ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. С. М. КИРОВА

Том 277 1977

# ТОЧНОЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Б. Ф. КРУТОЙ

(Представлена научным семинаром кафедры инженерной и вычислительной математики)

Дано обыкновенное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=f(x) \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a)+\alpha_1 y'(a)=A \\ \beta_0 y(b)+\beta_1 y'(b)=B \end{cases} \tag{2}$$

в точках $a$, $b$ оси $Ox$ (рис. 1). Коэффициенты $p(x)$, $q(x)$ и свободный член $f(x)$ уравнения (1) будем считать непрерывными функциями от $x$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Требуется при этих условиях найти решение $y(x)$ краевой задачи (1), (2), учитывая, что тогда функция $y(x)$ и ее производные $y'(x)$, $y''(x)$ будут непрерывными на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$.

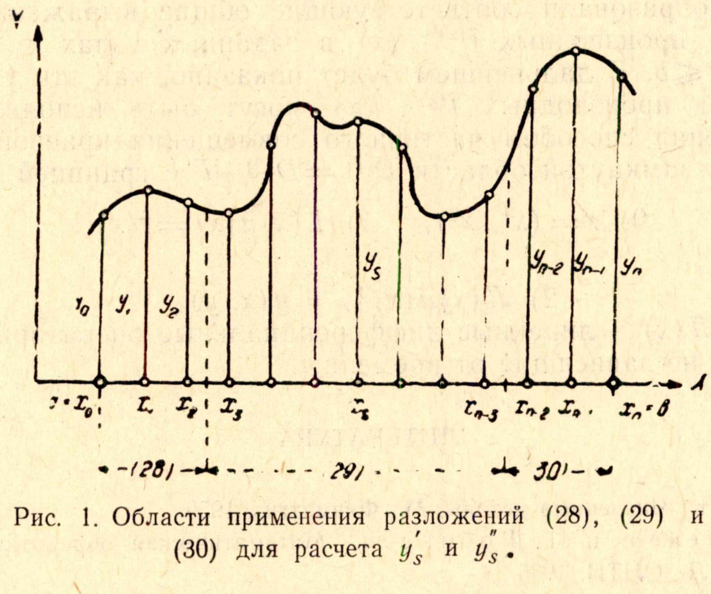


Рис. 1. Области применения разложений (28), (29) и (30) для расчета $y'_s$ и $y''_s$.

Мы поставим своей целью найти численное решение указанной краевой задачи, определив значения $y_s=y(x_s)$ в $n+1$ равноотстоящих точках $x_s$ отрезка $[a, b]$, включая его концы $a=x_0$ и $b=x_n$. Таким образом, если мы обозначим через $h$ цену одного деления отрезка $[a, b]$ при его разбиении на $n$ равных частей

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{x_n-x_0}{n}, \tag{3}$$

то соответствующие точки $x_s$ отрезка $[a, b]=[x_0, x_n]$ определим так:

$$x=x_0+sh, \quad (s=0, 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Предположим теперь, что для $n-1$ внутренних точек $x_s$, $(s=1, 2, \ldots, n-1)$, отрезка $[x_0, x_n]$, задаваемых согласно (3)—(4), мы написали $n-1$ равенств, получаемых при подстановке $x=x_s$ в дифференциальное уравнение (1). Присоединяя сюда еще два краевых условия (2), мы получим свод из $n+1$ алгебраических уравнений 1-й степени

$$\begin{gathered} 1)\ y''(x_s)+p(x_s)y'(x_s)+q(x_s)y(x_s)=f(x_s), \\ (s=1,2,\ldots,n-1) \\ 2)\ \alpha_0 y(x_0)+\alpha_1 y'(x_0)=A. \\ \beta_0 y(x_n)+\beta_1 y'(x_n)=B \end{gathered} \tag{5}$$

с $3(n+1)$ неизвестными $y_s=y(x_s)$, $y'_s=y'(x_s)$, $y''_s=y''(x_s)$ в $n+1$ точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ отрезка $[x_0, x_n]$.

Так как в своде уравнений (5) число $3(n+1)$ неизвестных $y_s$, $y'_s$ и $y_n$, где $s=0, 1, 2, \ldots, n-1, n$, в 3 раза превышает количество $n+1$ самих уравнений, то из этого свода указанная совокупность неизвестных $y_s$, $y'_s$, $y''_s$ не может быть найдена даже грубо, если не привлечь для этой цели способ наименьших квадратов.

Однако есть простой путь избавиться в своде (5) от $2(n+1)$ неизвестных $y'_s$, $y''_s$, если взять достаточно большое число делений $n$ отрезка $[x_0, x_n]$ и учесть, что тогда производные $y'=y'(x_s)$ и $y''_s=y''(x_s)$ могут быть с высокой степенью точности выражены через значения $y_\varkappa=y(x_\varkappa)$, где $\varkappa=0, 1, 2, \ldots, n-1, n$. Покажем, как это сделать.

Прежде всего заметим, что если точка $x$ оси $Ox$ лежит на отрезке $[x_0, x_n]$ и, значит, $x_0\leqslant x\leqslant x_n$, то эта же точка $x$ удовлетворяет и более узкому условию $x_s\leqslant x\leqslant x_{s+1}=x_s+h$. Последнее условие равносильно соотношениям

$$1)\ 0\leqslant\xi\leqslant h,\ 2)\ x=x_s+\xi,\ 3)\ x_{s+1}=x_s+h, \tag{6}$$

откуда вытекает, что тогда можно написать

$$1)\ y(x)=y(x_s+\xi),\ 2)\ y\ (x_{s+1})=y(x_s+h). \tag{7}$$

Введем далее конечно-разностные операторы $E$, $\Delta$, $\delta$, $\mu$, $\nabla$, определив их равенствами [1]:

$$\begin{gathered} 1)\ y(x_{s+1})=y(x_s+h)=E^h y(x_s), \qquad y(x_{s-1})=y(x_s-h)=E^{-h}y(x_s), \\ 2)\ y(x)=y(x_s+\xi)=E^\xi y(x_s), \\ 3)\ y(x_{s+1})-y(x_s)=y(x_s+h)-y(x_s)=E^h y(x_s)-y(x_s)=(E^h-1)y(x_s), \\ 4)\ y(x_s)-y(x_{s-1})=y(x_s)-y(x_s-h)=y(x_s)-E^{-h}y(x_s)=(1-E^{-h})y(x_s), \end{gathered}$$

$$5)\ y(x_{s-1})-y(x_s)=(E^h-1)y(x_s)=\Delta y(x_s), \qquad (8)$$

$$6)\ y(x_{s+1})-y(x_s)=(E^h-1)y(x_s)\delta y(x_{s+\frac{1}{2}})=\delta\, y\left(x_s+\frac{h}{2}\right)=\delta E^{\frac{h}{2}}y(x_s),$$

$$7)\ y(x_s)-y(x_{s-1})=(1-E^{-h})y(x_s)=\delta y(x_{s-\frac{1}{2}})=\delta y\left(x_s-\frac{h}{2}\right)=\delta E^{-\frac{h}{2}}y(x_s)$$

$$8)\ \frac{1}{2}[y(x_{s+\frac{1}{2}})y(x_{s-\frac{1}{2}})]=\frac{1}{2}\left[y\left(x_s+\frac{h}{2}\right)+y\left(x_s-\frac{h}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(E^{\frac{h}{2}}+E^{\frac{-h}{2}}y(x_s)=\mu\, y(x_s),$$

$$9)\ y(x_s)-y(x_{s-1})=(1-E^{-h})y(x_s)=\nabla y(x_s).$$

Из равенств (8) вытекают следующие соотношения между указанными операторами:

$$1)\ 1+\Delta+E^h,\quad 2)\ (1-\nabla)=E^{-h},\quad 3)\ \delta E^{\frac{h}{2}}=(E^h-1)=\Delta,$$

$$4)\ \delta E^{-\frac{h}{2}}=(1-E^{-h})=\nabla,\quad 5)\ \delta=E^{\frac{h}{2}}-E^{-\frac{h}{2}},$$

$$6)\ (1+\Delta)(1-\nabla)=1\quad 7)\ \mu=\frac{1}{2}(E^{\frac{h}{2}}+E^{-\frac{h}{2}}).$$

Используя найденные связи между операторами $E$, $\Delta$, $\nabla$, $\delta$ и $\mu$, напишем нужные нам представления для $y(x)=y(x_s+\xi)$ через нисходящие $\Delta^\nu\ y_s$, центральные $\delta^\nu\ y_s$ и восходящие $\nabla^\nu y_s$ конечные разности с точностью до членов 6-го порядка малости. С этой целью приведем предварительно соотношение (6.1) к виду

$$\frac{0}{h}=0\leqslant\frac{\xi}{h}=t\leqslant\frac{h}{h}=1$$

и затем примем $t=\frac{\xi}{h}$ в качестве нового переменного. Таким образом, мы получим следующие соотношения для $\xi$ и $t$:

$$1)\ \xi=\mathrm{th},\quad 2)\ 0\leqslant\xi\leqslant h,\quad 3)\ 0\leqslant t\leqslant 1. \qquad (10)$$

Теперь мы можем написать с точностью до членов 6-го порядка малости, что:

$$1)\ y(x)=y(x_s+\xi)=E^\xi y(x_s)=E^{th}y(x_s)=(E^h)^t y(x_s)=$$
$$=(1+\Delta)^t y_s=[1+(t)_1\Delta+(t)_2\Delta^2+(t)_3\Delta^3+(t)_4\Delta^4+(t)_5\Delta^5+(t)_6\Delta^6]y_s$$

и, следовательно,

$$y(x_s+\xi)=y_{s+t}=(1+\Delta)^t y_s\approx\sum_{\nu=0}^{6}(t)_\nu\Delta^\nu y_s, \qquad (11)$$

где обозначено

$$(t)_\nu=\frac{t(t-1)\ldots[t-(\nu-1)]}{\nu!};\ (t)_0=1; \qquad (12)$$

$$2)\ y(x_s+\xi)=y_{s+t}=y_s+\frac{1}{2}t(\delta y_{s+1/2}+\delta y_{s-1/2})+\frac{t^2}{2!}\delta^2 y_s+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{t(t^2-1)}{3!}(\delta^3 y_{s+1/2}+\delta^3 y_{s-\frac{1}{2}})+\frac{t^2(t^2-1)}{4!}\delta^4 y_s+ \tag{13}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{t(t^2-1)(t^2-4)}{5!}(\delta^5 y_{s+\frac{1}{2}}+\delta^5 y_{s-\frac{1}{2}})+\frac{t^2(t^2-1)(t^2-4)}{6!}\delta^6 y_s=$$

$$=y_s+t\,\mu\delta y_s+\frac{t^2}{2!}\delta^2 y_s+\frac{t(t^2-1)}{3!}\mu\delta^3 y_s+\frac{t^2(t^2-1)}{4!}\delta^4 y_s+$$

$$+\frac{t(t^2-1)(t^2-4)}{5!}\mu\delta^5 y_s+\frac{t^2(t^2-1)(t^2-4)}{6!}\delta^6 y_s;$$

$$3)\ y(x)=y(x_s-\xi)=E^{-\xi}y(x_s)=(E^{-h})^t y(x_s)=$$

$$=y_{s-t}=(1-\nabla)^t y_s=\sum_{\nu=0}^{6}(-1)^\nu (t)_\nu \nabla^\nu y_s, \tag{14}$$

где коэффициенты $(t)$ определяются согласно (12).

Заметим, что представления (11) и (13) для $y(x_s+\xi)=y_{s+t}$ и $y(x_s-\xi)=y_{s-t}$ называются разложениями Ньютона по нисходящим $\Delta^\nu y_s$ и восходящим $\nabla^\nu y_s$ конечным разностям. Вывод этих разложений очевиден.

Что касается представления (12) для $y(x_s+\xi)=y_{s+t}$, то оно называется разложением Стирлинга по центральным разностям $\delta^\nu\ y_{s+x}$ и получается довольно сложным путем. Чтобы получить это разложение, нужно сначала построить диаграмму Фразера [2] для нисходящих разностей $\Delta^\nu\ y_x$. Затем по этой диаграмме напишем разложения Гаусса по верхней и нижней змейкам, после чего пересчитаем разности $\Delta^\nu\ y_x$ на разности $\delta^\nu y_\lambda$, пользуясь соотношением (4.5). Тогда мы получим следующие два разложения Гаусса для $y(x_s+\xi)=y_{s+t}$:

$$1)\ y(x_s+\xi)=y_{s+t}=y_s+(t)_1\delta y_{s-\frac{1}{2}}+(t+1)_2\delta^2 y_s+$$

$$+(t+1)_3\delta^3 y_{s-\frac{1}{2}}+(t+2)_4\delta^4 y_s+(t+2)_5\delta^5 y_{s-\frac{1}{2}}+(t+3)_6\delta^6 y_s; \tag{14}$$

$$2)\ y(x_s+\xi)=y_{s+t}=y_s+(t)_1\delta y_{s+\frac{1}{2}}+(t)_2\delta^2 y_s+$$

$$+(t+1)_3\delta^3 y_{s+\frac{1}{2}}+(t+1)_4\delta^4 y_s+(t+2)_5\delta^5 y_{s+\frac{1}{2}}+(t+2)_6\delta^6 y_s. \tag{15}$$

Полусумма $\frac{1}{2}$ [(14) + (15)] этих разложений Гаусса дает после простых преобразований разложение Стирлинга (12).

Вернемся снова к разложениям (11) — (13). Наша цель — получить из них ряды для расчета $y_s'$ и $y_s''$, входящих в краевую задачу (1) — (2), представленную в конечно-разностном виде (5). Чтобы построить такие ряды для $y_s'$ и $y_s''$, мы поступим следующим образом.

Выражение первой производной $y_s'$ для всех трех разложений (11) — (13) получим по общему правилу, а именно:

$$1)\ y_s'=y'(x_s)=\text{пред.}_{\xi\to 0}\frac{y(x_s+\xi)-y(x_s)}{\xi}=\text{пред.}_{t\to 0}\frac{y(x_s+th)-y(x_s)}{th}=$$

$$=\underset{t\to 0}{\text{пред.}}\frac{1}{th}\left[t\,\Delta+\frac{t(t-1)}{2\,!}\,\Delta^2+\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3+\ldots+\frac{t(t-1)\ldots(t-5)}{6\,!}\,\Delta^6\right]y_s\,,$$

или окончательно

$$y_s'=y'(x_s)=\left(\frac{dy}{dt}\right)_{y=y_s}=\frac{1}{h}\left(\Delta-\frac{1}{2}\Delta^2+\frac{1}{3}\Delta^3-\frac{1}{4}\Delta^4+\frac{1}{5}\Delta^5-\frac{1}{6}\Delta^6\right)y_s=Dy_s. \tag{16}$$

$$2)\;\; y_s'=y'(x_s)=\underset{\xi\to 0}{\text{пред.}}\frac{y(x_s+\xi)-y(x_s)}{\xi}=\underset{t\to 0}{\text{пред.}}\,\frac{y(x_s+\text{th})-y(x_s)}{\text{th}}=$$

$$=\underset{t\to 0}{\text{пред.}}\frac{1}{\text{th}}\left[t\,\mu\delta y_s+\frac{t^2}{2!}\delta^2 y_s+\frac{t(t^2-1)}{3!}\mu\,\delta^3\,y_s+\frac{t^2(t^2-1)}{4\,!}\delta^4\,y_s+\right.$$

$$\left.+\frac{t(t^2-1)(t^2-4)}{5\,!}\mu\delta^5 y_s+\frac{t^2(t^2-1)(t^2-4)}{6\,!}\delta^6\,y_s\right]$$

или окончательно

$$y_s'=y'(x_s)=\frac{1}{h}\left(\mu\delta\,y_s-\frac{1}{6}\,\mu\delta^3\,y_s+\frac{1}{30}\,\mu\delta^5\,y_s\right)=Dy_s. \tag{17}$$

$$3)\;\; y_s'=y'(x_s)=\underset{\xi\to 0}{\text{пред.}}\,\frac{y(x_s-\xi)-y(x_s)}{-\xi}=\underset{t\to 0}{\text{пред.}}\,\frac{y(x_s-\text{th})-y(x_s)}{-\text{th}}=$$

$$=\underset{t\to 0}{\text{пред.}}\frac{1}{-\text{th}}\left[-t\nabla+\frac{t(t+1)}{2!}\,\nabla^2-\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\,\nabla^3+\ldots+\frac{t(t-1)\ldots(t-5)}{6!}\right]y_s.$$

или окончательно

$$y_s'=y'(x_s)=\left(\frac{dy}{dt}\right)_{y=y_s}=\frac{1}{h}\left(\nabla+\frac{1}{2}\nabla^2+\frac{1}{3}\nabla^3+\frac{1}{4}\nabla^4+\frac{1}{5}\nabla^5+\frac{1}{6}\nabla^6\right)y_s=Dy_s, \tag{18}$$

Чтобы от разложений (16)—(18) для $y_s'$ перейти к разложениям для $y_s''$, введем оператор дифференцирования $D$:

$$D=\frac{d}{dt}\,, \tag{19}$$

откуда вытекает далее, что

$$\frac{d^x}{dt^x}=\left(\frac{d}{dt}\right)^x=D^x,$$

и, значит

$$y_s^{(x)}=\left(\frac{d^x y}{dt^x}\right)_{y=y_s}=D^x\,y_s. \tag{20}$$

Таким образом, в частности,

$$y_s''=\left(\frac{d^2y}{dt}\right)_{y=y_s}=D^2y_s=(DD)y_s. \tag{21}$$

Исходя теперь из разложений (16) — (18) для $y'_s = Dy_s$ и используя оператор дифференцирования $D$, получим следующие три выражения для $y''_s$ с точностью до членов 6-го порядка малости:

$$1)\ y''_s = y''(x_s) = D^2 y_s = \frac{1}{h^2}\left(\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \frac{1}{4}\Delta^4 + \frac{1}{5}\Delta^5 - \frac{1}{6}\Delta^6\right)^2 y_s,$$

или окончательно

$$y''_s = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \frac{5}{6}\Delta^5 + \frac{137}{180}\Delta^6\right) y_s; \tag{21}$$

$$2)\ y''_s = y''(x_s) = D^2 y_s = \frac{1}{h^2}\left(\mu\delta - \frac{1}{6}\mu\delta^3 + \frac{1}{30}\mu\delta^5\right)^2 y_s =$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(\mu^2\delta^2 - \frac{1}{3}\mu^2\delta^4 + \frac{17}{180}\mu^2\delta^6\right) y_s; \tag{*}$$

$$3)\ y''_s = y''(x_s) = D^2 y_s = \frac{1}{h^2}\left(\nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \frac{1}{4}\nabla^4 + \frac{1}{5}\nabla^5 + \frac{1}{6}\nabla^6\right)^2 y_s.$$

или окончательно

$$y''_s = \frac{1}{h^2}\left(\nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12}\nabla^4 + \frac{5}{6}\nabla^5 + \frac{137}{180}\nabla^6\right) y_s. \tag{22}$$

Конечно-разностные выражения (21), (22) для $y''_s$ имеют окончательный вид. Выражение же (*) для $y''_s$ мы преобразуем, выразив в нем $\mu^2$ через $\delta^2$ с помощью соотношений (9.5) и (9.7). Опираясь на эти соотношения, получим при $h=1$:

$$1)\ \mu = \frac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}\right),\quad 2)\ \delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}},\quad 3)\ \delta^2 = E + E^{-1} - 2,$$

$$4)\ \mu^2 = \frac{1}{4}(E + E^{-1} + 2) = \frac{1}{4}[(E + E^{-1} - 2) + 4] =$$

$$= \frac{1}{4}(E + E^{-1} - 2) + 1 = \frac{1}{4}\delta^2 + 1.$$

Следовательно,

$$\mu^2 = \frac{1}{4}\delta^2 + 1. \tag{23}$$

Заменяя далее в (*) множитель $\mu^2$ его выражением (23) через $\delta^2$, найдем еще одно конечно-разностное выражение для $y''_s$:

$$y''_s = y''(x_s) = \frac{1}{h^2}\left[\delta^2 - \frac{1}{12}\delta^4 + \frac{1}{90}\delta^6\right] y_s. \tag{24}$$

В заключение нам нужно полученные конечно-разностные разложения (16) — (18) и (21), (24), (22) для $y'_s$ и $y''_s$ выразить непосредственно через $y_\varkappa$ ($\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n$). Это можно выполнить с помощью соотношений (9.1)—(9.3) для операторов $E$, $\Delta$, $\nabla$, $\delta$, которые при $h=1$ дают

$$1)\ \Delta E-1,\quad 2)\ \delta=E^{\frac{1}{2}}-E^{-\frac{1}{2}}\quad 3)\ \Delta=1-E^{-1}. \tag{25}$$

Из этих соотношений следует далее, что

$$1)\ \Delta^{\nu}y_s=(E-1)^{\nu}y_s,\ 2)\ \delta^{\nu}y_{\varkappa}=(E^{\frac{\nu}{2}}-E^{-\frac{\nu}{2}})y_{\varkappa},\ 3)\ \nabla^{\nu}y_s=(1-E^{-1})y_s \tag{26}$$

Если учесть еще смысл преобразования (8.3), выполняемого оператором $E$ над $y_s$, $y_{\varkappa}$ при $h=1$

$$1)\ E^{\lambda}y_s=y_{s+\lambda},\ 2)\ E^{\pm\frac{\mu}{2}}y_{\varkappa}=y_{\varkappa\pm\frac{1}{2}\mu},\ 3)\ E^{-\lambda}y_s=y_{s-\lambda}, \tag{27}$$

то мы получим следующие выражения $y_s'$, $y_s''$ через $y_{\varkappa}$, ($\varkappa=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$), вытекающие из (16) и (21), (17) и (24), (18) и (22):

$$(\text{А})\ \left\{\begin{aligned} &1)\ y_s'=\frac{1}{60h}[-147\,y_s+360\,y_{s+1}-450\,y_{s+2}+400\,y_{s+3}-\\ &\qquad -225\,y_{s+4}+72\,y_{s+5}-10\,y_{s+6}]\\ &2)\ y_s''=\frac{1}{180h^2}[812\,y_s-3132\,y_{s+1}+5265\,y_{s+2}-5080_{s+3}+\\ &\qquad +2970\,y_{s+4}-972\,y_{s+5}+137\,y_{s+6}]. \end{aligned}\right. \tag{28}$$

$$(\text{Б})\ \left\{\begin{aligned} &1)\ y_s'=\frac{1}{60h}[y_{s+3}-9\,y_{s+2}+45\,y_{s+1}-45\,y_{s-1}+9\,y_{s-2}-y_{s-3}].\\ &2)\ y_s''=\frac{1}{180h^2}[2\,y_{s+3}-27\,y_{s+2}+270\,y_{s+1}-490\,y_s+\\ &\qquad +270\,y_{s-1}-27\,y_{s-2}+2\,y_{s-3}]. \end{aligned}\right. \tag{29}$$

$$(\text{В})\ \left\{\begin{aligned} &1)\ y_s'=\frac{1}{60h}[147\,y_s-360\,y_{s-1}+450\,y_{s-2}-400\,y_{s-3}+\\ &\qquad +225\,y_{s-4}-72\,y_{s-5}+10\,y_{s-6}].\\ &2)\ y_s''=\frac{1}{180h^2}[812\,y_s-3132\,y_{s-1}+5265\,y_{s-2}-5080\,y_{s-3}+\\ &\qquad +2970\,y_{s-4}-972\,y_{s-5}+137\,y_{s-6}]. \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Разложения (28) применяем для расчета $y_s'$ и $y_s''$ при $s=0,\ 1,\ 2$. С помощью разложений (29) выражаем $y_s'$ и $y_s''$ при $s=3,\ 4,\ \ldots,\ n-3$. Наконец, разложения (30) служат нам для расчета $y_s'$ и $y_s''$ при $s=n-2,\ n-1,\ n$ (рис. 1).

Подстановка разложений (28)—(30) для $y_s'$ и $y_s''$ в свод (5) из $(n+1)$ уравнений с $3(n+1)$ неизвестными $y_s$, $y_s'$, $y_s''$ превращает его в свод из $(n+1)$ алгебраических уравнений первой степени с $n+1$ неизвестными $y_{\varkappa}$ ($\varkappa=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$):

$$\begin{cases} 1) \sum\limits_{\varkappa=0}^{n} b_{1\varkappa} y_{\varkappa} = A \\ 2) \sum\limits_{\varkappa=0}^{n} b_{s\varkappa} y_{\varkappa} = 0, \quad (s=1,2,\ldots,n-1). \\ 3) \sum\limits_{\varkappa=n}^{0} b_{n\varkappa} y_{\varkappa} = B \end{cases} \tag{31}$$

Так как выражения (28)—(30) для производных $y_s'$, $y_s''$ даны с высокой степенью точности, то с такой же примерно высокой степенью точности будут получены и значения $y_s$ из решения свода уравнений (31) на ЦВМ. По этой же самой причине значения $y_s$ из решения свода (31) будут найдены с достаточной точностью даже при сравнительно редкой сети соответствующих точек $x_s$ на оси $Ox$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Д. Бут. Численные методы. М., Физматгиз, 1959.

2. Э. Уиттекер и Г. Робинсон. Математическая обработка результатов наблюдений. М.-Л., ОНТИ, 1935.

3. Б. П. Демидович и др. Численные методы анализа. М., Физматгиз, 1963.

4. Л. Коллатц. Задачи на собственные значения. М., «Наука», 1968.