ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. С. М. КИРОВА

Том 277 1977

# К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

В. В. ЗАХАРОВ, В. И. НАПЛЕКОВ, В. Т. ПРЕСЛЕР

(Представлена научным семинаром лаборатории вычислительной техники и автоматизации НИИ ЯФ и А при ТПИ)

В работе [1] на основе интегрального сглаживания получена следующая итерационная схема идентификации линейной формы $F(\vec{x}) = b_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i$.

$$b_k^m = b_k^0 + b_k^{m-1} - \frac{1}{\tau_k}\left(\frac{1}{N_{2k}}\sum_{s_k} y_{s_k}^{m-1} - \frac{1}{N_{1k}}\sum_{r_k} y_{r_k}^{m-1}\right), \tag{1}$$

$$y_j^{m-1} = \sum_{i=1}^{n} b_i^{m-1} x_i^j + b_0^{m-1}, \qquad m = 1,2,\ldots$$

$$b_0^m = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(F_j - \sum_{i=1}^{n} b_i^m x_i^j\right), \tag{2}$$

$$b_k^0 = \frac{1}{\tau_k}\left(\frac{1}{N_{2k}}\sum_{s_k} F_{s_k} - \frac{1}{N_{1k}}\sum_{r_k} F_{r_k}\right), \tag{3}$$

$$r_k \in j_{1k}, \text{ если } x_k^r \in (\alpha_k, \alpha_k + \delta_k),$$

$$s_k \in j_{2k}, \text{ если } x_k^s \in (\beta_k - \delta_k, \beta_k). \tag{4}$$

Множество $j_{1k}$ содержит $N_{1k}$ элементов, множество $j_{2k}$ — $N_{2k}$ элементов, причем

$$j_{1k} \cup j_{2k} = j, \quad N_{1k} + N_{2k} = N.$$

В формулах (1)—(3) обозначено:

$$r_k = t \cdot \delta_k, \; t \geqslant 1,$$

$$\delta = \frac{\beta_k - \alpha_k}{t+1}.$$

Схему (1)—(3) можно записать в матричном виде

$$\vec{B}^m = \vec{B}^0 + \vec{\varepsilon}\, B^{m-1}, \tag{5}$$

где $\vec{B}^0=(b_1^0,\ldots,b_n^0)^T$, ($T$ — символ транспонирования), а элементы матрицы $\varepsilon$ определяются следующим образом:

$$\varepsilon_{kk}=1-\frac{1}{\tau_k}\left(\frac{1}{N_{2k}}\sum_{s_k}x_k^{s_k}-\frac{1}{N_{1k}}\sum_{r_k}x_k^{r_k}\right),$$
$$\varepsilon_{ik}=-\frac{1}{\tau_k}\left(\frac{1}{N_{2k}}\sum_{s_k}x_i^{s_k}-\frac{1}{N_{1k}}\sum x_i^{r_k}\right),\ i=\overline{1,n};\quad i\neq k. \tag{6}$$

Величины $x_i^{s_k}$ и $x_i^{r_k}$ определены соотношениями (4) и в совокупности образуют матрицу наблюдений $\vec{X}=\|x_i^j\|$, $i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,N}$.

Практический интерес представляет:

1) доказательство сходимости процесса;

2) получение вероятностных характеристик вектора коэффициентов $B$;

3) оценка количества вычислений $N$, достаточного для сходимости процесса в условиях помех.

## 1. Сходимость процесса итераций

Пусть на функцию $F(\vec{x})$ аддитивно наложена помеха $\eta$ — случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma_\eta^2$. Функция $F(\vec{x})$ с учетом воздействия помехи $\eta$ в точке $\vec{x}^j$ равна

$$F(\vec{x}^j)=b_0+\sum_{i=1}^{n}b_ix_i^j+\eta_j, \tag{7}$$

где $\eta_j$ — реализация помехи $\eta$ в момент вычисления $F(\vec{x})$.

Рассмотрим выражение (3) для коэффициента $b_k^0$. Учитывая (7), будем иметь

$$b_k^0=\frac{1}{\tau_k}\sum_{i=1}^{n}b_i\left(\frac{1}{N_{2k}}\sum_{s_k}x_i^{s_k}-\frac{1}{N_{1k}}\sum_{r_k}x_i^{r_k}\right)+\bar{\eta}_k, \tag{8}$$
$$\bar{\eta}_k=\frac{1}{\tau_k}\left(\frac{1}{N_{2k}}\sum_{s_k}\eta_{s_k}-\frac{1}{N_{1k}}\sum_{r_k}\eta_{r_k}\right).$$

Или в матричном виде

$$\vec{B}^0=\vec{B}-\vec{\varepsilon}\vec{B}+\vec{\bar{\eta}}, \tag{9}$$

где $\bar{\eta}=(\bar{\eta}_1,\ldots,\bar{\eta}_n)^T$ и $M[\bar{\eta}]=0$ ($M$ — символ математического ожидания).

Из [5] следует

$$\vec{B}^m=\sum_{q=0}^{m}\vec{\varepsilon}^q\vec{B}^0. \tag{10}$$

Подставляя (9) в (10), получим итерационную схему в условиях помех:

$$\vec{B}^m = \vec{B} - \vec{\varepsilon}^{m+1}\vec{B} + \sum_{q=1}^{m} \vec{\varepsilon}^q \vec{\eta} + \vec{\eta}. \tag{11}$$

Известно [2], что ряд типа (11) сходится при $\vec{\varepsilon}^\infty = 0$, и в этом случае

$$\lim_{m\to\infty} M[\vec{B}^m] = \vec{B} + \sum_{q=1}^{\infty} \vec{\varepsilon}^m M[\vec{\eta}] + M[\vec{\eta}] = \vec{B},$$

(ибо $M[\vec{\eta}] = 0$ по предположению).

Таким образом, сходимость итераций (1)—(3) к истинным коэффициентам линейной формы $F(\vec{x})$ в условиях помех доказана.

В качестве следствия из (10) и используя формулу сходящегося матричного ряда [2], получим выражение для коэффициентов $b_i$ через $b_i^0$.

$$\vec{B} = \lim_{m\to\infty} \vec{B}^m = \sum_{q=0}^{\infty} \vec{\varepsilon}^q \vec{B}^0 = (\vec{E} - \vec{\varepsilon})^{-1} \vec{B}^0. \tag{12}$$

Подставляя в (12) выражение (9) для $\mathbf{B}^0$, найдем, что

$$\lim_{m\to\infty} \vec{B}^m = \vec{B} + (\vec{E} - \vec{\varepsilon})^{-1} \vec{\eta}. \tag{13}$$

Отсюда видно, что если число наблюдений $N$ достаточно велико, а распределение случайной величины $\vec{\eta}$ симметрично, то обратная матрица в (13) близка к единичной, дисперсия составляющих $b_k^m$ вектора коэффициентов $\vec{B}^m$ близка к $\sigma^2_{\bar{\eta}_k}$ и имеет порядок (при допущении $N_{1k} - N_{2k} = \frac{1}{2}N$.

$$\sigma^2(b_k) \approx \sigma^2_{\bar{\eta}_k} = \frac{4\sigma^2_\eta}{\tau_k^2 N}. \tag{14}$$

Нетрудно видеть, что порядок оценки (14) тот же, что и в линейном ортогональном планировании [3]. Таким образом, очевидна перспективность методики интегральной идентификации в задачах планирования экспериментов и оптимизации в условиях пассивного эксперимента.

## 2. Статистический анализ соотношений метода интегральной идентификации

Представляет интерес получение более точных выражений для дисперсий $\sigma^2(b_k)$ и ковариаций $\mathrm{cov}\,(b_i\, b_j)$, отличных от нуля вследствие статистической зависимости между коэффициентами $b_k$.

Введем аналогично тому, как это делается в [4], матрицу ковариаций.

$$M\{[\vec{B}^m - M(\vec{B}^m)][\vec{B}^m - M(\vec{B}^m)]^{\text{т}}\} = \vec{C}^m \sigma_\eta^2,$$

$$\text{где } \vec{C}^m = \sum_{j=0}^{m} \vec{\varepsilon}^j \vec{G} \sum_{j=0}^{m} (\vec{\varepsilon}^{\text{т}})^j,$$

$\vec{G}$ — диагональная матрица с диагональным элементом

$$g_{ij} = \frac{1}{\tau_i^2}\left(\frac{1}{N_{1i}} + \frac{1}{N_{2k}}\right).$$

При $m \to \infty$ матрица ковариаций коэффициентов $\vec{C}^m \to \vec{C}$.

$$\vec{C} = (\vec{E} - \vec{\varepsilon})^{-1}\vec{G}[(\vec{E} - \vec{\varepsilon})^{-1}]^{\text{т}}.$$

Если принять во внимание и свободный член $b_0^m$, то матрица ковариаций $C^m$ дополнится еще одной строкой и столбцом.

$$M\{[b_0^m - M(b_0^m)][\vec{B}^m - M(\vec{B}^m)]\} = -\sigma_r^2 \vec{C}^m \vec{a}^{\text{т}},$$

где

$$\vec{a} = \left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_1^j, \ldots, \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_n^j\right)^{\text{т}}.$$

$$M\{b_0^m - M(b_0^m)\}^2 = \sigma_\eta^2\left[\frac{1}{N} + a\vec{C}^m \vec{a}^{\text{т}}\right].$$

### 3. Об оценке количества наблюдений

Сходимость процесса итераций в п. 2 получена в предположении $\vec{\varepsilon}^\infty = 0$. Это, в свою очередь, выполняется, если любая из норм матрицы $\vec{\varepsilon}$ меньше 1. Выберем в качестве нормы матрицы $\varepsilon$ совокупность собственных чисел матрицы $\vec{\varepsilon}$. Для собственных чисел $\lambda_i$ произвольной действительной неособой матрицы $\vec{\varepsilon}$ порядка $n \times n$ справедлива оценка [5]:

$$\max_{i=\overline{1,N}} \lambda_i^2 \leqslant w, \quad w = s - (s^n - nd^2(n-1)^{n-1},$$

где

$$s = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_{ij}^2,$$

d — определитель матрицы $\vec{\varepsilon}$.

Найдем функцию распределения случайной величины $w$. Будем считать, что $x_i^j$ независимы и имеют одну и ту же симметричную функцию распределения. Можно тогда показать, что $\varepsilon_{ij}$ некоррелированы, а при больших $n$ почти все они независимы: именно независимы те

$\varepsilon_{i_1j_1}$ и $\varepsilon_{i_2j_2}$, у которых $(i_1 \neq i_2) \wedge (j_1 \neq j_2) \wedge (i_1 \neq j_2) \wedge (i_2 \neq j_1)$ — таких $\varepsilon_{ij}$ $n(n^2-1)/2+2n^3+n^2+n$ из всего количества пар $n^2(n^2-1)/2$.

Количество независимых пар $\varepsilon_{ij}$ к количеству зависимых относится приблизительно, как $n/4$.

Из (6) видно, что $\varepsilon_{ik}$ имеет распределение, близкое к нормальному, с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma_\varepsilon^2 \approx \frac{4}{\tau^2 N} \sigma^2$ ($\sigma^2$ — дисперсия случайной величины $x_i^j$). Величина $s_1 = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_{ij}^2$ в силу независимости $\varepsilon_{ij}$ имеет $\chi^2$-распределение и, следовательно, величина $s = \sigma_\varepsilon^2 s_1$ имеет плотность распределения:

$$f(s) = \frac{1}{2^{\frac{n^2}{2}} \Gamma\left(\frac{n^2}{2}\right)} \cdot \left(\frac{s}{\sigma^2}\right)^{\frac{n^2}{2}-1} \exp\left(-\frac{s}{2\sigma_\varepsilon^2}\right). \tag{15}$$

Определитель $d$ есть сумма $n!$ независимых нормально распределенных с дисперсией $\sigma_1^2 = \left(\frac{4}{\tau^2}\sigma^2\right)^n$ слагаемых и, следовательно, $d$ распределен нормально с дисперсией $n!\left(\frac{2\sigma}{\tau}\right)^{2n}$ и нулевым математическим ожиданием, а величина $z = nd^2(n-1)^{n-1}$ имеет плотность распределения:

$$f_z(z) = \frac{1}{\left(\frac{2}{\tau}\sigma\right)^n \sqrt{2\pi n(n-1)^{n-1} n! z}} \cdot e^{\overline{\frac{\Gamma z}{2n!\left(\frac{2}{\tau}\sigma\right)^{2n}}}}. \tag{16}$$

Функция распределения величины $w = s - (s^n - z)^{\frac{1}{n}}$ определяется по формуле (6):

$$F_w(w) = \iint f(s,z)\,ds\,dz. \tag{17}$$

$$s - (s^n - z)^{\frac{1}{n}} = w.$$

Считая $s$ и $z$ независимыми и подставляя (15) и (16) в (17), будем иметь после несложных преобразований:

$$F_w(w) = \frac{1}{2^{\frac{n^2}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n^2}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{s^{\frac{n^2}{2}-1}}{e^{\frac{s}{2\sigma^2}}} \Phi\left(\frac{s^n - (s-w)^n}{2n(n-1)^{n-1} n! \left(\frac{2\sigma}{\tau}\right)^{\frac{2}{n}}}\right) ds. \tag{18}$$

Задавая $n$, распределение $x$ и вероятность $P$, с которой должна сходиться процедура (1), получим из (18) трансцедентное уравнение для оценки количества наблюдений $N$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. В. В. Захаров. Идентификация статического объекта с помощью интегральных проекций. Настоящий сборник.
2. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеев. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1960.
3. В. В. Налимов, Н. А. Чернова. Статистические методы планирования экспериментов. М., «Наука», 1965.
4. Ю. В. Линник. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1962.
5. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений. Т. II, Физматгиз, 1960.
6. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. Физматгиз, 1961.
7. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1971.