ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. С. М. КИРОВА

Том 277 1977

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТАТИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

В. В. ЗАХАРОВ

(Представлена научным семинаром лаборатории вычислительной техники и автоматизации НИИ ЯФ)

Для построения математических моделей (индентификации) статических объектов в настоящее время широко применяется метод регрессионного анализа [1] и различные модификации метода оптимального планирования эксперимента [2]. В [3] с помощью методики, названной покоординатным интегральным проецированием, был частично иденгифицирован нелинейный объект (получены коэффициенты при вторых степенях переменных). Этот же метод дает весьма простой алгоритм построения линейной модели и легко обобщается на случай нелинейной зависимости переменных.

1. Основная идея метода. Пусть требуется найти коэффициенты линейной формы

$$F(\vec{x})=\sum_{i=1}^{n} b_i x_i. \tag{1,1}$$

по результатам наблюдений $F_j=F(\vec{x}^j)$, где $\vec{x}^j=(x_1^j,\ldots,x_n^j)$,

$$\vec{x}^j\in[\alpha,\beta],\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n),j\in J,J=\{1,2,\ldots,N\}.$$

Обозначим

$$I(\alpha,\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}F(\vec{x})d\vec{x}.$$

Очевидно,

$$I(\alpha,\beta)=\prod_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}. \tag{1,2}$$

Перепишем (1,2) в иной форме и назовем эту форму интегральной проекцией на k-ю координатную ось:

$$I(\alpha_k,\beta_k)=\prod_{i\neq k}(\beta_i-\alpha_i)(\beta_k-\alpha_k)\left(\sum_{i\neq k}b_i\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}+\frac{\alpha_k+\beta_k}{2}\right).$$

Вычислим $I(\alpha_k,\alpha_k+\delta_k)$, $I(\beta_k-\delta_k,\beta_k)$, где $\delta_k=(\beta_k-\alpha_k)/(t+1),t\geqslant 1$.

Разность этих величин дает

$$I(\beta_k-\delta_k,\beta_k)-I(\alpha_k,\alpha_k+\delta_k)=\delta_k^2 tb_k\prod_{i\neq k}(\beta_i-\alpha_i),$$

откуда

$$b_k=\frac{I(\beta_k-\delta_k,\beta_k)-I(\alpha_k,\alpha_k+\delta_k)}{\delta_k^2 t\prod\limits_{i\neq k}(\beta_i-\alpha_i)}\quad k=1,2,...,n. \tag{1,3}$$

Таким образом, для вычисления коэффициентов b_k необходимо найти эффективный метод вычисления интегралов в (1,3). Очень удобным в этом смысле является метод Монте-Карло [4].

Пусть $I(\alpha, \beta)$ есть статистическая оценка $J(\alpha, \beta)$. Тогда имеем

$$I(\alpha,\beta)=\prod_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n}F_j, \tag{1,4}$$

причем

$$|I(\alpha,\beta)-I(\alpha,\beta)|\leqslant c_1\sqrt{\frac{\sigma_F^2}{N}}, \tag{1,5}$$

где σ_F^2 — дисперсия $F(\vec{x})$, функции равномерно распределенных случайных величин $x_k(k=1, ..., n)$, а величина C_1 определяется желательной вероятностью выполнения неравенства (1,5).

Подставляя (1,4) в (1,3) и обозначая $t\delta_k$ через τ_k, получим для b_k

$$b_k\approx b_k^0=\frac{1}{\tau_k}\left(\frac{1}{N_{2k}}\sum_{s\in J_{2k}}F_s-\frac{1}{N_{1k}}\sum_{r\in J_{1k}}F_r\right). \tag{1,6}$$

Здесь $r\in J_{1k}$, если $x_k^r\in(\alpha_k, \alpha_k+\delta_k)$; $s\in J_{2k}$, если $x_k^s\in(\beta_k-\delta_k,\beta_k)$. Ясно, что множество J_{1k} содержит N_{1k} элементов, а множество J_{2k}—N_{2k} элементов, причем $J_{1k}\cup J_{2k}=J$ и $N_{1k}+N_{2k}=N$.

Особого внимания заслуживает тот факт, что для вычисления всех коэффициентов линейной формы (1,1) по формуле (1,6) используются одни и те же N наблюдений F_j, только спроецированные на разные координатные оси.

2. Уточнение коэффициентов. Дисперсия σ_F^2, а следовательно, и погрешность формулы (1,6) в отдельных случаях может быть довольно большой. Возникает задача уменьшения величины σ_F^2 и тем самым погрешности вычисления b_k без увеличения количества наблюдений. Такую возможность дает способ выделения главной части интегрируемой по Монте-Карло функции, описанный в [4].

В качестве главной части $F(x)$ рассмотрим функцию

$$Y^0(\vec{x})=\sum_i b_i^0 x_i. \tag{2,1}$$

Выражение

$$I^0(\alpha,\delta)=\prod_i(\beta_i-\alpha_i)\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}[F_j-Y^0(\vec{x}^j)]+\int_\alpha^\beta Y^0(\vec{x})d\vec{x}. \tag{2,2}$$

даст более точное значение $I(\alpha, \beta)$, нежели (1,4). Подставляя это приближенное значение в (1,3) вместо соответствующего точного значения, получим простую итерационную формулу для вычисления коэффициентов b_k:

$$b_k \approx b_k^m = b_k^0 + b_k^{m-1} - \frac{1}{\tau_k}\left(\frac{1}{N_{2k}}\sum_s Y_s^{m-1} - \frac{1}{N_{1k}}\sum_r Y_r^{m-1}\right), m=1,2,... \quad (2,3)$$

3. Влияние помех. Оценка дисперсии коэффициентов. Можно показать, что если наблюдаемые значения F_j искажены наложением аддитивной помехи с дисперсией σ^2, то коэффициенты b_k будут вычислены с дисперсиями

$$\sigma^2(b_k) \leqslant c_2 \frac{4}{\tau^2} \frac{\sigma^2}{N}, \quad (3,1)$$

где c_2 — константа, характеризующая вероятность выполнения неравенства (3,1).

Эти дисперсии имеют тот же порядок, что и в линейном ортогональном планировании [2]. Вследствие этого перспективно применение формулы (2,3) для вычисления вектора градиента произвольной функции $F(x)$ в обстановке помех.

4. Обобщение вида аппроксимирующего полинома. Заметим, что δ

$$\int_{-\delta}^{\delta} \prod_{i\neq k} x_i^{m_i} \cdot x_k^r d\vec{x} = 0, \quad (4,1)$$

где m_i — действительная величина, r — нечетное. (В (4,1) интегрирование многомерное).

Положим, что выдвинута гипотеза $F(\vec{x}) \approx Q(\vec{x})$, где

$$Q(\vec{x}) = \sum_i a_{ii} x_i^2 + \sum_{i\neq k} a_{ik} x_{ik} + \sum_i a_{i0} + a_{00}$$

и требуется установить вид $Q(\vec{x})$ (т. е. найти $\{a_{ik}\} i,k = \overline{0n}$) по результатам наблюдений $\{x^j, F_j\}$, $j \in J$.

Учитывая (4,1), получим

$$\int_{-\delta}^{\delta} Q(\vec{x}) d\vec{x} = (2\delta)^n \left(\frac{\delta^2}{3} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + a_{00}\right), \quad (4,2)$$

откуда найдем a_{00} при условии, что a_{ii} $(i=\overline{1,n})$ найдены по методу проецирования, приведенному в [3].

Далее

$$\int_{-\delta}^{\delta} Q(\vec{x}) x_i d\vec{x} = (2\delta)^n a_{i0} \cdot \frac{1}{3}\delta^2. \quad (4,3)$$

$$\int_{-\delta}^{\delta} Q(x) x_i x_k d\vec{x} = (2\delta)^n a_{ik} \frac{2\delta^4}{9}; \; i,k = \overline{1,n}.$$

Заменяя формулы (4,2), (4,3) их дискретным аналогом по (1,4), получим оценки a_{ik} на основе равномерно рассеянных наблюдений F_j:

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} F_j \approx \frac{\delta^2}{3}\sum_{i=0}^{n} a_{ii} + a_{00}; \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_i^j F_j \approx a_{i0} \cdot \frac{\delta^2}{3},$$

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_i^j x_k^j F_j \approx a_{ik}\frac{2\delta^4}{9};\ i,\ k=\overline{1,n}. \tag{4,4}$$

Замечание 1. Нетрудно видеть, что, подбирая соответствующим образом состав множителей под интегралом и их степени, можно идентифицировать полиномы произвольной степени.

Замечание 2. Организация итерационного уточнения коэффициентов a_{ik} $(i,\ k=\overline{0,n})$ с использованием методики выделения главной части по формулам (2,2) не представляет труда.

5. Более общий вид распределения переменных. Пусть управляемые переменные x_k имеют произвольную (а не обязательно равномерную) плотность совместного распределения $p(\vec{x})$, усеченную гиперинтервалом $[\alpha,\ \beta]$.

Очевидно,

$$I(\alpha,\beta)=M\left[\frac{F(\vec{x})}{p(\vec{x})}\right]=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{F(\vec{x})}{p(\vec{x})}p(\vec{x})d\vec{x}.$$

Поэтому всюду в соотношениях (1,6), (4,4) заменяя значения функции F_j отношением $F_j/p(x^j,)$ получим возможность пользоваться для отыскания коэффициентов a_{ik} итерациями типа (2,3), не изменяя формул.

6. Область применения метода. а) В задачах активного эксперимента предлагаемый метод дает возможность на основе одних и тех же наблюдений проверить последовательно линейную, квадратичную, кубичную и т. д. гипотезы относительно математического описания объекта. Таким образом, оказывается, что равномерное рассеяние испытаний является универсальным и последовательно композиционным планом эксперимента.

б) Обобщение п. 5 дает возможность применять предлагаемый метод интегральной идентификации для отыскания режимов объектов по результатам пассивного эксперимента. При этом знание распределений компонент вектора $\boldsymbol{x}$ позволяет уменьшить дисперсию искомых коэффициентов.

в) В некоторых задачах существенное значение имеет уточнение коэффициентов модели по вновь полученным наблюдениям процесса (коррекция модели). Таковы задачи управления объектом или задачи классификации и распознавания образов (например, в [5]). Из формулы (2,3) видно, что включение новых наблюдений в процессе итераций возможно в любой момент и не вызывает никакого усложнения алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Линник. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1962.

2. В. В. Налимов, Н. А. Чернова. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. М., «Наука», 1965.

3. В. В. Захаров. Метод интегрального сглаживания в многоэкстремальных и стохастических задачах. Изв. АН СССР. «Техническая кибернетика», № 4, 1970.

4. Н. П. Бусленко и др. Метод статистических испытаний. М., Физматгиз, 1962.

5. Э. С. Божанов, Г. К. Круг. Классификация многофакторных объектов по экспериментальным данным. В сб.: «Планирование эксперимента», М., «Наука», 1966.