

## РЕШЕНИЕ ПО СПОСОБУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

Б. Ф. КРУТОЙ

(Представлена научным семинаром кафедры инженерной и вычислительной математики)

Предположим, что в двумерной, многосвязной вообще, замкнутой области  $D^{(2)} = D^{(2)} + \Gamma$  задано уравнение Гельмгольца

$$[\Delta + k^2]u(x, y) = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right] u(x, y) = f(x, y). \quad (1)$$

с краевым условием смешанного вида

$$\left[ p(x, y) + q(x, y) \frac{\partial}{\partial n} \right] u(x, y) \Big|_{\Gamma} = h(x, y). \quad (2)$$

на границе  $\Gamma$  (рис. 1 в [1]). Здесь  $k^2$  — постоянная,  $\frac{\partial}{\partial n} u(x, y)$  — производная по единичной нормали  $\vec{n}$  к границе  $\Gamma$ , а  $f(x, y)$  и  $h(x, y)$  — заданные функции, причем так как  $|\vec{n}| = 1$ , то

$$\begin{aligned} 1) \frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n}; \quad 2) \frac{\partial x}{\partial n} = \cos(x, n) = \frac{\partial u}{\partial x} : N, \\ 3) \frac{\partial y}{\partial n} &= \cos(y, n) = \frac{\partial u}{\partial y} : N; \quad 4) N^2 = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Тогда ввиду линейности оператора  $[\Delta + k^2]$  для уравнения Гельмгольца (1) с краевым условием (2) может быть поставлена соответствующая спектральная задача:

определить наборы (спектр) собственных значений и собственных функций  $w(x, y)$  оператора  $[\Delta + k^2]$ , удовлетворяющие в области  $D^{(2)} = D^{(2)} + \Gamma$  требованию

$$[\Delta + k^2]w(x, y) = \lambda w(x, y) \quad (4)$$

и однородному краевому условию

$$\left[ p(x, y) + q(x, y) \frac{\partial}{\partial n} \right] w(x, y) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (5)$$

на границе  $\Gamma$ . Решение указанной задачи способом Фурье, изложенным в [2], невозможно, так как коэффициенты  $p(x, y)$  и  $q(x, y)$  краевого условия (5) зависят и от  $x$ , и от  $y$ . Поэтому мы решим данную задачу по способу наименьших квадратов, который позволяет, кроме того, оценить точность полученного решения в любой точке области  $\overline{D^{(2)}} = D^{(2)} + \Gamma$ . Сущность предлагаемого решения, которое мы разобьем на несколько последовательных ступеней, заключается в следующем.

1. Представим искомую функцию  $w(x, y)$  ее приближенным выражением  $\varphi(x, y)$  — конечным разложением по  $r$  опорным взаимонезависимым функциям  $\varphi_v(x, y)$ , так что

$$w(x, y) \approx \varphi(x, y) = \sum_{v=1}^r c_v \varphi_v(x, y), \quad (6)$$

где  $c_v$  — неизвестные коэффициенты.

Зададим теперь на границе  $\Gamma$  некоторое число  $\gamma$  равномерно расположенных точек  $M_\Gamma = M(x_\Gamma, y_\Gamma)$ , а в области  $D^{(2)}$  зададим равномерно некоторое число  $\sigma$  точек  $M_s = M(x_s, y_s)$  (рис. 1 в [1]). Затем для  $\gamma$  точек  $M_\Gamma$  подсчитаем краевое условие (5), а для  $\sigma$  точек  $M_s$  подсчитаем равенство (4), исходя при этом из приближенного представления (6) для искомой функции  $w(x, y)$  и взяв  $\gamma + \sigma = \omega > r$ . Мы получим в итоге свод из  $\omega > r$  уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \sum_{v=1}^r \left[ p(x_\Gamma, y_\Gamma) + q(x_\Gamma, y_\Gamma) \frac{\partial}{\partial n} \right] \varphi_v(x_\Gamma, y_\Gamma) c_v = \varepsilon_\Gamma \\ \quad (\Gamma = 1, 2, \dots, \gamma) \\ 2) \sum_{v=1}^r \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) \varphi_v(x_s, y_s) - \lambda \varphi_v(x_s, y_s) \right] c_v = \varepsilon_s, \\ \quad (s = 1, 2, \dots, \sigma) \end{array} \right. \quad (7)$$

в котором  $\varepsilon_\Gamma, \varepsilon_s$  — некоторые ошибки, вызванные неточностью представления (6) для искомой функции  $w(x, y)$ .

Введем обозначения

$$\begin{aligned} 1) & \left[ p(x_\Gamma, y_\Gamma) + q(x_\Gamma, y_\Gamma) \frac{\partial}{\partial n} \right] \varphi_v(x_\Gamma, y_\Gamma) = a_{\Gamma v} = a_{\Gamma v}^*, \\ 2) & \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) \varphi_v(x_s, y_s) = b_{sv} = b_{sv}^*, \\ 3) & \varphi_v(x_s, y_s) = \varphi_{sv} = \varphi_{sv}^*. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда мы приведем свод (7) из  $\gamma + \sigma = \omega$  уравнений к более сжатому виду

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \sum_{v=1}^r a_{\Gamma v} c_v = \varepsilon_\Gamma, \quad (\Gamma = 1, 2, \dots, \gamma) \\ 2) \sum_{v=1}^r (b_{sv} c_v - \lambda \varphi_{sv} c_v) = \varepsilon_s, \quad (s = 1, 2, \dots, \sigma). \end{array} \right. \quad (9)$$

Частный свод (9.1) состоит из  $\gamma$  алгебраических уравнений первой степени. Частный же свод (9.2) состоит из  $\sigma$  алгебраических уравнений

второй степени, так как содержит члены  $\lambda \varphi_{xy} c_y$ , где  $\lambda$  и  $c_y$  — неизвестны. Поэтому, имея в виду решение свода (9) из  $\gamma + \sigma = \omega > r$  уравнений по способу наименьших квадратов, мы должны предварительно найти приближенные значения  $\lambda^0, c_y^0$  для указанных неизвестных  $\lambda, c_y$ . Одновременно можно подсчитать соответствующие приближенные значения  $\omega^0(x, y)$  для собственных функций  $\omega(x, y)$  оператора  $[\Delta + k^2]$ .

2. Предполагая, что  $\sigma > r$ , выполним расчет  $\lambda^0, c_y^0$  следующим образом. Выделим из частного свода (9.2) какие-нибудь  $r$  уравнений, в итоге чего у нас образуется свод

$$\sum_{v=1}^r (b_{xv} - \lambda \varphi_{xv}) c_v = 0, \quad (x=1, 2, \dots, r), \quad (10)$$

из  $r$  алгебраических уравнений второй степени без свободных членов и с  $r+1$  неизвестными  $\lambda, c_1, c_2, \dots, c_r$ . Имея в виду приближенное представление (6) для  $\omega(x, y)$ , мы ставим задачей найти из свода (10) такие значения для  $r$  коэффициентов  $c_v$  в (6), чтобы

$$|C_1| + |C_2| + \dots + |C_r| \neq 0. \quad (11)$$

Так как свод из  $r$  уравнений (10) однороден относительно  $r$  неизвестных  $c_v$ , то требование (11) будет выполнено, если определитель

$b_{xv} - \lambda \varphi_{xv} |_1^r$  свода (10) равен нулю

$$|b_{xv} - \lambda \varphi_{xv} |_1^r = 0, \quad (x, v=1, 2, \dots, r). \quad (12)$$

Но определитель  $|b_{xv} - \lambda \varphi_{xv} |_1^r$  после его раскрытия есть многочлен  $r$ -й степени относительно  $\lambda$ . Следовательно, условие (12) может быть записано еще так

$$|b_{xv} - \lambda \varphi_{xv} |_1^r = \sum_{s=0}^r g_s \lambda^s = 0, \quad (13)$$

то есть условие дает алгебраическое уравнение  $r$ -й степени относительно неизвестного  $\lambda$ .

Решая уравнение (13), найдем  $r$  его корней  $\lambda_s$ , некоторые из которых могут быть кратными. Поэтому число  $n$  различных корней  $\lambda_\beta$  может быть и меньше, чем  $r: n \leq r$ . Так как эти различные значения  $\lambda_\beta$  неизвестного  $\lambda$  получены из частичного свода уравнений (10), то мы будем считать их приближенными и потому обозначим через  $\lambda_\beta^0$ .

Вставим далее в свод уравнений (10), не содержащий свободных членов, найденные  $n$  различных корней  $\lambda_\beta$  уравнения (13). Обозначая через  $c_{v\beta}^0 = c_{1\beta}^0, c_{2\beta}^0, \dots, c_{r\beta}^0$  значения неизвестных  $c_v$ , соответствующих заданному  $\lambda_\beta^0$ , запишем итог подстановки  $n$  различных корней  $\lambda_\beta$  в свод (10) следующим образом:

$$a) \sum_{v=1}^r (b_{xv} - \lambda_\beta^0 \varphi_{xv}) c_{v\beta}^0 = 0 \text{ или } б) \sum_{v=1}^r b_{xv} c_{v\beta}^0 = \lambda_\beta^0 \sum_{v=1}^r \varphi_{xv} c_{v\beta}^0, \quad (14)$$

$$(x=1, 2, \dots, r; \beta=1, 2, n \leq r)$$

что представим также в матричном виде

$$a) (b_{(rr)} - \lambda_\beta^0 \varphi_{(rr)}) c_{(r1) \cdot \beta}^0 = 0_{(r1)} \text{ или } б) b_{(rr)} c_{(r1) \cdot \beta}^0 = \lambda_\beta^0 \varphi_{(rr)} c_{(r1) \cdot \beta}^0. \quad (14^*)$$

$$(\beta=1, 2, \dots, n \leq r).$$

Отсюда видно, что в итоге указанной подстановки мы получили связку из  $n \leq r$  сводов уравнений вида (10), причем в каждом из этих сводов вместо неизвестного  $\lambda$  подставлено одно из его различных приближенных значений  $\lambda_\beta^0 \in \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_n^0$ .

Так как каждый из  $n$  сводов уравнений, входящих в связку (14), состоит из  $r$  однородных уравнений относительно соответствующих  $r$  неизвестных  $c_{v\beta}^0 = c_{1\beta}^0, c_{2\beta}^0, \dots, c_{r\beta}^0$ , то одно из этих неизвестных остается произвольным. Поэтому мы примем, что в каждом своде однородных уравнений из связки (14) и при заданном  $\lambda_\beta^0$  последнее неизвестное  $c_{r\beta}^0 = 1$ . Тогда остальные  $r-1$  неизвестных  $c_{1\beta}^0, c_{2\beta}^0, \dots, c_{r-1,\beta}^0$  для заданного  $\lambda_\beta^0$  определяется вполне однозначно своим  $\beta$ -м сводом из  $r-1$  уравнений, так что вместо (14) мы будем иметь

$$\sum_{v=1}^{r-1} (b_{xv} - \lambda_\beta^0 \varphi_{xv}) c_{v\beta}^0 + (b_{xr} - \lambda_\beta^0 \varphi_{xr}) c_{r\beta}^0 = 0, c_{r\beta}^0 = 1; \quad (15)$$

$$(\chi = 1, 2, \dots, r-1; \beta = 1, 2, \dots, n \leq r).$$

Полученный описанным выше способом набор из  $r \times n$  чисел  $c_{v\beta}^0$  образует вообще разнобокую матрицу  $c_{(rn)}^0$ .

$$c_{(rn)}^0 = \begin{bmatrix} c_{11}^0 & c_{12}^0 & \dots & c_{1\beta}^0 & \dots & c_{1n}^0 \\ c_{21}^0 & c_{22}^0 & \dots & c_{2\beta}^0 & \dots & c_{2n}^0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{v1}^0 & c_{v2}^0 & \dots & c_{v\beta}^0 & \dots & c_{vn}^0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r1}^0 & c_{r2}^0 & \dots & c_{r\beta}^0 & \dots & c_{rn}^0 \end{bmatrix}, c_{r\beta}^0 = 1, \quad (16)$$

которая обращается в равнобокую матрицу  $c_{(rr)}^0$ , когда  $n=r$ . Если каждый столбец  $c_{1\beta}^0, c_{2\beta}^0, \dots, c_{v\beta}^0, \dots, c_{r\beta}^0$  матрицы  $c_{(rn)}^0$  считать вектором  $\bar{c}_\beta^0$ , то эта матрица запишется более сжато так:

$$1) \bar{c}_\beta^0 = \begin{bmatrix} c_{1\beta}^0 \\ c_{2\beta}^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{v\beta}^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{r\beta}^0 \end{bmatrix} = c_{(r1)\beta}^0, 2) c_{(rn)}^0 = (\bar{c}_1^0, \bar{c}_2^0, \dots, \bar{c}_\beta^0, \dots, \bar{c}_n^0). \quad (16a)$$

На этом основании связку (14) из  $n \leq r$  сводов уравнений (10) можно представить еще в следующем векторном виде:

$$\text{а) } (B - \lambda_\beta \Phi) \bar{c}_\beta^0 = \bar{0}_\beta, \text{ б) } \bar{B} \bar{c}_\beta^0 = \lambda_\beta \Phi \bar{c}_\beta^0, \quad (14^{**})$$

$$(\beta = 1, 2, \dots, n \leq r)$$

где  $B$  и  $\Phi$  — линейные операторы, соответствующие матрицам  $b_{(rr)}$  и  $\varphi_{(rr)}$  в некоторой отсчетной опоре,

3. Предположим далее, что из решения уравнения (13) мы получили ровно  $r$  приближенных собственных значений  $\lambda_x^0 \in \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_r^0$  оператора  $[\Delta + k^2]$ . Вставляя затем найденные  $r$  различных  $\lambda_x^0$  в связку (14), определим из нее  $r$  векторов  $\bar{c}_x^0 \in \bar{c}_1^0, \bar{c}_2^0, \dots, \bar{c}_r^0$ , принадлежащих этим  $\lambda_x^0$ . Тогда равенство (6) даст нам ровно  $r$  приближенных представлений  $\omega_x^0(x, y)$  для собственных функций  $\omega(x, y)$  оператора  $[\Delta + k^2]$ , так что вместо (6) мы получим следующее уточненное выражение:

$$(\chi = 1, 2, \dots, r).$$

$$\left\{ \begin{aligned} Bc_{\beta 1}^0 &= \lambda_\beta^0 \Phi c_{\beta 1}^0 + 0c_{\beta 2}^0 + 0c_{\beta 3}^0 + \dots + 0c_{\beta, \partial_\beta - 1}^0 + 0c_{\beta, \partial_\beta}^0 \\ Bc_{\beta 2}^0 &= 1c_{\beta 1}^0 + \lambda_\beta^0 \Phi c_{\beta 2}^0 + 0c_{\beta 3}^0 + \dots + 0c_{\beta, \partial_\beta - 1}^0 + 0c_{\beta, \partial_\beta}^0 \\ Bc_{\beta 3}^0 &= 0c_{\beta 1}^0 + 1c_{\beta 2}^0 + \lambda_\beta^0 \Phi c_{\beta 3}^0 + \dots + 0c_{\beta, \partial_\beta - 1}^0 + 0c_{\beta, \partial_\beta}^0 \\ &\vdots \\ Bc_{\beta, \partial_\beta}^0 &= 0c_{\beta 1}^0 + 0c_{\beta 2}^0 + 0c_{\beta 3}^0 + \dots + 1c_{\beta, \partial_\beta - 1}^0 + \lambda_\beta^0 \Phi c_{\beta, \partial_\beta}^0, \end{aligned} \right. \quad (18)$$

где  $B$  и  $\Phi$ —линейные операторы, соответствующие матрицам  $b_{(rr)}$  и  $\varphi_{(rr)}$

$$(\alpha = 2, 3, \dots, \partial_3).$$

векторов и вставив их в представление (6) для собственных функций  $w(x, y)$  оператора  $[\Delta + k^2]$ , получим расчетное выражение для конечного набора  $w_x^0(x, y) \approx w(x, y)$  того же вида (17), что и ранее.

Однако если выражение (17) записать в матричном виде

$$w_{(r1)}(x, y) = c_{(rr)}^{*0} \Phi_{(r1)}(x, y) \quad (17^*)$$

и учесть, что

$$c_{(rr)}^0 = [c_{(rn)}^0 c_{(r, r-n)}^0] = [c_{(rn)}^0 f_{(r, r-n)}^0],$$

где  $c_{(rn)}^0$  и  $c_{(r, r-n)}^0 = f_{(r, r-n)}^0$  — матрицы основных  $c_{\alpha\beta}^0$  и присоединенных  $c_{\alpha\gamma}^0 = f_{\alpha\gamma}^0$ , ( $\gamma = n+1, n+2, \dots, r$ ) коэффициентов, то равенство (17) запишется более развернуто так:

$$w_{(r1)}(x, y) = \begin{bmatrix} c_{(nr)}^{*0} \\ f_{(r-n, r)}^{*0} \end{bmatrix} \Phi_{(r1)}(x, y) = \begin{bmatrix} c_{(nr)}^0 \Phi_{(r1)} \\ f_{(r-n, r)}^{*0} \Phi_{(r1)} \end{bmatrix}. \quad (17^{*}.1)$$

Отсюда вытекает следующее уточненное представление для  $w_x(x, y)$ :

$$\begin{cases} w_\beta(x, y) = \sum_{\alpha=1}^r c_{\alpha\beta}^{*0} \Phi_\alpha(x, y), \\ \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \beta, \dots, n) \\ w_\gamma(x, y) = \sum_{\alpha=1}^r f_{\alpha\gamma}^{*0} \Phi_\alpha(x, y) \\ \quad (\alpha = n+1, n+2, \dots, \gamma, \dots, r). \end{cases} \quad (17.1)$$

5. Перепишем теперь свод уравнений ошибок (9) в более развернутом виде, вытекающем из уточненных представлений

$$1) \lambda \in \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\beta, \dots, \lambda_n, \quad 2) c_\alpha = c_{\alpha\chi}, \quad (\alpha, \chi = 1, 2, \dots, r) \quad (20)$$

для неизвестных  $\lambda$  и  $c_\alpha$ . Тогда свод (9) более полно запишется так:

$$\begin{cases} 1) \sum_{\alpha=1}^r a_{\alpha\gamma} c_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\gamma\beta} \\ \quad \left( \begin{matrix} r = 1, 2, \dots, \gamma \\ s = 1, 2, \dots, \sigma \end{matrix} \right) \\ 2) \sum_{\alpha=1}^r (b_{s\alpha} c_{\alpha\beta} - \Phi_{s\alpha} c_{\alpha\beta} \lambda_\beta) = \varepsilon_{s\beta}, \\ \quad (\beta = 1, 2, \dots, n \leq r; \sigma > r, \gamma + \sigma = \omega > r+1) \end{cases} \quad (21)$$

или в матричном виде

$$\begin{cases} 1) a_{(\gamma r)} c_{(rn)} = \varepsilon_{(\gamma n)} \\ 2) b_{(\sigma r)} c_{(rn)} - \Phi_{(\sigma r)} c_{(rn)} \lambda_{(nn)} = \varepsilon_{(\sigma n)}. \\ \quad (n \leq r; \sigma > n, \gamma + \sigma = \omega > r+1). \end{cases} \quad (21^*)$$

Таким образом, свод уравнений ошибок (9) является в действительности связкой (21\*) из  $2n$  сводов уравнений, причем для заданного  $\lambda_\beta$  в своде (21\*.1) содержится  $\gamma$  уравнений, а в своде (21\*.2) содержится  $\sigma > r$  уравнений. Следовательно,  $\gamma + \sigma > r+1$ , то есть для каждого  $\lambda_\beta$  число уравнений (21\*), равное  $\gamma + \sigma = \omega$ , будет больше числа  $m+1$  со-

ответствующих неизвестных  $\lambda_\beta$ ,  $c_{\nu\beta}$ . Поэтому решение связки (21\*) из  $2n$  сводов уравнений нужно выполнять по способу наименьших квадратов, что дает также возможность оценить надежно точность определяемых из этих уравнений собственных значений  $\lambda_\beta$  и собственных векторов  $\bar{c}_\beta = \bar{c}_{\beta 1}$  оператора  $[\Delta + k^2]$ . Кроме того, мы сможем оценить тогда и точность определяемых согласно (19) присоединенных векторов  $c_{\mu\alpha}$ ,  $\alpha = 2, 3, \dots, \partial_\beta$  для собственных значений  $\lambda_\beta$  кратности  $\partial_\beta$ . В заключение оценим по способу наименьших квадратов точность определяемого согласно (17) конечного набора  $w_\alpha(x, y)$  собственных функций  $w(x, y)$  оператора  $[\Delta + k^2]$ .

6. Приступая к решению по способу наименьших квадратов связки (21) из  $2n$  сводов уравнений, представим неизвестные  $\lambda_\beta$ ,  $c_{\nu\beta}$  в (21) следующим образом:

$$1) \lambda_\beta = \lambda_\beta^0 + \delta\lambda_\beta, \quad 2) c_{\nu\beta} = c_{\nu\beta}^0 + \delta c_{\nu\beta}, \quad (22)$$

где  $\lambda_\beta^0$ ,  $c_{\nu\beta}^0$  — ранее найденные приближенные, но достаточно точные значения для  $\lambda_\beta$ ,  $c_{\nu\beta}$ . Поэтому поправки  $\delta\lambda_\beta$ ,  $\delta c_{\nu\beta}$  будем считать настолько малыми, что их квадратами  $(\delta\lambda_\beta)^2$ ,  $(\delta c_{\nu\beta})^2$  и произведениями  $\delta\lambda_\beta$ ,  $\delta c_{\nu\beta}$  можно пренебречь. Вставляя тогда представления (22) для  $\lambda_\beta$ ,  $c_{\nu\beta}$  в уравнения (21) и учитывая только что сделанные замечания, получим

$$\begin{cases} 1) \sum_{\nu=1}^r a_{r\nu} \delta c_{\nu\beta} + \mathcal{H}_{r\beta} = \varepsilon_{r\beta} \\ 2) \sum_{\nu=1}^r [b_{s\nu} \delta c_{\nu\beta} - (\varphi_{s\nu} c_{\nu\beta}^0) \delta\lambda_\beta - (\lambda_\beta^0 \varphi_{s\nu}) \delta c_{\nu\beta}] + w_{s\beta} = \varepsilon_{s\beta}, \end{cases} \quad (23)$$

( $r = 1, 2, \dots, \gamma$ ;  $s = 1, 2, \dots, \sigma$ )  
( $\beta = 1, 2, \dots, n \leq r$ ;  $\sigma > r$ ,  $\gamma + \sigma > m + 1$ )

где обозначено

$$1) \sum_{\nu=1}^r a_{r\nu} c_{\nu\beta}^0 = \mathcal{H}_{r\beta}, \quad 2) \sum_{\nu=1}^r [b_{s\nu} c_{\nu\beta}^0 - (\varphi_{s\nu} c_{\nu\beta}^0) \lambda_\beta^0] = w_{s\beta}. \quad (24)$$

Введем дополнительные обозначения

$$\begin{aligned} 1) \delta\lambda_\beta &= \eta_\beta, \quad 2) \delta c_{\nu\beta} = \xi_{\nu\beta}, \quad 3) \sum_{\nu=1}^r \varphi_{s\nu} c_{\nu\beta}^0 = -p_{s\beta}, \\ 4) \lambda_\beta^0 \varphi_{s\nu} &= q_{s\nu}^{(\beta)}, \quad 5) b_{s\nu} - q_{s\nu}^{(\beta)} = g_{s\nu}^{(\beta)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда совокупность уравнений (23) запишется в следующем сжатом виде:

$$\begin{cases} 1) \sum_{\nu=1}^r a_{r\nu} \xi_{\nu\beta} + \mathcal{H}_{r\beta} = \varepsilon_{r\beta}, \\ 2) \sum_{\nu=1}^r g_{s\nu}^{(\beta)} \xi_{\nu\beta} + p_{s\beta} \eta_\beta + w_{s\beta} = \varepsilon_{s\beta}, \end{cases} \quad (26)$$

( $r = 1, 2, \dots, \gamma$ ;  $s = 1, 2, \dots, \sigma$ )  
( $\beta = 1, 2, \dots, n \leq r$ ;  $\sigma < r$ ,  $\gamma + \sigma = \omega > r + 1$ )

или матрично

$$\begin{aligned} 1) \quad & a_{(\gamma r)} \xi_{(rn)} + \mathcal{H}_{(\gamma n)} = \varepsilon_{(rn)}, \\ 2) \quad & g_{(\sigma r)} \xi_{(rn)} + p_{(\sigma n)} \eta_{(nn)} + \mathcal{U}_{(\sigma n)} = \varepsilon_{(\sigma n)}, \\ & (n \leq r; \sigma < r, \gamma + \sigma = \omega > r + 1), \end{aligned} \quad (26^*)$$

где  $\eta_{(nn)}$  — диагональная матрица. Если теперь в (26\*) введем обозначения

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{bmatrix} a_{(\gamma r)} \\ g_{(\sigma r)} \end{bmatrix} = A_{(\gamma + \sigma, r)} = A_{(\omega, r)}, \quad 2) \quad \begin{bmatrix} 0_{(\gamma n)} \\ p_{(\sigma n)} \end{bmatrix} = B_{(\gamma + \sigma, n)} = B_{(\omega, n)}, \\ 3) \quad & \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{(\gamma n)} \\ \mathcal{U}_{(\sigma n)} \end{bmatrix} = K_{(\gamma + \sigma, n)} = K_{(\omega, n)}, \quad 4) \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{(\gamma n)} \\ \varepsilon_{(\sigma n)} \end{bmatrix} = \varepsilon_{(\gamma + \sigma, n)} = \varepsilon_{(\omega, n)}, \end{aligned} \quad (27)$$

то связка (21) из  $2n$  сводов уравнений примет следующий окончательный вид:

$$A_{(\omega r)} \xi_{(rn)} + B_{(\omega n)} \eta_{(nn)} + K_{(\omega n)} = \varepsilon_{(\omega n)}, \quad (\omega > n). \quad (21-28)$$

Так как в матричном уравнении (21—28) предполагается, что  $\omega \cdot r > r \cdot n$  и  $\omega \cdot n > n \cdot n$ , следовательно,  $\omega > n$ , то это матричное уравнение решаем под условием Гаусса

$$\sum_{\beta=1}^r \varepsilon_{(1\omega)}^{(\beta)} \varepsilon_{(\omega 1)}^{(\beta)} = Q^2 = \text{наим.}, \quad (29)$$

откуда вытекают два матричных уравнения [3]:

$$\begin{aligned} A_{(r\omega)}^* A_{(\omega r)} \xi_{(rn)} + A_{(r\omega)}^* B_{(\omega n)} \eta_{(nn)} + A_{(r\omega)}^* K_{(\omega n)} &= 0_{(rn)}, \\ B_{(n\omega)}^* A_{(\omega r)} \xi_{(rn)} + B_{(n\omega)}^* B_{(\omega n)} \eta_{(nn)} + B_{(n\omega)}^* K_{(\omega n)} &= 0_{(nn)} \end{aligned} \quad (30)$$

для определения двух неизвестных матриц  $\xi_{(rn)}$  и  $\eta_{(nn)}$ . Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} 1) \quad & A_{(r\omega)}^* A_{(\omega r)} = P_{(rr)}, \quad 2) \quad A_{(r\omega)}^* B_{(\omega n)} = (B_{(n\omega)}^* A_{(\omega r)})^* = D_{(nr)}, \\ 3) \quad & B_{(n\omega)}^* B_{(\omega n)} = R_{(nn)}, \quad 4) \quad A_{(r\omega)}^* K_{(\omega n)} = S_{(rn)}, \quad 5) \quad B_{(n\omega)}^* K_{(\omega n)} = T_{(nn)}, \end{aligned} \quad (31)$$

то матричные уравнения (30) запишутся более сжато

$$\begin{cases} P_{(rr)} \xi_{(rn)} + D_{(nr)} \eta_{(nn)} + S_{(rn)} = 0_{(rn)} \\ D_{(nr)}^* \xi_{(rn)} + R_{(nn)} \eta_{(nn)} + T_{(nn)} = 0_{(nn)}. \end{cases} \quad (32)$$

Найдя отсюда матрицы-поправки  $\xi_{(rn)}$  и  $\eta_{(nn)}$ , подсчитаем затем согласно (25) и (22) нужные нам основные матрицы  $\lambda_{(nn)}$  и  $c_{(rn)}$ .

$$1) \quad \lambda_{(nn)} = \lambda_{(nn)}^0 + \eta_{(nn)} = \lambda_{(nn)}^0 + \delta \lambda_{(nn)}, \quad 2) \quad c_{(rn)} = c_{(rn)}^0 + \xi_{(rn)} = c_{(rn)}^0 + \delta c_{(rn)}.$$

На этом определение по способу наименьших квадратов основных матриц  $\lambda_{(nn)}$  и  $c_{(rn)}$  заканчивается.

7. Рассчитав матрицу  $c_{(rn)}$  собственных векторов  $\bar{c}_{\beta} = c_{(r1)}^{(\beta)}$  для связки уравнений (21\*), вычислим затем согласно (19) соответствующие присоединенные векторы  $\bar{c}_{\beta\alpha}$ ,  $\alpha = 2, 3, \dots, \partial_{\beta}$  для тех собственных значений  $\lambda_{\beta}$  оператора  $[\Delta + k^2]$ , которые имеют кратность  $\partial_{\beta}$ . Теперь мы можем написать уже уточненный по способу наименьших квадра-



тов полный набор  $\omega_k(x, y)$ , ( $k=1, 2, \dots, r$ ), значений для собственных функций  $\omega(x, y)$  оператора  $(\Delta+k^2)$ , который получится при замене в (17) приближенных  $c_{(xy)}^{*0}$  на уравненные  $c_{xy}^*$ .

$$\omega(x, y) \in \omega_k(x, y) = \sum_{v=1}^r c_{xy}^* \varphi_v(x, y). \quad (17a)$$

Ясно, что в том случае, когда все  $r$  корней  $\lambda_\beta$  уравнения  $|b_{(rr)} - \lambda \varphi_{(rr)}| = 0$  простые, то расчет согласно (19) всех  $r-n$  присоединенных векторов  $\bar{c}_{\beta\alpha}$  отпадает, и мы сразу после решения связки уравнений (21) переходим к расчету набора собственных функций  $\omega(x, y)$  согласно (17a).

8. В заключение определим средне-квадратические разбросы  $m^2(\lambda_\beta)$  и  $m^2[\omega_k(x, y)]$ , найденных по способу наименьших квадратов собственных значений  $\lambda_\beta$  и собственных функций  $\omega_k(x, y)$  оператора  $[\Delta+k^2]$ .

Обобщая известные правила оценки точности в способе наименьших квадратов ([1], [3]), вычислим прежде всего средне-квадратический разброс  $\mu^2$  для совокупности из  $n \leq r$  величин  $\lambda_\beta$  и  $r \cdot n \leq r \cdot r$  величин  $c_{\nu\beta}$ , задаваемых посредством  $\gamma + \sigma = \omega$  уравнений ошибок (21). Мы найдем, что

$$\mu^2 = \frac{Q^2}{\omega \cdot n - (r \cdot n + n)} = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_{(1\omega)}^{(\beta)} \varepsilon_{(\omega 1)}^{(\beta)}}{\omega \cdot n - (r+1)n} = \frac{\sum_{\beta=1}^r \left( \sum_{\gamma=1}^r \varepsilon_{\gamma\beta}^2 + \sum_{s=1}^s \varepsilon_{s\beta}^2 \right)}{[\omega - (r+1)]n}. \quad (33)$$

Далее вычислим средне-квадратические разбросы  $m^2(\lambda_\beta)$  и  $m^2(c_{\nu\beta})$ , ( $\nu=1, 2, \dots, r$ ;  $\beta=1, 2, \dots, n \leq r$ ). С этой целью перепишем пару матричных уравнений (32) в виде связки из  $n$  пар уравнений, соответствующих различным  $\beta=1, 2, \dots, n \leq r$ :

$$\begin{bmatrix} P_{(rr)}^{(\beta)} & D_{(rn)}^{(\beta)} \\ \bar{D}_{(nr)}^{(\beta)} & R_{(nn)}^{(\beta)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{(r1)}^{(\beta)} \\ \eta_{(n1)}^{(\beta)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{(r1)}^{(\beta)} \\ T_{(n1)}^{(\beta)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{(r1)}^{(\beta)} \\ 0_{(n1)}^{(\beta)} \end{bmatrix}, \quad (32)$$

откуда следует, что

$$\begin{bmatrix} \xi_{(r1)}^{(\beta)} \\ \eta_{(n1)}^{(\beta)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} P_{(rr)}^{(\beta)} & D_{(rn)}^{(\beta)} \\ \bar{D}_{(nr)}^{(\beta)} & R_{(nn)}^{(\beta)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{(r1)}^{(\beta)} \\ T_{(n1)}^{(\beta)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \pi_{(rr)}^{(\beta)} & \delta_{(rn)}^{(\beta)} \\ \bar{\delta}_{(nr)}^{(\beta)} & \rho_{(nn)}^{(\beta)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{(r1)}^{(\beta)} \\ T_{(n1)}^{(\beta)} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Тогда

$$1) m^2(c_{\nu\beta}) = \mu^2 \pi_{\nu\nu}^{(\beta)}, \quad 2) m^2(\lambda_\beta) = \mu^2 \rho_{r+\beta, r+\beta}^{(\beta)}. \quad (34)$$

( $\nu=1, 2, \dots, r$ ;  $\beta=1, 2, \dots, n \leq r$ )

Теперь мы должны подсчитать средне-квадратические разбросы  $m^2(c_{\beta\alpha, \delta})$ , ( $\delta=1, 2, \dots, r$ ), составляющих  $c_{\beta\alpha, \delta}$ , для присоединенных векторов  $\bar{c}_{\beta\alpha}$ , принадлежащих некоторому собственному значению  $\lambda_\beta$  кратности  $\partial_\beta$ . Согласно (19)

$$\bar{c}_{\beta\alpha} = (B - \lambda_\beta \Phi)^{\alpha-1} \bar{c}_{\beta 1}, \quad \bar{c}_{\beta 1} = \bar{c}_\beta, \quad (\alpha=2, 3, \dots, \partial_\beta), \quad (19)$$

или в матричном виде

$$c_{(r1)}^{\beta\alpha} = (b_{(r,r)} - \lambda_\beta \varphi_{(rr)})^{\alpha-1} c_{(r1)}^{\beta 1} = d_{(rr)}^{\beta\alpha} c_{(r1) \cdot \beta} \quad (19^*)$$

и в составляющих

$$c_{\beta\alpha,\delta} = c_{\delta}^{(\beta\alpha)} = \sum_{\nu=1}^r d_{\delta\nu}^{(\beta\alpha)} c_{\nu\beta}, \quad (\delta=1,2,\dots,r; \beta=1,2,\dots,n \leq r). \quad (19^{**})$$

Отсюда по общему правилу расчета средне-квадратического разброса  $m_F^2$  функции  $F(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_r)$  от  $r$  неизвестных  $x_j$ , связанных уравнениями ошибок, получим

$$m^2(c_{\beta\alpha,\delta}) = \mu^2 \sum_{\nu,\tau=1}^r (\pi_{\nu\tau} d_{\delta\nu} d_{\delta\tau})_{\beta\alpha}, \quad (35)$$

$$\beta=1,2,\dots,n \leq r; \alpha=2,3,\dots,d_{\beta}).$$

Подсчитаем, наконец, средне-квадратические разбросы  $m^2[\omega_x(x, y)]$ , найденных по способу наименьших квадратов значений  $\omega_x(x, y)$  для собственных функций  $\omega(x, y)$  оператора  $[\Delta + k^2]$ . С этой целью в уточненном представлении (17.1) для собственных функций  $\omega_x(x, y)$  оператора  $[\Delta + k^2]$  заменим приближенные  $c_{\nu\beta}^0$  и  $c_{\beta\alpha,\nu}^0 = f_{\nu\gamma}^0$  на их уравненные значения  $c_{\nu\beta}$  и  $f_{\nu\gamma}$ . Кроме того, учтем выражение (19) присоединенных коэффициентов  $c_{\beta\alpha,\delta} = f_{\delta\gamma}$  через основные коэффициенты  $c_{\nu\beta}$ , которые мы запишем в более удобном виде

$$\text{а) } f_{\nu\gamma} = \sum_{\delta=1}^r d_{\nu\delta} c_{\delta\gamma}, \quad \text{б) } f_{\gamma\delta}^* = \sum_{\nu=1}^r c_{\gamma\nu}^* d_{\nu\delta}^*, \quad (36)$$

$$(\nu=1,2,\dots,r; \gamma=n+1, n+2,\dots,r).$$

Здесь  $c_{\delta\gamma}$  — составляющие тех основных векторов  $\bar{c}_i$  из полной их совокупности  $\bar{c}_{\beta}$ ,  $\beta=1, 2, \dots, n$ , которые участвовали в расчете согласно (19) соответствующих присоединенных векторов  $\bar{c}_{\beta\alpha} = \bar{f}_{\gamma}$ .

Теперь мы можем записать представление (17.1) для собственных функций  $\omega_x(x, y)$  в следующем развернутом виде:

$$\omega_x(x, y) = \begin{cases} \omega_{\beta}(x, y) = \sum_{\nu=1}^r c_{\nu\beta}^* \varphi_{\nu}(x, y) \\ \quad (\beta=1, 2, \dots, n) \\ \omega_{\gamma}(x, y) = \sum_{\delta=1}^r c_{\gamma\delta}^* \left( \sum_{\nu=1}^r d_{\nu\delta}^* \varphi_{\nu}(x, y) \right) = \sum_{\delta=1}^r c_{\gamma\delta}^* \psi_{\delta}(x, y), \\ \quad (\gamma=n+1, n+2, \dots, r) \end{cases} \quad (17.2)$$

где при подсчете  $\omega_{\gamma}(x, y)$  изменен порядок суммирования и введено обозначение

$$\psi_{\delta}(x, y) = \sum_{\nu=1}^r d_{\nu\delta}^* \varphi_{\nu}(x, y). \quad (37)$$

Из полученного представления (17.2) для  $\omega_x(x, y)$  найдем по общему правилу, что

$$\text{а) } m^2[\omega_{\beta}(x, y)] = \mu^2 \varphi_{(1r)}^*(x, y) \pi_{(rr)\varphi(rl)}^{\beta}(x, y), \quad (38)$$

$$(\beta=1, 2, \dots, n \leq r)$$

$$\text{б) } m^2[w_\gamma(x, y)] = \mu^2 \psi_{(1r)}^*(x, y) \pi_{(rr)}^\dagger \psi_{(r1)}(x, y). \\ (\gamma = n+1, n+2, \dots, r)$$

Здесь  $\pi_{(rr)}^\dagger$  — значение матрицы  $\pi_{(rr)}$  для того собственного значения  $\lambda_\beta \in \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , с помощью которого был вычислен согласно (19) принадлежащий ему присоединенный вектор  $\bar{c}_{\beta\alpha} = \bar{f}_\gamma$ .

На этом заканчивается решение поставленной задачи предложенным способом и оценка точности для полученного таким путем решения. Рассмотренный способ без всяких осложнений может быть применен к решению и оценке точности более общей спектральной задачи

$$1) L(x, y)u(x, y) = 0, \quad 2) P(x, y)u(x, y)/_r = 0 \quad (39)$$

с произвольными линейными дифференциальными операторами  $L(x, y)$ ,  $P(x, y)$  и функцией  $u(x, y)$ , не зависящими от времени  $t$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Ф. Крутой. Решение по способу наименьших квадратов краевой задачи для двумерного уравнения Пуассона. Известия ТПИ, настоящий сборник.
2. В. С. Владимиров. Уравнения математической физики. М., «Наука»; 1971.
3. В. Иордан. Руководство по геодезии. Т. 1. Редбюро ГУГК, М., 1939.