{n} \alpha(B_i, B_j) + \sum_{i,\, j,\, k=1}^{n} \alpha(B_i, B_j, B_k) + \ldots$$
$$\ldots + \sigma(B_i, B_j, \ldots, B_n). \qquad (1)$$

В (1) через $\sigma(B_i, B_j, \ldots, B_m)$ обозначается число граничных соединений, смежных набору групп $B_i, B_j, \ldots, B_m$. Число внутренних соединений, смежных этому набору, обозначается через β ($B_i, B_j, \ldots B_m$). Пример, иллюстрирующий применение формулы (1), приведен на рис. 1.

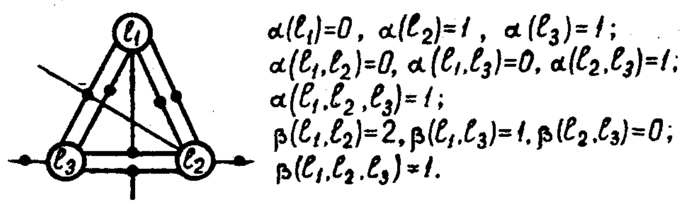

Рис. 1. Пример применения формулы (1)

Определение 3*. Группа B называется минимальной, если для любой подгруппы $H \subset B$ число ее выводов удовлетворяет неравенству

$$h > b. \qquad (2)$$

Отдельные элементы считаются минимальными группами.

Теорема 1. [3]. Пусть K и L — минимальные группы, причем $K \not\subset L$ и $L \not\subset K$. Тогда K и L должны быть непересекающимися, т. е. $K \subset L = \varnothing$.

Тем не менее одна минимальная группа может полностью содержаться в другой. Например, на рис. 4 группы $K = \{e_1, e_2\}$ и $L = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ являются минимальными, причем $K \subset L$.

Свойство минимальных групп, сформулированное в теореме 1, представляет основной интерес с точки зрения компоновки. Действительно, множества элементов, помещаемые при компоновке в разные конструктивные единицы одного ранга, не могут пересекаться, но эти множества могут полностью содержаться одно в другом, если помещаются в конструктивные единицы разного ранга. Кроме того, минимальная группа, будучи помещенной целиком в конструктивную единицу, обеспечивает минимальное количество выводов. Однако алгоритм, предложенный в [3] для отыскания минимальных групп, недостаточно эффективен, так как опирается в основном на перебор. Задача, таким образом, состоит в том, чтобы разработать алгоритм, пригодный для исследования схем с числом элементов, достаточно большим, чтобы представлять практический интерес.

Некоторые дополнительные свойства минимальных групп

Нередко в графах схем цифровых устройств не удается выделить минимальные группы из-за наличия большого числа соединений, гранич-

---

*Смысл определений 2 и 3 заимствован из [3].

ных для графа в целом. Для устранения этого препятствия исходный граф будем преобразовывать в граф без граничных соединений следующим образом:

а) каждое граничное соединение c_i, смежное элементам $e_j, e_k, ...e_m$, заменим (удалив для этого внешние ребра, инцидентные c_i) на внутреннее соединение, смежное тем же элементам;

б) каждое граничное соединение, смежное только одному элементу, удалим вместе со всеми инцидентными ему ребрами.

Теорема 2. Группа B, минимальная в исходном графе $Г$, сохраняет свою минимальность и в графе $Г^*$ без граничных соединений, полученном из $Г$ указанным преобразованием.

Доказательство. Выделим в B произвольную подгруппу $H \subset B$. Так как B — минимальная группа, то $h > b$ (по определению 3). Пусть b° и h° — та часть выводов группы В и подгруппы H соответственно, которая утрачивается при преобразовании графа $Г$ в $Г^*$. Поскольку $H \subset B$, то $b^\circ \gg h^\circ$ и, следовательно, $h^* > b^*$, где $b^* = (b - b^\circ)$ и $h^* = (h - h^\circ)$ — число выводов соответственно группы B и подгруппы H в графе $Г^*$. В силу произвольности выбора H утверждение справедливо для всех подгрупп группы B, что и требовалось для доказательства теоремы. Очевидно, что из минимальности группы в графе $Г^*$ не обязательно следует ее минимальность в графе $Г$.

Теорема 3. Если граф $Г$ связен, то полученный из него граф $Г^*$ без граничных соединений является минимальной группой.

Доказательство. Очевидно, что преобразованием графа $Г$ в $Г^*$, его связность не нарушается. Поэтому число выводов любой из его подгрупп не равно нулю. А так как число выводов графа $Г^*$ равно нулю, то тем самым выполнены условия, требуемые определением 3 для минимальности $Г^*$.

Если граф не связен, то каждую из его компонент можно исследовать отдельно. Поэтому доказанные теоремы дают возможность рассматривать в будущем только связные графы без граничных соединений.

Будем говорить, что группа B является n-группой, если число входящих в нее элементов равно n. Как следует из определения 3, для того, чтобы убедиться в минимальности n-группы, необходимо проверить выполнение неравенства (2) для всех $2 - 1$ ее подгрупп. Поэтому представляет особый интерес теорема 4.

Теорема 4. Пусть B является n-группой, не содержащей минимальных m-подгрупп, $n > m > 1$. Тогда для минимальности B необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $K \in B$ выполнялось неравенство

$$\kappa > b, \qquad (3)$$

Доказательство. Необходимость (3) следует из определения 3. Для доказательства достаточности (3) предположим, что группа удовлетворяет всем условиям теоремы 4, но не является минимальной. Тогда по определению 3 в группе B найдется подгруппа $H \subset B$, такая, что $h \leqslant b$. В силу условий теоремы 4 H тоже не минимальна, и по этой причине в H найдется подгруппа $F \subset H$ такая, что $f \leqslant h$. Продолжая таким образом и учитывая, что группа B состоит из конечного числа n элементов, получим, наконец, подгруппу K из одного элемента и такую, что $\kappa \leqslant ... \leqslant f \leqslant h \leqslant b$, т. е. $k \leqslant b$. Однако это противоречит условиям теоремы 4, что и требовалось установить для ее доказательства.

Таким образом, если всегда обеспечивать, чтобы исследуемая n-группа не содержала минимальных m-подгрупп, $n > m > 1$, то проверку ее минимальности можно выполнять за n шагов вместо $2^h - 1$. Будем говорить, что группа F подвергается стягиванию [4], если все ее внутренние соединения опускаются вместе с инцидентными им ребрами, а все элементы группы F отождествляются. Тогда процесс поиска минимальных групп, удовлетворяющий условиям теоремы 4, можно осуществить так.

1. Если граф содержит ровно один элемент, то перейти к п. 7.
2. Положить $n=2$.
3. Сформировать все возможные n-группы.
4. Используя (3), проверить минимальность всех n-групп. Если группа минимальна, то выписать ее состав и стянуть.
5. Если минимальные группы были найдены, то перейти к п. 1.
6. Увеличить n на единицу и перейти к п. 3.
7. Конец.

Возможность применения этого процесса опирается на смысл теоремы I и ряд ее следствий, рассмотренных подробно в [3]. Однако слабым местом в этом алгоритме является пункт 3. Дело в том, что количество различных n-групп, которое можно образовать в графе из N элементов, равно числу $\binom{N}{n}$ сочетаний из N элементов по n, в то время как количество минимальных n-групп в таком графе не может превысить (теорема 1) целой части числа N/n. Отсюда очевидна необходимость ограничения перебора при выполнении пункта 3. Первый шаг в этом направлении позволяет сделать теорема 5.

Теорема 5. Для минимальности группы B необходимо и достаточно, чтобы для любой подгруппы $K\subset B$ и ее дополнений $L=B/K$ выполнялись неравенства:

$$\begin{gathered}\beta(K, L)>\alpha(L),\\ \beta(K, L)>\alpha(K).\end{gathered}\tag{4}$$

Доказательство. Из определения 3 следует, что для K и L должны выполняться неравенства:

$$\begin{gathered}k>b,\\ l>b.\end{gathered}\tag{5}$$

По формуле (1) находим (рис. 2):

$$\begin{gathered}b=\alpha(K)+\alpha(K, L)+\alpha(L),\\ K=\alpha(K)+\alpha(K, L)+\beta(K, L),\\ l=\alpha(L)+\alpha(K, L)+\beta(K, L).\end{gathered}\tag{6}$$

Подставив (6) в (5) и произведя упрощения, получим искомую систему неравенств (4).

Следствие 1. Для минимальности группы B необходимо, чтобы для любой подгруппы $K\subset B$ и ее дополнения $L=B$ выполнялось неравенство

$$\beta(K,L)>0.\tag{7}$$

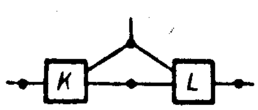

Рис. 2. К теореме 5

Неравенство (7) получается из (4), если положить $\alpha(K)=\alpha(L)=0$.

Назовем группы, удовлетворяющие условиям следствия I, β-связными. Действительно, не составляет особого труда показать, что в такой группе любые два элемента можно соединить цепью, проходящей только по внутренним соединениям. Поскольку минимальная n-группа необходимо должна быть β-связной, то для ее формирования можно воспользоваться алгоритмом, аналогичным алгоритму [4] проверки связности графа.

1. На первом шаге отнесем к формируемой n-группе элемент с минимальным количеством выводов k° (целесообразность этого станет видна из дальнейшего).

2. Пусть K—множество элементов, уже отнесенных к n-группе и представляющих собой β-связную подгруппу. Если $n(K)<n, n(K)=|K|$, то множество K можно β-связно расширить. Для этого достаточно выбрать какое-либо из граничных для K соединений и отнести к формируемой группе все смежные ему элементы. Очевидно, что расширенная таким способом группа будет также β-связной.

Однако такой способ формирования n-группы хотя и ограничивает перебор, но не использует всех свойств минимальных групп. Действительно, на i-м шаге множество $C_i(K)$ граничных для K соединений подразделяется на подмножества: $C_i^\alpha(K)$ — соединения, оставляемые на i-м шаге в числе граничных, и $C_i^\beta(K)$ — соединения, относимые на i-м шаге к числу внутренних для формируемой n-группы. Пусть $r_i=|C^\alpha(K)|$ — число выводов формируемой n-группы на i-м шаге. Тогда очевидно, что должно выполняться неравенство

$$b\geqslant r_i. \tag{8}$$

Так как формируемая n-группа должна быть минимальной, то должно выполняться неравенство $k^\circ>b$, откуда с учетом (8) получим

$$k^\circ>r_i. \tag{9}$$

Таким образом, разделяя на i-м шаге $C_i(K)$ на $C_i^\alpha(K)$ и $C_i^\beta(K)$, необходимо выполнять условие (9). Дополнительное ограничение накладывает теорема 6.

Теорема 6. Для оптимальности описанного процесса формирования n-группы необходимо, чтобы на каждом шаге i выполнялось условие $C_{i-1}^\alpha(K)\subset C_i^\alpha(K)$.

Доказательство. Предположим, что на шаге i $C_{i-1}^\alpha(K)\not\subset C_i^\alpha(K)$. Но это значит тогда, что $C_{i-1}^\alpha(K)\cap C_i^\beta(K)\neq\varnothing$, так как $C_i(K)=$ $=C_i^\alpha(K)\cup C_i^\beta(K)$. Следовательно, часть соединений, отнесенных к внутренним на i-м шаге, могла быть отнесена к ним еще на $(i-1)$-м шаге, что и доказывает теорему.

Следствие 2. Для оптимального процесса формирования группы величина r_i является неубывающей функцией от i, $i=1, 2,..., m$, где m — номер шага, на котором заканчивается формирование. Очевидно.

На шаге m, когда $|K|=n$, $C_m^\alpha(K)$ должно быть равно $C_m(K)$, так как дальнейшее расширение группы невозможно. Если при этом окажется, что неравенство (9) выполнено и на m-м шаге, то полученная n-группа (в силу теоремы 4) является минимальной, так как первый элемент, отнесенный к этой группе, имеет минимальное количество выводов k°.

Квазиминимальные группы

В рассмотренном в предыдущем разделе алгоритме процесс поиска минимальных групп можно еще более ускорить, если стягивать группы, не являющиеся минимальными. Основное свойство, которым должна обладать такая группа, состоит в том, чтобы она не могла частично пересекаться с минимальными группами. Этим свойством обладают квазиминимальные группы.

Определение 3'. Группа B называется квазиминимальной, если для любой подгруппы $H \subset B$ число ее выводов удовлетворяет неравенству

$$h \geqslant b,$$

Теорема 1'. Пусть B — минимальная, а S—квазиминимальная группы. Причем $B \not\subset S$ и $S \not\subset B$. Тогда группы B и S должны быть непересекающимися, т. е. $B \cap S = \varnothing$.

Доказательство. Пусть $B \cap S = F$, $B = KUF$ и $S = LUF$ (рис. 3). Из определений 3 и 3' и условий теоремы 1' следует, что при $F = \varnothing$ должны выполняться неравенства:

$$\begin{aligned} k &> b, \\ l &\geqslant s. \end{aligned} \tag{10}$$

Используя формулу (1), получим для (10) эквивалентную ей систему неравенств:

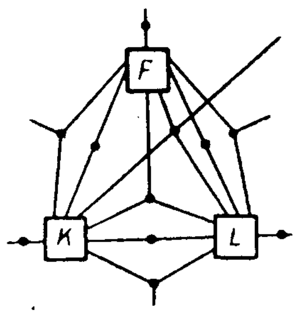

Рис. 3. К теореме 1

$$\begin{aligned} \beta K, F) &> \alpha(F) + \alpha(L, F) + \beta(L, F), \\ \beta(L, F) &\geqslant \alpha(F) + \alpha(K, F) + \beta(K, F). \end{aligned} \tag{11}$$

Эти неравенства при $F \neq \varnothing$ неразрешимы совместно. Только допустив, что $F = \varnothing$ (при этом $B = K$; $S = L$; неравенства в (10) заменяются на равенства; все α и β в (11), содержащие F, приравниваются нулю), получаем разрешимую совместно систему уравнений. Чем и доказывается справедливость теоремы.

Для квазиминимальных групп справедливы также теоремы, аналогичные теоремам 4 и 5 для минимальных групп. Доказательство их полностью аналогично доказательствам соответствующих теорем для минимальных групп и поэтому здесь не приводится.

Теорема 4'. Пусть B является n-группой, не содержащей квазиминимальных m-подгрупп, $n > m > 1$. Тогда для квазиминимальности B необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $K \in B$ выполнялось неравенство

$$k \geqslant b, \tag{3^1}$$

Теорема 5[1]. Для квазиминимальности группы В необходимо и достаточно, чтобы для любой подгруппы $K \subset B$ и ее дополнения $L = B \setminus K$ выполнялись неравенства:

$$\begin{aligned} \beta(K, L) &\geqslant \alpha(L), \\ \beta(K, L) &\geqslant \alpha(K). \end{aligned} \tag{4^1}$$

Следствие 1'. Для квазиминимальности группы B необходимо, чтобы для любых подгрупп $K \subset B$ *и* $L = B/K$ выполнялось неравенство

$$\beta(K, L) \geqslant 0.$$

Как видно, квазиминимальная группа не обязана быть β-связной. Однако поскольку нас интересуют прежде всего минимальные группы, то из квазиминимальных групп впредь будут рассматриваться только β-связные.

Алгоритм

Обобщая результаты, полученные в предыдущих разделах, сформулируем процедуру поиска минимальных групп в графе без граничных соединений.

1. Если граф содержит ровно один элемент, то перейти к п. 11.

2. Просматривая соединения графа, найти соединение с минимальным количеством смежных ему элементов $\gamma^0 = \min_i |E(c_i)|$.

3. Положить $n=\gamma^\circ$.

4. Все соединения, имеющие число смежных элементов $\gamma > n$, отметить как граничные для формируемой n-группы.

5. Среди элементов, имеющих неотмеченные (неграничные) смежные соединения, выбрать элемент с минимальным числом смежных соединений $k^\circ = \min_j |C(e_j)|$ и отнести его в множество K элементов формируемой n-группы. Если такого элемента не найдется, то все метки убрать и перейти к п. 9.

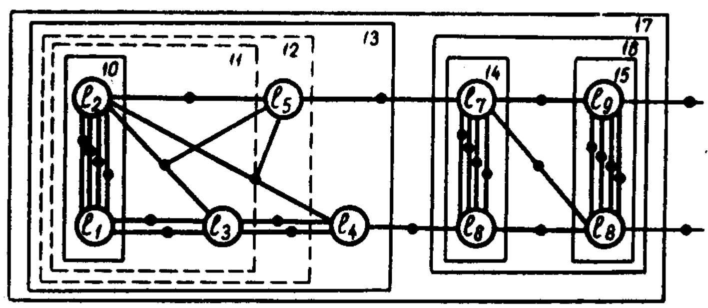

Рис. 4. Пример разложения графа на минимальные группы

6. Сформировать β-связную n-группу, удовлетворяющую на каждом шаге i условию $k^\circ \geqslant r_i$ $(i=1, 2, ..., m)$. Если такую группу не удается сформировать, то перейти к п. 8.

7. Выписать состав найденной минимальной или квазиминимальной группы; присвоить ей следующий по порядку номер, не совпадающий с номерами элементов и ранее найденных групп; стянуть найденную n-группу; все соединения, смежные элементам, вошедшим в n-группу, отметить как граничные. После этого перейти к п. 5.

8. Все соединения, смежные элементу с числом выводов k°, отнесенному первым к формируемой n-группе, отметить как граничные, после чего перейти к п. 5.

9. Если в п. 6 были найдены минимальные или квазиминимальные группы, то перейти к п. 1.

10. Увеличить n на единицу и перейти к п. 4.

11. Конец.

На рис. 4 приведен пример, заимствованный из [3]. На графе тонкими линиями изображены ребра исключенных из рассмотрения граничных соединений. Сплошными линиями обведены минимальные группы, пунктиром — квазиминимальные. Нетрудно установить, что для отыскания 6 минимальных групп графа требуется проанализировать 18 групп. Для нахождения тех же групп с помощью алгоритма [3] потребуется проанализировать в лучшем случае 26, в худшем—62 группы (в зависимости от порядка их формирования).

Заключение

Предложен и обоснован более эффективный метод нахождения минимальных групп графа. Повышение эффективности получено в основном за счет использования ранее неизвестных свойств минимальных групп для ограничения перебора и более быстрого уменьшения размерности задачи в ходе ее решения в результате стягивания не только минимальных, но и введенных в рассмотрение квазиминимальных групп.

Эффективность алгоритма существенно зависит от степени полноты графа, что, однако, не является его недостатком, так как графы схем цифровых устройств, как правило, весьма далеки от полных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Л. Горинштейн. О разрезании графов. Изв. АН СССР. «Техническая кибернетика», 1969, № 1.

2. Kernighan B. W. and Lin S. An efficient heuristic procedure for partitioning graphs. Bell System Tech. J. **49**, № 2 (Feb. 1970), 291—307.

3. Luccio F. Sami Mariagiovanna. On the decomposition of networks in minimally interconnected subnetworks. „IEEE Trans. Circuit Theory", 1969, **16**, № 2, 184—188.

4. Берж. Теория графов и ее применения. М., ил, 1962.