

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

На правах рукописи

Фам Чонг Хай

**СИНТЕЗ КОНТУРА УПРАВЛЕНИЯ КРЕНОМ КВАДРОКОПТЕРА С
БЕСКОНТАКТНЫМ ДВИГАТЕЛЕМ ПОСТОЯННОГО ТОКА**

Специальность 2.3.1 – Системный анализ, управление и обработка информации,
статистика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
Доктор технических наук, доцент
Шилин Александр Анатольевич

Томск – 2026

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	4
Глава 1. ОБЗОР И АНАЛИЗ ПОДХОДОВ К ПОСТРОЕНИЮ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ КАНАЛАМИ КРЕНА И ТАНГАЖА КВАДРОКОПТЕРА.....	12
1.1 Анализ динамических свойств квадрокоптера и проблем управления ориен- тацией в каналах крена и тангажа.....	12
1.1.1 Анализ состояния исследований в области управления квадрокоптерами	12
1.1.2 Проблемы стабилизации углов крена и тангажа в управлении квадроко- птера.....	14
1.2 Анализ системы автоматического управления квадрокоптера.....	17
1.3 Анализ эффективности классических PID-регуляторов в задачах управления квадрокоптером.....	19
1.4 Скользящий режим в задачах робастного управления нелинейными система- ми.....	23
1.5 Анализ оптимального управления по быстродействию на основе принципа максимума.....	26
Глава 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МОМЕНТА В BLDC-МОТОРЕ И КОНСТРУКТИВНОЙ АСИММЕТРИИ НА ДИНАМИКУ КВАДРОКОПТЕРА.....	31
2.1 Исследование динамики электромагнитного момента в BLDC-моторе.....	31
2.2 Построение математической модели квадрокоптера с учётом спектральных составляющих.....	38
2.3 Анализ влияния конструктивной асимметрии корпуса квадрокоптера на ди- намику его движения.....	45
Глава 3. СИНТЕЗ КОНТУРА УПРАВЛЕНИЯ ПО КАНАЛУ КРЕНА (ТАНГАЖА)	52
3.1 Синтез линейной системы в точках равновесного состояния.....	56
3.2 Синтез фильтра Калмана.....	65

3.3 Построение скользящего режима управления.....	76
3.4 Реализация оптимального управления по быстродействию.....	84
Глава 4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРЕДЛОЖЕННЫХ МЕТОДОВ.....	95
4.1 Экспериментальное исследование спектральных составляющих выходных сигналов датчиков.....	99
4.2 Разработка установки для проведения эксперимента.....	105
4.3 Результаты экспериментальных исследований по применению фильтра Кал- мана в сочетании с предложенным PD-PI-регулятором.....	110
4.4 Результаты экспериментального исследования системы управления креном на основе скользящих режимов.....	122
Заключение.....	131
Список условных обозначений.....	133
Список литературы.....	136
Приложение А. Акты внедрения диссертационной работы.....	152

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Современное развитие беспилотных летательных аппаратов, в частности квадрокоптеров, связано с необходимостью решения задач, направленных на повышение точности и устойчивости управления, снижение влияния возмущающих факторов и обеспечение надёжности функционирования в условиях реальных полётов. Одним из ключевых направлений является совершенствование методов управления движением и ориентацией аппарата при наличии конструктивных и эксплуатационных ограничений, а также внешних и внутренних возмущений.

В настоящее время квадрокоптеры находят широкое применение в различных сферах: мониторинг инфраструктуры, доставка грузов, медиа и развлечения, поисково-спасательные операции и др. При этом успешная реализация перечисленных задач во многом зависит от точности работы системы управления (СУ) и качества измерений датчиков. Бесконтактные двигатели постоянного тока (BLDC-моторы), широко применяемые в конструкции квадрокоптеров, вносят в систему измерения помехи, спектральный состав которых существенно отличается от классического гауссовского шума. Эти возмущения осложняют работу системы, особенно при выполнении высокоточных манёвров, и могут приводить к снижению устойчивости контуров управления.

Дополнительную сложность при управлении квадрокоптером вносит конструктивная асимметрия. Даже незначительные различия в характеристиках двигателей, несущих элементов рамы или датчиков, а также смещение центра масс (например, вследствие расположения аккумулятора), приводят к несоответствию математической модели объекта управления. Это отрицательно сказывается на динамике квадрокоптера и повышает вероятность возникновения колебаний. Традиционные линейные методы управления, включая PID-регуляторы, в подобных условиях показывают ограниченную эффективность, поскольку их корректив-

рующего действия недостаточно для компенсации вибрационных возмущений без применения методов фильтрации, в частности фильтра Калмана (ФК).

В связи с этим актуальным представляется исследование контура управления креном и тангажом квадрокоптера с учётом не только гауссовских шумов, но и вибраций, порождаемых BLDC-моторами. Такой подход обеспечивает более адекватное описание динамики системы и служит основой для решения задач в пространстве фазовых поверхностей. В рамках этого направления рассматриваются законы управления на основе скользящих режимов и оптимального быстродействия, направленные на повышение робастности и быстродействия СУ квадрокоптером.

Научная проблема заключается в отсутствии комплексного подхода к синтезу СУ в пространстве фазовых поверхностей, обеспечивающего одновременный учёт спектральных характеристик вибрационных возмущений, порождаемых BLDC-моторами, и конструктивной асимметрии квадрокоптера. В то же время недостаточно разработаны методы синтеза регуляторов для каналов управления, объединяющие оценку вектора состояния с использованием ФК, робастность, присущую методу скользящего режима (SMC), и высокое быстродействие, характерное для оптимального управления на основе принципа максимума.

Таким образом, актуальность диссертационной работы обусловлена следующими факторами: высокой практической значимостью задачи управления квадрокоптером в условиях воздействия вибрационных возмущений, порождаемых BLDC-моторами, и конструктивной асимметрии корпуса, а также недостаточной разработанностью гибридных регуляторов, сочетающих оценку вектора состояния (с использованием ФК), робастность метода скользящих режимов и быстродействие оптимального управления. Решение этих задач соответствует современным требованиям к развитию теории автоматического управления, повышению надёжности беспилотных авиационных систем и расширению сфер их применения в промышленности и научных исследованиях.

Решению поставленной задачи в смежных областях науки посвящено значительное число исследований. В области моделирования и управления полётом квадрокоптера можно отметить работы отечественных авторов, среди которых Красовский А.Н., Рутковский В.Ю., Визильтер Ю.В., Зеленский В.А., Павловский В.Е., Шавин М.Ю., Масленников А.Л., Баранов О.В. и др, уделяющие внимание вопросам построения динамических моделей и стабилизации движения. Зарубежные исследователи, такие как Beard R.W., McLain T.W., Chung S.J., Schoellig A.P. и др, активно публикуют результаты в области управления многороторными летательными аппаратами с использованием классических методов. Исследования в области оптимального управления по критерию быстродействия, а также методов SMC, активно ведутся с 1970-х годов. В отечественной науке можно выделить работы таких исследователей, как Фельдбаум А.А., Емельянов С.В., Уткин В.И., Клюев А.С., Колесников А.А., Осипов Ю.С., Соловьёв А.В. и др, уделявших внимание методам решения данной задачи и разработке алгоритмов управления, обеспечивающих минимальное время ПП и устойчивость системы.

В целях практической реализации надёжной и воспроизводимой СУ квадрокоптером целесообразно использовать современные методы анализа динамики, основанные на математическом моделировании, что позволяет синтезировать контуры стабилизации крена и тангажа. На основе математической модели может быть построена комбинированная система управления, в которой классические PID-регуляторы дополняются элементами, реализующими принципы оптимального управления или SMC. При подтверждении эффективности предложенного подхода становится возможным разработать методику настройки регуляторов, ориентированную на реализацию на микроконтроллерных платформах с ограниченными вычислительными ресурсами.

Целью диссертационной работы является разработка и экспериментальные исследования методов и алгоритмов управления контуром крена квадрокоптера.

В связи с поставленной целью должны быть решены следующие **задачи**:

- Анализ проблем управления динамикой квадрокоптера.

- Исследование математической модели BLDC-мотора для определения переходной характеристики электромагнитного момента на валу.
- Разработка математической модели квадрокоптера с учётом моментов на валах двигателей и конструктивной асимметрии.
- Построение фильтра Калмана, учитывающего сигнал управления, спектральные возмущения и асимметрию конструкции.
- Синтез алгоритма построения фазовых траекторий, включая скользящий режим и оптимальное управление по быстрдействию на основе принципа максимума для управления креном квадрокоптера;
- Аппаратная реализация предложенных алгоритмов на микроконтроллерной платформе.

Методы исследования. В работе использовались анализ математических моделей основных элементов системы и исследование её функционирования в различных режимах моделирования. Для верификации полученных моделей была разработана экспериментальная установка. Численное моделирование проводилось в среде Python, а экспериментальные испытания – на лабораторном стенде с применением языка C++.

Достоверность полученных результатов диссертационной работы подтверждается экспериментальными исследованиями, проведенными как на компьютерных моделях, так и на специально разработанной физической установке. Полученные в диссертации результаты и выводы согласуются с данными, представленными другими авторами.

Научная новизна:

1. Предложена математическая модель квадрокоптера, позволяющая учитывать влияние спектральных составляющих электромагнитного момента BLDC-мотора на показания инерциальных датчиков и конструктивной асимметрии корпуса на динамику полета.
2. Предложена модификация каскадного PD-PI-регулятора, в которой управляющий сигнал разделен на постоянную и вариативную составляющие с

учётом ограничения скорости его изменения, что обеспечивает корректное использование регулятора совместно с фильтром Калмана и повышает устойчивость системы при действии вибрационных возмущений и конструктивной асимметрии.

3. Разработан алгоритм, формирующий фазовую траекторию для объектов 2-го порядка, обеспечивающий согласованный переход от оптимального управления по фазовой поверхности вне области равновесия к линейному PD-управлению внутри этой области, что обеспечивает сохранение быстродействия и робастности системы, а также минимизацию колебаний при воздействии возмущений.

Практическая ценность работы. Полученные результаты подтверждены как теоретическим моделированием, так и экспериментальными испытаниями на действующем квадрокоптере, что свидетельствует об их работоспособности и пригодности для практического применения. Разработанные методы и алгоритмы целесообразно использовать при изучении лётных характеристик и проведении лабораторных занятий со студентами, а также при совершенствовании систем управления квадрокоптерами сторонних разработчиков с целью повышения точности оценки состояния и устойчивости к вибрационным и конструктивным возмущениям.

Реализация и внедрение результатов работы. Разработанная экспериментальная платформа для исследования контуров управления креном и тангажом внедрена в учебный процесс и применяется в рамках лабораторных работ по курсам, посвящённым методам настройки PID-регуляторов с использованием фильтра Калмана в отделении электроэнергетики и электротехники Томского политехнического университета, а также в Томском государственном университете. Предложенный подход к построению фильтра Калмана применён в системах управления давлением повышающих насосных станций, разрабатываемых в «НПО ВЭСТ» (г. Томск, РФ). Акты о внедрении результатов работы приложены к диссертации.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Предложенная математическая модель динамики квадрокоптера в канале крена, учитывающая момента переключение потокосцепления на валах BLDC-моторов и конструктивную асимметрию, обеспечивает повышение адекватности описания объекта управления по сравнению с известными моделями, что подтверждается присутствием спектра смоделированных вибрационных помех в данных натурных экспериментов.
2. Предложенный алгоритм синтеза фильтра Калмана, использующий сигнал управления, разложенный на постоянную и вариативную составляющие во вложенной структуре PD-PI-регулятора, обеспечивает оценку угла крена, угловой скорости, углового ускорения и позволяет снизить среднеквадратическое отклонение оценок по сравнению с классическим ФК приблизительно в 3,5 раза – в режиме низких оборотов двигателей и на 24,3% – в режиме высоких оборотов, повышая тем самым точность и достоверность информации, используемой для построения СУ на фазовой плоскости.
3. Разработанный алгоритм формирования фазовой траектории переключения для объектов второго порядка на основе метода оптимального управления по быстрдействию или скользящего режима, интегрированный с линейным PD-регулятором, обеспечивает высокое быстрдействие переходного процесса или робастность системы стабилизации крена: работоспособность сохраняется при десятикратном отклонении параметров модели от номинальных значений, в установившемся режиме автоколебания отсутствуют, а по сравнению с традиционными алгоритмами достигнуто снижение среднеквадратического отклонения оценок на 28-39 % и уменьшение интегральной энергоёмкости сигнала управления на 45 %.

Апробация результатов работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях:

III Всероссийская с международным участием молодёжная конференция «Бу-таковские чтения», г. Томск, ТПУ, 2023 г; Всероссийская школа молодых учёных

«Цифровизация, декарбонизация и децентрализация современной электроэнергетики», г. Севастополь, СевГУ, 2024 г; IEEE 25th International Conference of Young Professionals in Electron Devices and Materials (EDM), г. Алтай, 2024; IV всероссийская с международным участием молодежная конференция «Бутаковские чтения», г. Томск, ТПУ, 2024; Электронные средства и системы управления. Материалы докладов Международной научно-практической конференции, г. Томск, ТУСУР, 2024; XVI Научно-практическая конференция «Планирование и управление электроэнергетическими системами», г. Новосибирск, НГТУ, 2025.

Публикации. Основные результаты исследований отражены в 12 публикациях: 5 статей в научных журналах и изданиях, рекомендуемых ВАК, из которых 3 статьи в журналах, индексируемых в базе данных Scopus; 6 статей в сборниках трудов международных и российских конференций; 1 свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 154 страницы, включая 65 рисунков и 9 таблиц. Список литературы содержит 133 наименования.

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулирована цель исследований, определены решаемые задачи, указаны научная новизна и практическая ценность результатов работы.

В первой главе выполнен анализ проблем управления каналами крена и тангажа квадрокоптера, обусловленных нелинейностью и межканальной взаимосвязью его динамики. Рассмотрены классические методы синтеза систем управления. На основе выявленных ограничений обоснован предлагаемый подход.

Во второй главе рассмотрена математическая модель BLDC-мотора для определения переходной характеристики момента переключения потокоцепления. Данный момент влияет на показания датчиков. Предложено включить его в математическую модель, а также учитывать конструктивную асимметрию корпуса при построении общей модели квадрокоптера.

В третьей главе проведён синтез линейной системы управления каналами крена и тангажа с предложенным PD-PI-регулятором. Для обеспечения работы контура при воздействии гауссовских шумов и спектральных составляющих построен фильтр Калмана. Дополнительно проведено исследование методов управления на основе фазовых траекторий, включая скользящий режим и оптимальное управление по быстродействию на основе принципа максимума.

В четвёртой главе представлены результаты экспериментальной проверки предложенных подходов, а также выполнен их сравнительный анализ как между собой, так и с классическим подходом, принятым в качестве эталонного решения.

Глава 1. ОБЗОР И АНАЛИЗ ПОДХОДОВ К ПОСТРОЕНИЮ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ КАНАЛАМИ КРЕНА И ТАНГАЖА КВАДРОКОПТЕРА

В данной главе рассмотрены особенности управления по каналам крена и тангажа квадрокоптера, приведены основные характеристики объекта управления и представлена структура системы автоматического управления, обеспечивающей устойчивость полёта. Проведён анализ существующих методов синтеза регуляторов – от классических PID-алгоритмов до современных подходов, основанных на методе скользящего режима и оптимального управления по быстродействию на принципе максимума. Представлен подход к синтезу системы управления квадрокоптером, предложенный в данной диссертационной работе.

1.1 Анализ динамических свойств квадрокоптера и проблем управления ориентацией в каналах крена и тангажа

1.1.1 Анализ состояния исследований в области управления квадрокоптерами

Управление беспилотными летательными аппаратами, в частности квадрокоптерами, остаётся одним из активно развивающихся направлений в области автоматического управления в настоящее время. Квадрокоптер – это много роторный беспилотный летательный аппарат с четырьмя несущими винтами, закреплёнными на симметричной раме в конфигурации типа «X» или «+» [1]. Благодаря конструктивной простоте, способности к вертикальному взлёту и удержанию в стационарной позиции, квадрокоптеры находят широкое применение в различных прикладных задачах, включая аэрофотосъёмку, технический мониторинг, поисково-спасательные операции и научные исследования и т.д [2-4].

В последние десятилетия наблюдается активное развитие научных исследований, посвящённых динамике и СУ квадрокоптера, что подтверждается значи-

тельным количеством публикаций в отечественной и зарубежной литературе. Анализ современной литературы подтверждает, что управление квадрокоптерами остаётся активно развивающимся направлением, охватывающим широкий спектр задач – от математического моделирования и построения систем стабилизации до траекторного слежения, обработки сенсорной информации и адаптации к внешним возмущениям. В частности, в работах [5-12] подробно рассматриваются практические аспекты функционирования таких аппаратов, включая реализацию алгоритмов управления в условиях реальных полётов и воздействий внешней среды.

К числу наиболее разработанных направлений исследований в области управления квадрокоптерами относятся:

- разработка математических моделей динамики полёта [5, 6];
- синтез алгоритмов стабилизации положения и ориентации [7, 8];
- методы фильтрации и оценивания вектора состояния [9, 10];
- разработка адаптивных и робастных регуляторов [11, 12].

Динамика квадрокоптера описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений с шестью степенями свободы (6-DOF), включающими три координаты поступательного движения и три угла ориентации. Управляющие воздействия формируются за счёт изменения скоростей вращения четырёх электродвигателей ($\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$), что позволяет генерировать подъёмную силу для каждого мотора (f_i) и создаёт моменты по трём осям: крена (θ), тангажа (ϕ) и рыскания (ψ) [13].

Ориентация квадрокоптера задаётся в виде углов Эйлера, определяемых в связанной с аппаратом системе координат, тогда как его поступательные перемещения описываются в инерциальной системе, связанной с землёй. Для учёта взаимного преобразования между этими системами координат используются матрицы поворота и кватернионное представление ориентации, что позволяет избежать сингулярностей при вычислениях и обеспечить корректное описание пространственного движения [1, 4]. Связь между системами координат учитывается

при формализации кинематических и динамических уравнений, представленных на рисунке 1.1.

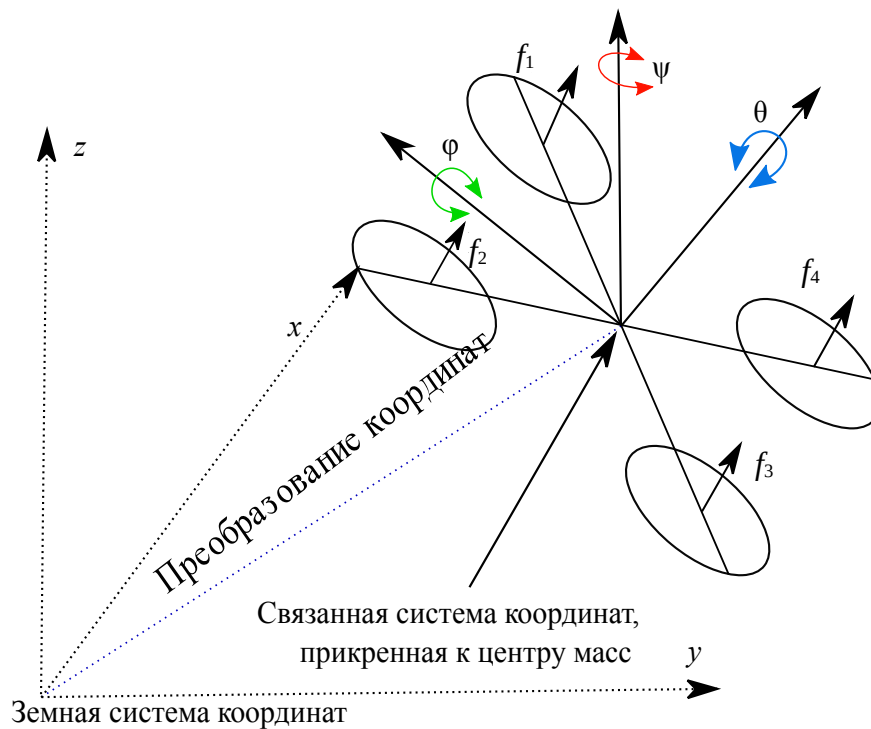


Рисунок 1.1 – Системы координат, используемые для описания пространственного движения квадрокоптера

1.1.2 Проблемы стабилизации углов крена и тангажа в управлении квадрокоптера

Управление ориентацией квадрокоптера является одной из ключевых задач в построении систем автоматического управления квадрокоптера. Наиболее критичными с точки зрения устойчивости и управляемости выступают каналы крена и тангажа, так как именно они определяют пространственную ориентацию аппарата, а также обеспечивают его движение относительно горизонтальной плоскости. Нарушения в этих каналах приводят к дестабилизации полёта, отклонению от заданной траектории и снижению способности к компенсации внешних возмущений.

Результаты управляющего воздействия, прикладываемые по каналу крена, оказывает влияние не только на соответствующую ось, но и вызывает отклик в динамике тангажа и рыскания. Подобная межосевая взаимосвязь обусловлена ги-

роскопическими моментами, инерционными перекрёстными связями, а также конструктивной асимметрией рамы [14].

На практике асимметричное распределение массы, возникающее, например, при установке подвесной камеры, несимметричном размещении аккумулятора, манипулятора или при изменении конфигурации полезной нагрузки, оказывает существенное влияние на динамику полёта и точность управления квадрокоптером [15]. Такие изменения приводят к смещению центра масс и перераспределению моментов инерции, что нарушает согласованность управляющих воздействий и может вызывать дрейф, колебания либо снижение устойчивости полёта, вплоть до потери управляемости квадрокоптера. Несмотря на значимость указанных факторов, во многих публикациях их влияние либо игнорируется, либо рассматривается в упрощённой форме, что существенно ограничивает применимость соответствующих алгоритмов управления в условиях реальной эксплуатации [5-8].

Существенная нелинейность проявляется и в аэродинамике винтов: тяга и создаваемый момент зависят квадратично от частоты вращения и зависят от взаимного расположения воздушных потоков. В результате реакция аппарата на управляющую команду определяется текущим режимом полёта и состоянием среды. Дополнительные трудности создают внешние возмущения: порывы ветра, сдвиги воздушных масс около препятствий, эффект близости земли или стен [16]. Все они формируют непредсказуемые моменты и силы, требующие быстрой компенсации.

Не меньшую роль в точности управления играет ограниченность информации из инерциальных измерительных датчиков (IMU). Гироскопы обеспечивают измерение угловых скоростей, однако подвержены шумам и дрейфу [17]. Акселерометры регистрируют линейные ускорения, включая компоненту силы тяжести, при этом их показания искажаются при вращении объекта, в частности из-за влияния центробежных составляющих [18]. Сигнал IMU содержит как широкополосный стохастический шум, обусловленный внутренними шумами датчиков, так и узкополосные гармоники, возникающие из-за вращения моторов и резонансных

свойств конструкции летательного аппарата [19], что приводит к снижению точности оценки состояния.

В работах [20, 21] экспериментально зафиксированы узкополосные пики в диапазоне 100-300 Гц, обусловленные работой BLDC-моторов и передающиеся на корпус летательного аппарата. Эти колебания накладываются на измеренные значения угловых скоростей и ускорений, искажают фазовую ошибку и влияют на качество работы управляющего алгоритма. Особенно это критично для регуляторов, чувствительных к производным (например, при построении фазовой поверхности).

Для подавления возмущений, влияющих на точность управления, на практике применяются как методы частотно-селективной фильтрации, так и алгоритмы оценки состояния. Узкополосные вибрации подавляются notch-фильтрами как в проектах Betaflight, ArduPilot, широкополосный шум - низкочастотными фильтрами. Для объединения данных датчиков и учёта смещений применяют комбинированные фильтры [22] и различные реализации ФК [23]. При проектировании фильтрационной схемы необходимо согласовывать частотные и фазовые характеристики, обеспечивая минимальные задержки и предотвращая возбуждение контура остаточными резонансными колебаниями. Избыточная фильтрация приводит к снижению быстродействия системы, тогда как недостаточная - к проникновению шумов и возмущению контура управления.

Как отмечено в работах [24, 25], динамика исполнительных механизмов квадрокоптера ограничена временем нарастания момента, задержкой в работе электронного регулятора скорости (ESC-преобразователя), наличием насыщения и гистерезиса. Эти ограничения приводят к запаздыванию в отклике и особенно заметных в канале крена при агрессивных манёврах.

Таким образом управление каналами крена и тангажа квадрокоптера осложняется нелинейностью динамики, ограничениями датчиков и исполнительных механизмов, внешними возмущениями, изменчивостью параметров модели и конструктивной асимметрией корпуса. Учёт совокупности этих факторов необхо-

дим для построения эффективной системы управления, обеспечивающего требуемую устойчивость и точность в реальных условиях эксплуатации.

1.2 Анализ системы автоматического управления квадрокоптера

Существует множество исследований, посвящённых системам управления квадрокоптером, которые представляют ценный источник решений для разработки и оптимизации алгоритмов управления [26-30]. Полученные в этих работах подходы позволяют эффективно повышать управляемость квадрокоптеров в различных прикладных задачах и условиях эксплуатации.

Исторически развитие теории управления квадрокоптерами прошло несколько этапов. На ранних стадиях замкнутые контуры стабилизации реализовывались преимущественно с использованием аналоговых регуляторов, которые обеспечивали управление ориентацией объекта с помощью PID-алгоритмов. С развитием цифровых бортовых контроллеров и увеличением вычислительных возможностей стало возможным внедрение более сложных методов, включая оптимальные и робастные алгоритмы управления. В современных САУ применяется широкий спектр решений: от простых для любительских квадрокоптеров (например PX4, Betaflight) до высокопроизводительных платформ профессиональных автопилотов (ArduPilot, DJI и др.), обеспечивающих интеграцию множества сенсорных данных и выполнение сложного планирования траектории полёта.

Оптимизация лётных характеристик квадрокоптеров действительно представляет собой одну из центральных задач в области современных систем управления беспилотными летательными аппаратами. Эта проблема приобретает особую актуальность в условиях растущих требований к автономности, точности и энергоэффективности дронов, особенно в приложениях, связанных с длительными миссиями, а также в сценариях, где критически важны быстродействие и манёвренность. В рамках классического подхода к оптимальному управлению задача формулируется как поиск управляющего воздействия, минимизирующего задан-

ный функционал качества на конечном или бесконечном временном интервале. При этом необходимо учитывать не только нелинейную динамику квадрокоптера – описываемую уравнениями движения в шести степенях свободы, – но и физические ограничения: максимальные и минимальные значения угловых скоростей вращения двигателей, насыщение исполнительных механизмов, а также возможные возмущения внешней среды и погрешности измерений со стороны инерциальных датчиков, GPS или визуальных систем навигации.

Для решения подобных задач применяются как аналитические методы, так и численные и прикладные схемы. При этом на этапе синтеза критически важно учитывать ограничения исполнительных механизмов, дискретизацию сигналов и оценку состояния. Дополнительно для повышения качества управления используются наблюдатели внешних возмущений и прямые компенсирующие сигналы для учёта гироскопических перекосов и лёгкие адаптивные блоки для компенсации изменения массы и ограничений интегральной части регулятора, а также тщательная настройка фильтров для сохранения фазового запаса при наличии цифровых задержек.

В настоящее время для управления квадрокоптерами применяются различные методы, выбираемые в зависимости от конкретных задач и условий эксплуатации. Наиболее широко используются PID-регуляторы [31-34], методы линейного квадратичного регулирования (LQR/LQG) [35-37], прогнозирующее управление по модели (MPC) [38, 39], а также адаптивные и робастные схемы, включая H_∞ и SMC [40-43]. Кроме того, находят применение регуляторы на основе нечёткой логики и интеллектуальные алгоритмы управления [44-47].

При управлении нелинейными объектами, такими как квадрокоптер, обычно используют каскадную структуру контуров, которая обеспечивает устойчивость как по ориентации аппарата, так и по его стабилизации [48]. Общая структура каскадной системы управления представлена на рисунке 1.2, где показано взаимодействие внешнего контура, отвечающего за формирование траектории, и внутренних

контуров, обеспечивающих стабилизацию углового положения и высоты аппарата.

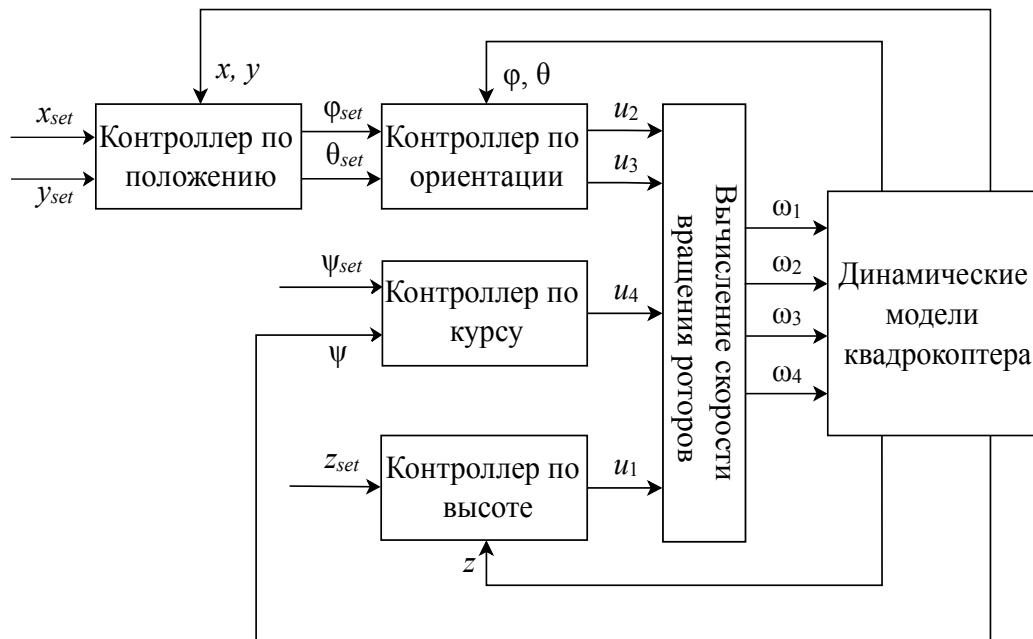


Рисунок 1.2 – Структурная схема каскадной системы управления квадрокоптером

1.3 Анализ эффективности классических PID-регуляторов в задачах управления квадрокоптером

Пропорционально-интегрально-дифференциальный (PID) регулятор – один из самых распространённых алгоритмов управления благодаря простоте и эффективности. Его работа основана на трёх звеньях: пропорциональном (реакция на отклонение), интегральном (устранение статической ошибки) и дифференциальном (упреждение будущих отклонений для повышения устойчивости) [49].

Существует множество разновидностей и модификаций PID-регулятора, представленных в [50-53]. На практике задачу регулирования чаще всего решают с помощью PI-, PD- и PID-регуляторов, которые благодаря простоте настройки и высокой надёжности остаются доминирующими схемами управления. Оптимальный подбор коэффициентов PID-регулятора обеспечивает улучшение ПП при воздействии как управляющих, так и возмущающих сигналов, одновременно повышая запасы устойчивости синтезируемых систем и тем самым гарантируя их

надёжную работу [54]. Структурная схема системы управления с PID-регулятором приведена на рисунке 1.3.

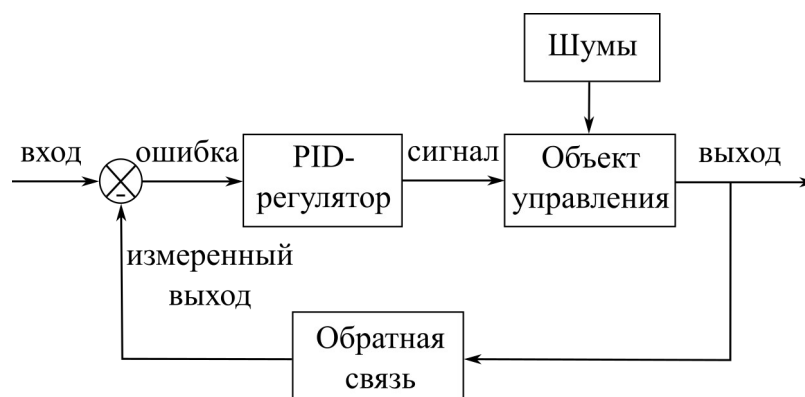


Рисунок 1.3 – Структурная схема системы управления с PID-регулятором

PID-регулятор работает, вычисляя ошибку между заданным и фактическим значениями и затем используя три компонента K_p , K_i , K_d для корректировки управляющего сигнала. Классическое уравнение PID-регулятора задаётся следующей формулой [55, 56]:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (1.1)$$

где $u(t)$ – результирующий управляющий сигнал; $e(t)$ – ошибка в момент времени t ; K_p , K_i , K_d – коэффициенты пропорционального, интегрального и дифференциального компонент.

В системах управления квадрокоптера PID-регуляторы остаются наиболее распространёнными и часто используются в качестве базового элемента каскадной схемы управления. Такая архитектура предполагает наличие нескольких вложенных контуров, где выход более медленного внешнего контура задаёт опорные значения для быстродействующего внутреннего уровня.

Внешний контур, опираясь на стабилизированную динамику, решает задачи позиционирования по координатам x , y и высоте z . Его регуляторы работают на более низкой частоте, используя данные GNSS/GPS, барометра и оптического потока. Выходные сигналы определяют целевые углы крена и тангажа для внутреннего контура [57].

Внутренний контур стабилизации реализуется на основе PID-регуляторов с высокой частотой обновления и управляет угловой динамикой квадрокоптера – креном, тангажом и рысканием. Используя данные IMU через фильтрацию, он демпфирует колебания, компенсирует быстрые возмущения (например, порывы ветра) и точно отслеживает угловые команды внешнего уровня. Структурная схема каскадных PID-контуров показана на рисунке 1.4.

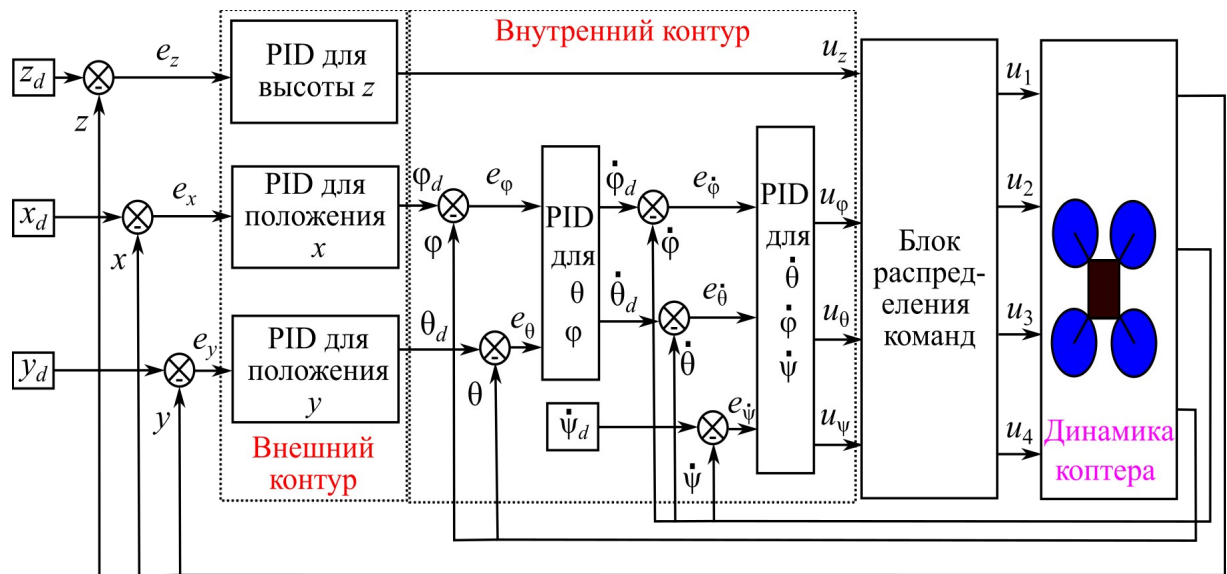


Рисунок 1.4 – Структурная схема системы управления квадрокоптером

Для многоконтурных систем на практике чаще используют методы последовательного расчёта, выполняя настройку параметров регулятора по модальному оптимуму [58, 59] или по симметричному оптимуму [60, 61].

Метод модального оптимума представляет собой аналитический подход к настройке параметров регуляторов, основанный на выделении доминирующих инерционных звеньев в динамике управляемого объекта и подгонке коэффициентов характеристического многочлена замкнутой системы. Основное преимущество метода заключается в наличии явных выражений для вычисления коэффициентов регулятора (K_p , K_i , K_d), что позволяет оперативно получать удовлетворительные приближённые значения без необходимости применения ресурсоёмких численных процедур оптимизации.

В системах, характеризующихся наличием медленно реагирующих динамических звеньев, модальный оптимум обеспечивает удовлетворительное качество переходного процесса, включая умеренное перерегулирование и приемлемое время установления, что делает данный метод особенно удобным в инженерной практике. Он применяется преимущественно к системам второго порядка, для которых можно явно задать желаемую форму корней характеристического уравнения. Как правило, регуляторы, настраиваемые по критерию модального оптимума, содержат одно интегрирующее звено, обеспечивающее первый порядок астатизма по управляющему воздействию и, как следствие, устойчивое устранение статической ошибки при ступенчатом воздействии.

Модальный оптимум не всегда гарантирует требуемые показатели в частотной области (например, необходимые запасы по фазе и амплитуде), поэтому часто требуется последующая численная корректировка параметров. Для системы, настроенной по методу модального оптимума, типичные показатели качества составляют: пиковое перерегулирование около 4,3 %, а время переходного процесса примерно равно четырём наименьшим постоянным времени объекта [59].

Метод симметричного оптимума применяется преимущественно при синтезе регуляторов для высокопорядковых систем, включающих несколько последовательных инерционных звеньев. Основной целью данного подхода является обеспечение сбалансированного частотного отклика с улучшенными амплитудными и фазовыми запасами устойчивости, что особенно важно для систем с развитой внутренней динамикой и потенциально ограниченными частотными характеристиками исполнительных механизмов [62].

В отличие от модального оптимума, симметричный оптимум требует более сложных процедур аналитического или численного расчёта, что может затруднять его применение при быстром параметрическом синтезе в инженерной практике. Тем не менее, он даёт более надёжные характеристики по устойчивости и робастности в широком диапазоне частот.

На практике целесообразно использовать симметричный или модальный оптимум как средство получения первичного приближения параметров регулятора. Дальнейшая настройка, как правило, осуществляется с применением численных методов оптимизации и имитационного моделирования, что позволяет согласовать параметры системы управления с конкретными требованиями к устойчивости, качеству ПП и частотной робастности.

1.4 Скользящий режим в задачах робастного управления нелинейными системами

Скользящий режим (sliding mode control, SMC) представляет собой класс методов дискретного или непрерывного управления, который характеризуется вводом дискретного управляющего сигнала, способного приводить систему к заданной фазовой поверхности (скользящей поверхности), после чего динамика системы сводится к движению по этой поверхности [63-65]. Основное преимущество SMC заключается в его устойчивости к параметрическим неопределённостям и внешним возмущениям, что делает его особенно ценным в задачах управления летательными аппаратами, включая квадрокоптеры.

К числу фундаментальных авторов, внёсших значительный вклад в развитие теории SMC, относятся Уткина В.И. [63, 66, 67] и Емельянова С.В. [64, 68, 69], где было обосновано использование дискретных управляющих воздействий для обеспечения инвариантности движения системы относительно заданной гиперплоскости в фазовом пространстве. Исследования в этом направлении активно развивались на протяжении последующих десятилетий и привели к появлению множества модификаций метода, включая адаптивные, высшего порядка и интегрированные схемы.

Динамика управляемого объекта в большинстве работ описывается в виде нелинейной системы [70]:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + g(x(t), t)u(t) + \xi(t), \quad (1.2)$$

где $x(t)$ – вектора состояния системы, $f(\cdot)$ – вектор собственных динамик, $g(\cdot)$ – матрица управления, $\xi(x, t)$ – возмущения и неопределенности в параметрах системы.

С целью обеспечения устойчивой асимптотической стабилизации системы $x(t) \rightarrow 0$ или слежение за желаемой траекторией $x(t) \rightarrow x_d(t)$ несмотря на наличие $\xi(x, t)$ в $f(\cdot)$, $g(\cdot)$. Для этого вводится функция скользящей поверхности $s(x, t)$, определяющая гиперплоскость в фазовом пространстве:

$$s(x, t) = \frac{d^{n-1}}{dt} e(t) + \lambda_{n-1} \frac{d^{n-2}}{dt} e(t) + \dots + \lambda_1 \dot{e}(t) + \lambda_0 e(t), \quad (1.3)$$

где: $e(t) = x(t) - x_d(t)$ – вектор ошибки состояния, $\lambda_i > 0$ – коэффициенты, задающие желаемую динамику на поверхности.

В случае стабилизации объекта второго порядка, можно использовать более простой вид:

$$s = \lambda e(t) + \dot{e}(t) = 0. \quad (1.4)$$

Большинство современных исследований в области управления квадрокоптерами с использованием скользящего режима ориентировано на стабилизацию ориентации (углы крена, тангажа и рыскания) и позиционирование центра масс аппарата в пространстве.

Базовый закон управления с использованием дискретной функции переключения:

$$u(t) = u_{eq}(t) - K \operatorname{sign}(s(t)), \quad (1.5)$$

где u_{eq} – эквивалентное управление, обеспечивающее движение по поверхности, K – коэффициент усиления. Такой подход демонстрирует высокую устойчивость при наличии внешних возмущений (ветровых нагрузок, колебаний конструкции).

В [71] предложен адаптивный вариант, в котором коэффициенты λ и K в реальном времени подстраиваются под изменения инерционных характеристик квадрокоптера. Это особенно важно в задачах с переменной нагрузкой.

В [72] исследуется применение скользящего режима к трёхмерному слежению: фазовые поверхности задаются по ошибкам положения и ориентации, а син-

тезированный терминальный SMC обеспечивает устойчивое высокоточное слежение при внешних возмущениях и помехах в измерениях (вплоть до отказов сенсоров), что подтверждено модельными испытаниями.

Формирование скользящих поверхностей является ключевым этапом синтеза управления. В работах [73, 74] показано, что выбор формы поверхности существенно влияет на переходные процессы. Нелинейные и экспоненциальные поверхности ускоряют спад начальной ошибки и сокращают время входа в режим скольжения, что особенно важно для инерционных объектов, таких как квадрокоптер.

В работе [75] используется декомпозиция по временным масштабам, что позволяет независимо настраивать быстрые (угловые) и медленные (позиционные) подсистемы. Такой подход удобен, когда оси имеют различное время отклика и требуется раздельная настройка контуров.

Одна из известных проблем скользящего режима – так называемое *chattering*, возникающее из-за высокочастотного переключения управляющего сигнала. Это явление не только ухудшает точность управления, но и приводит к механическим нагрузкам на исполнительные органы, что особенно критично в системах управления квадрокоптерами. В [76] рассмотрены практические сглаживающие аппроксимации переключателя SMC: замена $\text{sign}(\cdot)$ на *saturation*/гиперболический тангенс, а также гистерезис в управляющем канале для снижения эффекта *chattering*. В [77] анализируются скользящие режимы второго порядка (в т.ч. *super-twisting*), позволяющие уменьшить частоту переключений и повысить устойчивость к измерительному шуму. Кроме того, в [78] показано, что сочетание SMC с ФК (для подавления шума IMU и сглаживания оценок) сохраняет робастность SMC при одновременном росте точности слежения.

Непосредственно задача управления креном квадрокоптера с использованием скользящего режима рассматривалась в работах [79-81]. В [79] сформирована скользящая поверхность для канала крена с учётом ограничений по углу и насыщения актуаторов; показано быстрое восстановление при отклонениях порядка

$\pm 30^\circ$. В [80] устойчивость исследована при случайных возмущениях – ветровых и измерительных шумах IMU, моделируемых белым гауссовским шумом. В [81] предложен адаптивный закон управления с динамической подстройкой коэффициентов усиления по уровню возмущений, что снижает чувствительность к шумам и улучшает переходные характеристики.

Таким образом, несмотря на наличие ряда исследований, направленных на устойчивое управление креном с использованием скользящего режима, влияние вибраций от двигателей как структурированного, периодического возмущения практически не анализируется. В большинстве случаев такие воздействия либо упрощаются до стохастических моделей, либо полностью игнорируются, что снижает применимость предложенных методов к реальным аппаратам.

1.5 Анализ оптимального управления по быстродействию на основе принципа максимума

Существуют разработанные решения задачи быстродействующего управления для стационарных систем, описываемых моделями второго и третьего порядка, что подробно исследовано в работах [82-86]. Для систем второго порядка кривая переключений обычно строится на этапе синтеза с использованием метода «обратного движения», предложенного Фельдбаумом А.А. в 1960-е годы [86]. В случае систем третьего порядка задача существенно усложняется: требуется определить и аппроксимировать двумерное подпространство переключений, на основе которого затем строится соответствующая кривая (поверхность) переключения.

Решение задач оптимального управления относится к области вариационного исчисления и широко освещается в ряде монографий и научных статей [87-89]. В таких постановках динамика управляемого объекта, как правило, описывается системой дифференциальных уравнений. В частности, для многих технических объектов используется модель второго порядка, отражающая взаимосвязь между управляющим воздействием и изменением состояния системы:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = u, \quad (1.6)$$

где u – управляющий параметр, который должен удовлетворять условию $|u(t)| \leq K$ ($K > 0$). В рамках формализма принципа максимума Понтрягина рассмотрим преобразование уравнения (1.6) в эквивалентную систему дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = u, \end{cases} \quad (1.7)$$

где $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ – фазовые координаты.

Постановка задачи заключается в определении управления, которое обеспечивает максимально быстрый переход фазовой точки системы из произвольного начального состояния $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = 0$ к заданному целевому состоянию $x(t_{end}) = 0$, $\dot{x}(t_{end}) = 0$. В качестве начального состояния рассматривается любая точка фазового пространства системы.

Построим функцию Гамильтона $\bar{H}(\Psi, X, U) = \psi_1 \cdot x_2 + \psi_2 \cdot u$ с учётом накладываемого ограничения на управление имеем:

$$u(t) = K \cdot \text{sign}(\psi_2(t)), \quad (1.8)$$

где sign – знаковая функция, принимающая значения $(-K, K)$ и далее $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ можно получить из системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = 0, \\ \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1, \end{cases}$$

решением которой будут функции $\psi_1(t) = C_1$, $\psi_2(t) = -C_1 \cdot t + C_2$, где C_1, C_2 – произвольные константы.

Тогда уравнение (1.8) принимает следующий вид:

$$u(t) = K \cdot \text{sign}(-C_1 t + C_2). \quad (1.9)$$

Следовательно, оптимальный закон управления носит кусочно-постоянный характер и, благодаря свойству монотонности $\psi_2(t)$, имеет не более одной точки переключения. Далее определяется момент переключения t_1 и длительность интервала стабилизации t_{end} на основе заданных граничных условий. Стоит подчеркнуть, что выражение

$$u(t) = \begin{cases} -K & \text{если } t_0 < t < t_1, \\ K & \text{если } t_1 < t < t_{end}, \\ 0 & \text{если } t > t_{end}, \end{cases} \quad (1.10)$$

является оптимальным решением и описывает значение управления $u(t)$ при заданных начальных и конечных условиях.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} K t^2 + s_1 t + s_2 & \text{или } x_1 = \frac{1}{2K} x_2^2 + s^*, \\ x_2 = Kt + s_1 \end{cases}$$

где $s^* = \frac{-1}{2K} s_1^2 + s_2$ – произвольная постоянная. Аналогично при условии $u(t) = -K$, фазовые траектории системы (1.7) представляют собой параболические кривые, которые могут быть выражены в виде:

$$x_1 = \frac{-1}{2K} x_2^2 + s^{**}.$$

Предположим, что оптимальное управление формируется двумя постоянными воздействиями. В этом случае фазовая траектория системы представляет собой кривые параболического типа, что иллюстрируется на рисунке 1.5.

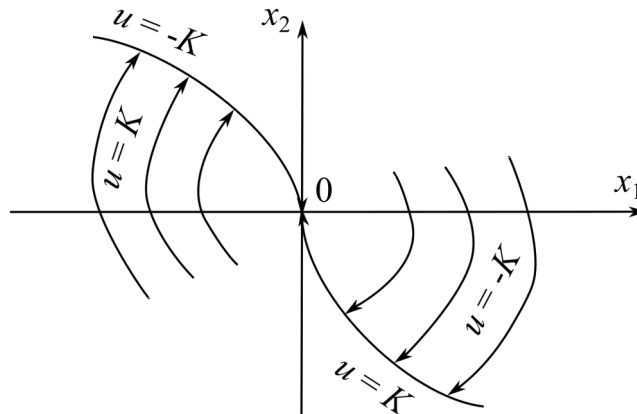


Рисунок 1.5 – Семейство оптимальных фазовых траекторий

Момент времени переключения наступает тогда, когда фазовая траектория пересекает кривую, представленную выражением

$$x_1 = \frac{-1}{2K} x_2 \cdot |x_2|.$$

Время t_{end} определяется при условиях $x_1(t_{end})=0$ и $x_2(t_{end})=0$. Соответственно, алгоритм вычисления управляющего воздействия в любой точке траектории может быть выражен следующим образом:

$$u(t) = \text{sign} \left(x_1(t) + \frac{x_2(t) \cdot |x_2(t)|}{2K} \right). \quad (1.11)$$

С учётом в начале $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, управление (1.8) теперь представлено в виде

$$u(t) = \text{sign} \left(x(t) + \frac{\dot{x}(t) \cdot |\dot{x}(t)|}{2K} \right). \quad (1.12)$$

Подробное описание данного подхода приведено во многих известных работах, в частности в [87, 88]. Важно подчеркнуть, что функцию знака $\text{sign}(\cdot)$ корректно применять только в фазе переходного процесса. После достижения установившегося состояния оптимальное управление должно быть равно нулю. Для учёта этого требования вводится зона нечувствительности в фазовом пространстве, внутри которой управляющее воздействие принимается равным нулю. Таким образом, окончательный закон оптимального управления принимает вид:

$$u(t) = \begin{cases} K, & \text{если} \quad \left(\left(x(t) + \frac{\dot{x}(t) \cdot |\dot{x}(t)|}{2K} - \lambda \right) > 0 \right), \\ 0, & \text{если} \quad \left(\left| x(t) + \frac{\dot{x}(t) \cdot |\dot{x}(t)|}{2K} \right| < \lambda \right), \\ -K, & \text{если} \quad \left(\left(x(t) + \frac{\dot{x}(t) \cdot |\dot{x}(t)|}{2K} + \lambda \right) < 0 \right), \end{cases} \quad (1.13)$$

где λ – зона нечувствительности.

Выражение (1.13) может служить основой для построения алгоритма управления, оптимизированного по быстродействию, для системы, описываемой данной моделью.

Выводы к главе 1

- Выполнен обзор современных исследований в области динамики и управления квадрокоптерами. Рассмотрено влияние конструктивных и эксплуатационных факторов на устойчивость и точность системы управления, включая смещение центра масс, изменение инерционных характеристик, насыщение исполнительных органов, ограниченность инерциальных измерительных модулей, а также наличие широкополосных и узкополосных шумов, обусловленных вибрациями BLDC-моторов.
- Проанализированы существующие подходы к синтезу систем управления квадрокоптером, включая PID-регуляторы, методы оптимального управления, а также робастные и адаптивные схемы.
- Рассмотрен метод SMC, характеризующийся высокой устойчивостью к неопределённостям и эффективностью при управлении квадрокоптерами. Однако его применение сопровождается эффектом *chattering* – высокочастотных колебаний управляющего сигнала, что особенно критично при наличии шумов и вибраций.
- Рассмотрен подход к решению задачи оптимального управления по быстрдействию на основе принципа максимума. Показано, что данный метод обеспечивает формирование управляющих воздействий, минимизирующих время перехода системы в заданное состояние, и может быть использован в качестве основы для синтеза фазовых поверхностей при управлении объектами второго порядка.

Таким образом, обзор литературы и анализ существующих методов управления демонстрируют необходимость разработки методов построения фазовой поверхности управления креном квадрокоптера с явным учётом вибрационного воздействия от двигателей и конструктивных симметрии.

Глава 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МОМЕНТА В BLDC-МОТОРЕ И КОНСТРУКТИВНОЙ АСИММЕТРИИ НА ДИНАМИКУ КВАДРОКОПТЕРА

В данной главе исследуется математическая модель BLDC-мотора, на основе которой выполнен анализ характеристики переходного процесса момента. Показано, что в данном процессе возникают спектральные составляющие, которые оказывают прямое влияние на показания датчиков квадрокоптера. Построена математическая модель квадрокоптера с учётом спектральных составляющих и конструктивной асимметрии корпуса. На основе полученных динамических уравнений проведено моделирование работы системы управления квадрокоптером и выполнен сравнительный анализ замкнутого контура для традиционной модели и модели, учитывающей спектральный состав помех, вносимых двигателями.

2.1 Исследование динамики электромагнитного момента в BLDC-моторе

Сложность реализации устойчивого управления квадрокоптером обусловлена как многоконтурной структурой СУ, так и наличием помех в измерительных каналах датчика, что требует разработки методов управления, устойчивых к шумам. Допустим для стабилизации полёта применяются многоконтурные PID-регуляторы с отрицательной обратной связью, входные данные для которых формируются IMU, включающим гироскопы и акселерометры. Обработка сигналов IMU обычно сопровождается использованием ФК для подавления гауссовских шумов. Однако реальные данные, особенно от бюджетных IMU, содержат шумы, не соответствующие нормальному распределению; в частности, вибрации двигателей вносят спектральные искажения, затрудняющие обработку показаний акселерометра. В результате традиционные математические модели, учитывающие только белый шум, оказываются недостаточно эффективными для адекватного описания реальных условий полёта.

Предположение основано на работе [90], где исследованы ФК и комплементарный фильтр (КФ). При анализе необработанных данных измерений акселерометра («Асс») и гироскопа («Gyro») выявлены высокочастотные колебания, график которых приведён на рисунке 2.1. Эти колебания не имеют гауссовской природы и могут существенно снижать точность фильтрации и достоверность оценок.

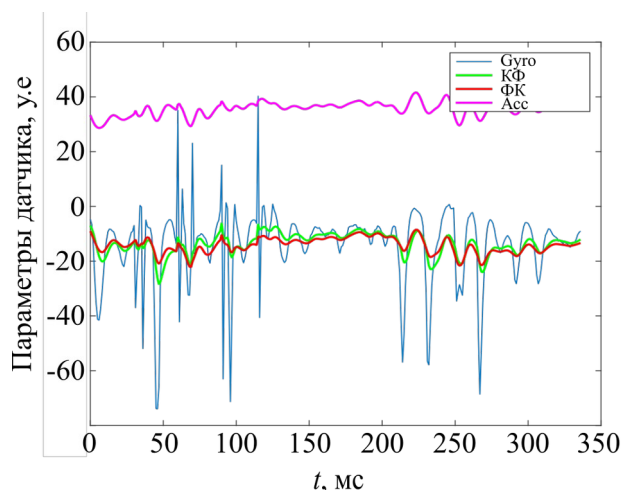


Рисунок 2.1 – Колебания сигнала датчика IMU в каналах крена

В работе [90] природа возникновения указанных периодических процессов не рассматривается, что можно считать недостатком при анализе механизмов, порождающих такие колебания. Выявление их причин, например, связанных с механическими вибрациями, могло бы дать объяснение изменениям динамики полёта и неустойчивости контуров управления, что имеет принципиальное значение для построения адекватных математических моделей функционирования квадрокоптера.

Спектральные составляющие сигналов, вероятно, могут быть связаны либо с радиопомехами, либо с работой резонансного контура генератора, используемого для измерения угловой скорости на основе эффекта Кориолиса. К сожалению, в руководстве пользователя к датчику не указана собственная частота колебаний генератора, однако можно попробовать оценить её с помощью следующего выражения:

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (2.1)$$

где жёсткость пружины (k) и масса пластины датчика (m) позволяют оценить частоту колебаний при реалистичных значениях. Поскольку масса пластины относительно стабильна и значительно меньше массы микросхемы (до грамма), её резонансная частота должна быть существенно выше частоты на рисунке 2.1 и не зависит от частоты вращения двигателя.

Предположим, что периодические помехи связаны со свойствами электрической машины. Возникновение спектральных составляющих электромагнитного момента BLDC-мотора обусловлено особенностями коммутации и конструктивными свойствами электрической машины. В идеализированной модели предполагается, что токи в фазных обмотках и противо-ЭДС имеют трапецеидальную форму и совпадают по фазе, обеспечивая постоянный электромагнитный момент. В реальных условиях это не выполняется: переключение токов в обмотках осуществляется электронным коммутатором (частотным преобразователем), формирующим широтно-импульсные сигналы заданной частоты. В моменты коммутации, когда происходит переключение активной пары фаз, в воздушном зазоре электрической машины наблюдается кратковременное перераспределение магнитного потока. Это приводит к пульсациям электромагнитного момента и появлению дополнительных гармонических составляющих в его спектре.

Далее проводится детальное исследование математической модели BLDC-мотора с целью выявления физической природы и количественного описания рассматриваемого явления. Полная модель сформулирована на основе работы [91] с учётом дополнений и уточнений, представленных в работе [92], динамика модели описывается системой дифференциальных уравнений для фазных токов i_x , i_y и i_z :

$$\begin{cases} u_X = L \frac{di_X}{dt} + i_X R + e_X, \\ u_Y = L \frac{di_Y}{dt} + i_Y R + e_Y, \\ u_Z = L \frac{di_Z}{dt} + i_Z R + e_Z, \end{cases} \quad (2.2)$$

где u_X, u_Y, u_Z – фазные напряжения; e_X, e_Y, e_Z – противо-ЭДС, обусловленные движением ротора; R и L – индуктивность и активное сопротивление фазы.

Связь между угловой скоростью ротора и противо-ЭДС в каждой фазе статора описывается следующими соотношениями:

$$\begin{cases} e_X = K_e \omega_r F(\theta_r), \\ e_Y = K_e \omega_r F\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right), \\ e_Z = K_e \omega_r F\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right), \end{cases} \quad (2.3)$$

где K_e – постоянная ЭДС; θ_r – положение ротора; ω_r – его угловая скорость; а $F(\theta_r)$ – трапецевидная форма противо-ЭДС, которая определяется угловым положением ротора по следующим выражениям:

$$F(\theta_r) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \theta_r \leq \frac{2\pi}{3}, \\ 1 - \frac{6}{\pi} \left(\theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) & \frac{2\pi}{3} \leq \theta_r \leq \pi, \\ -1 & \pi \leq \theta_r \leq \frac{5\pi}{3}, \\ 1 + \frac{6}{\pi} \left(\theta_r - \frac{5\pi}{3} \right) & \frac{5\pi}{3} \leq \theta_r \leq 2\pi. \end{cases} \quad (2.4)$$

Электромагнитный момент, создающий вращение ротора, зависит от фазных токов и определяется выражением

$$M_e = K_f i_\Phi F(\theta_r), \quad (2.5)$$

где M_e и i_Φ – векторы момента и токов; а K_f – коэффициент крутящего момента. Поскольку трапецевидальная форма противо-ЭДС (2.4) не совпадает с прямоугольной формой управляющего сигнала (2.3), полная компенсация в токах i_X, i_Y и i_Z не-

возможна. В переходном процессе момента (2.5) сохраняется спектральная составляющая, присутствующая в управляющем сигнале.

Сумма моментов по 3-м фазам определяет частоту вращения согласно механической модели турбовентиляторной машины согласно ДУ:

$$M_e(t) = B \omega_r(t) + J \frac{d\omega_r(t)}{dt} + M_L(t), \quad (2.6)$$

где J – момент инерции; M_L – момент нагрузки (возмущение); B – коэффициент трения в подшипниках и лопастях.

В стандартной математической модели BLDC-мотора момент внешней нагрузки M_L обычно не учитывается, так как он значительно меньше электромагнитного момента M_e . Далее следует перейти от полных уравнений (2.2) и (2.6) к упрощённой структурной схеме как представлен на рисунке 2.2.

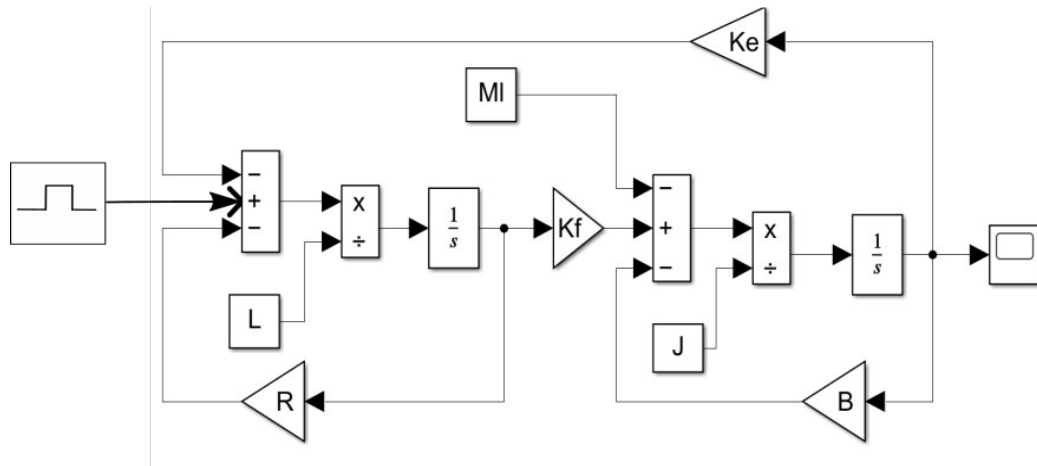


Рисунок 2.2 – Схема вычисления углового положения ротора BLDC-мотора

На основании структурной схемы можно записать упрощённую передаточную функцию, описывающую связь между управляющим сигналом частоты переключения (U_{PWM}) и угловой скоростью ротора (ω_r) следующим образом:

$$W(s) = \frac{\omega_r(s)}{U_{PWM}(s)} = \frac{K_f}{\tau_2^2 s^2 + \tau_1 s + 1}, \quad (2.7)$$

где

$$\tau_1 = \frac{RJ + BL}{RB + K_f K_e}; \quad \tau_2^2 = \frac{JL}{RB + K_f K_e}. \quad (2.8)$$

Постоянные времени системы достаточно малы по сравнению с периодом переключения фазных напряжений, что позволяет сглаживать колебания магнитного потока в переходных процессах. Однако в математических моделях квадроконтера для описания двигателя с приводом часто используют уравнение (2.7) с существенно большими постоянными времени, чем в (2.8). Это связано с применением низкочастотных фильтров в цепи обратной связи, которые нивелируют спектр переходного процесса момента. Чрезмерное увеличение этих постоянных снижает быстродействие контуров управления.

Для анализа ПП момента на валу двигателя проведено моделирование. Результаты моделирования и исходный код приведены по ссылке [93]. В ходе исследований были рассмотрены различные режимы изменения угловой скорости, среди которых выделены два характерных для работы двигателя: быстрый и плавный пуск. На рисунке 2.3 представлены результаты моделирования, иллюстрирующие динамику изменения момента при указанных режимах. Значения приведены в условных единицах (у.е.).

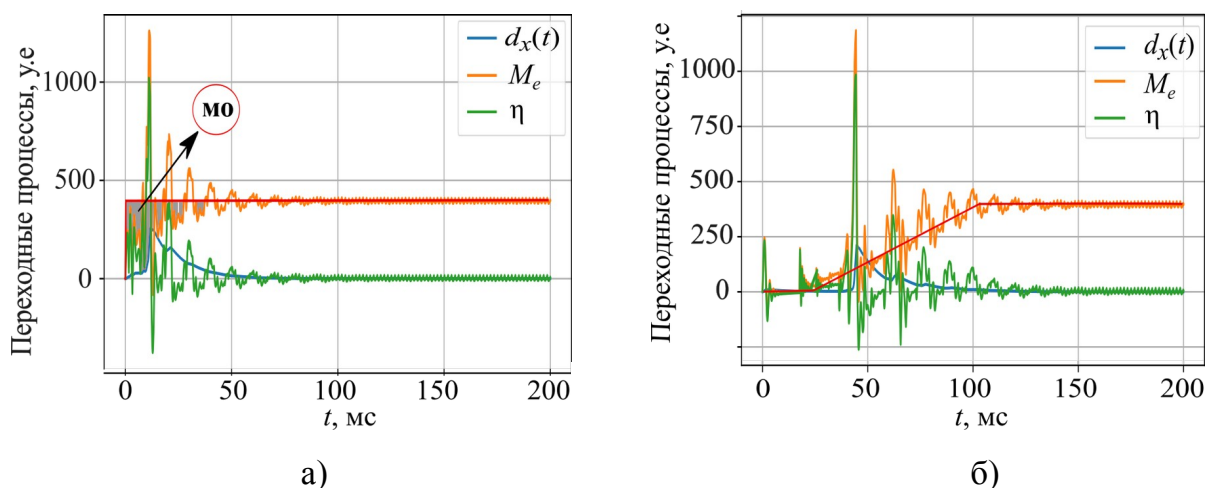


Рисунок 2.3 – Переходные процессы: а) при быстром пуске; б) при плавном пуске

где $d_x(t)$ – дисперсия сигнала, оценённая по выборке длительностью 50 мс, M_e – момент переключения в двигателе, η – внутренние шумы двигателя, МО – математическое ожидание.

При быстром пуске (рисунок 2.3 а) наблюдается начальное смещение математического ожидания наведённых шумов относительно задающего сигнала, а длительность ПП ($\sim 60-70$ мс) определяется электромеханической постоянной времени двигателя и приведённым моментом инерции нагрузки J . В случае плавного пуска частота переключения фаз нарастает постепенно (рисунок 2.3 б), и МО шума как в переходном, так и в установившемся режиме остаётся близким к нулю, что является важным условием корректной работы ФК.

Результаты моделирования для обоих режимов показывают наличие двух выраженных спектральных составляющих. Первая – синусоидальная низкочастотная компонента с увеличенной амплитудой, проявляющаяся при разгоне и исчезающая после установления потокосцепления. Вторая – высокочастотная компонента меньшей амплитуды, вызывающая колебания частоты и сохраняющаяся даже в установившемся режиме. Эти спектральные составляющие могут быть описаны следующим выражением:

$$\delta = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2), \quad (2.9)$$

где A_1, A_2 – амплитуды колебания, причём $A_1 > A_2$, $\omega_1 \approx \omega_2/6$.

В результате суммарное воздействие, выраженное в уравнении (2.9), с учётом трёх каналов управления может быть приведено к более компактной и аналитически обобщённой форме.

$$\delta_{\phi, \theta, \psi}(t) = A_{\phi, \theta, \psi} \sin\left(\frac{RPM \cdot n_p}{60} \cdot \frac{u_M(t)}{100} \cdot 2\pi\right), \quad (2.10)$$

где RPM – количество оборотов двигателя в минуту; n_p – число пар полюсов двигателя; $u_M(t)$ – нормированный сигнал управления двигателем (в % от максимального значения); $A_{\phi, \theta, \psi}$ – амплитуды колебаний по каналам тангажа (ϕ), крена (θ) и рыскания (ψ).

Динамика привода обычно представлена передаточной функцией второго порядка, связывающей входной управляющий сигнал $u_M(t)$ и выходную угловую скорость двигателя $\omega_u(t)$:

$$\tau_s^2 \frac{d^2 \omega_u(t)}{dt^2} + 2\gamma \tau_s \frac{d\omega_u(t)}{dt} + \omega_u(t) = K_p u_M(t), \quad (2.11)$$

где K_p – коэффициент передачи; τ_s – постоянная времени привода; γ – коэффициент демпфирования.

Уравнение (2.11) описывает динамику привода без учёта (2.10). В работе предложено учитывать периодические составляющие путём введения (2.10) в состав выражения для частоты оборотов для каждого i -го двигателя

$$\omega_i(t) = \omega_u(t) + \delta_{\phi, \theta, \psi}(t), i \in (1, 2, 3, 4).$$

Следовательно, с учётом периодических составляющих, описанных в выражении (2.10) в модели (2.11) должны проявляться спектральные компоненты соответствующих частот. Указанные компоненты проявляются во всех выходных сигналах системы – как в электромагнитном моменте, так и в показаниях датчиков, что подтверждается спектральным составом сигналов, представленным на графиках рисунков 2.1 и 2.3.

2.2 Построение математической модели квадрокоптера с учётом спектральных составляющих

Для корректного моделирования динамики квадрокоптера необходимо учитывать физические свойства системы, однако при построении математической модели она подвергается существенным упрощениям. При указанных допущениях разработанная модель сохраняет все необходимые элементы для описания основных динамических характеристик квадрокоптера.

Можно рассматривать систему координат квадрокоптера как система координат твёрдого тела, поскольку это система имеет 6-DOF соответственно по двум основным координатам [94, 95].

Линейные и угловые координаты квадрокоптера задаются вектором $Q^E = (\zeta, \beta)$, где $\zeta = (x, y, z)^T$ – координаты центра масс в инерциальной системе

координат (ИСК) $\{E\}$, определённой осями (O_E, x_E, y_E, z_E) , а $\beta = (\phi, \theta, \psi)^T$ – углы Эйлера (крен, тангаж, рыскание).

Линейные и угловые скорости описываются вектором $Q^B = (v, \gamma)$, где $v = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$ – линейные скорости, $\gamma = (p, q, r)^T$ – проекции угловых скоростей на оси связанной системы координат (ССК) $\{B\}$, определённой осями (O_B, x_B, y_B, z_B) и жёстко закреплённой в центре масс корпуса.

Для преобразования между системами координат, как отмечалось ранее, наряду с кватернионным представлением ориентации может использоваться также матрица поворота, обеспечивающая эквивалентное описание пространственного положения корпуса квадрокоптера.

Так, матрица поворота $R_x(\phi)$, задающая преобразование координат при вращении вокруг оси Ox на угол ϕ , определяется следующим образом:

$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix},$$

аналогично матрица поворота $R_y(\theta)$, соответствующая повороту вокруг оси Oy на угол θ , задаётся выражением:

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix},$$

и матрица поворота $R_z(\psi)$, описывающая поворот вокруг оси Oz на угол ψ , имеет вид:

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поворот, задаваемый матрицей $R_{(\phi, \theta, \psi)}$ для данной системы углов Эйлера, может быть представлен как последовательность элементарных вращений вокруг осей неподвижной системы координат: сначала на угол ϕ вокруг оси Ox , затем на угол θ вокруг оси Oy и, наконец, на угол ψ вокруг оси Oz . Результат перемножения может быть представлен в выражении:

$$R_{(\phi, \theta, \psi)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \theta \cos \phi \cos \psi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Аналогично, для преобразования вектора угловой скорости между различными системами координат используется следующая матрица поворота:

$$R_{(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Результаты преобразования угловых скоростей между корпусной системой координат и инерциальной представлены следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Предполагается, что при анализе канала крена квадрокоптер находится в окрестности положения равновесия, а углы тангажа и рыскания пренебрежимо малы и могут быть исключены из рассмотрения. В этом случае направления осей корпусной системы координат практически совпадают с проекциями на инерциальную систему, что позволяет напрямую отождествить угловые скорости вращения вокруг осей корпуса с производными углов Эйлера:

$$\dot{\phi} \approx p, \dot{\theta} \approx q, \dot{\psi} \approx r.$$

Наиболее распространённая математическая модель квадрокоптера получена на основе уравнений Ньютона-Эйлера для описания вращательного движения и второго закона Ньютона – для поступательного движения. Такой подход представлен в работах [10, 96-98].

С учётом зависимости частоты вращения от управляющего сигнала, заданной в выражении (2.11) и с добавлением спектральной компоненты из (2.9), частота вращения i -го двигателя в модели квадрокоптера может быть записана следующим образом:

$$\omega_i(t) = \omega_u(t) + A_1 \sin\left(\frac{\omega_u(t)n_p}{6}t\right) + A_2 \sin(\omega_u(t)n_p t). \quad (2.16)$$

Далее, исходя из выражения (2.16), тяговая сила f_i создаваемая i -ым двигателем, направлена вдоль оси ротора и пропорциональна квадрату его угловой скорости вращения и также суммарная тяга четырёх двигателей F вычисляется по следующим выражениям:

$$f_i = b \omega_i^2, \quad F = \sum_{i=1}^4 f_i. \quad (2.17)$$

Крутящий момент вокруг оси z создаётся скоростью вращения мотора и его ускорением:

$$M_z = d \omega_i^2 + I_M \dot{\omega}_i, \quad (2.18)$$

где d – коэффициент сопротивления, b – коэффициент тяги, I_M – момент инерции ротора. Обычно влияние $\dot{\omega}_i$ считается малым и его можно пропускать.

Моменты по углу тангажа, крена и рыскания рассчитывается по формуле:

$$\begin{cases} M_\phi = lb(\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 - \omega_4^2), \\ M_\theta = lb(\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2), \\ M_\psi = d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2), \end{cases} \quad (2.19)$$

где l – расстояние от осей двигателей до центра масс корпуса.

Подстановка уравнения (2.16) в выражениях (2.17) и (2.19) приводит к тому, что в сигналах тяговых сил и моментов появляются периодические составляющие. В дальнейшем они, совместно с шумами, отражаются на сигналах линейных и угловых положений.

Для описания поступательного движения квадрокоптера в инерциальной системе координат, на основании второго закона Ньютона, можно записать следующее уравнение:

$$m \ddot{\xi} = mg + R_{(\phi, \theta, \psi)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

где $g = [0, 0, -g]^T$ – вектор ускорения свободного падения, m – масса квадрокоптера;

Линейные ускорения вдоль осей x, y, z определяются следующими уравнениями:

$$\begin{cases} m \ddot{x} = (\sin \theta \cos \phi \cos \psi + \sin \psi \sin \phi) F - C_x \dot{x}, \\ m \ddot{y} = (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) F - C_y \dot{y}, \\ m \ddot{z} = (\cos \phi \cos \theta) F - mg - C_z \dot{z}, \end{cases} \quad (2.21)$$

где $C_{x, y, z}$ – коэффициенты линейного сопротивления по осям x, y, z соответственно.

Если пренебречь моментами аэродинамического трения и сопутствующими эффектами, то вращательное движение описывается уравнениями Эйлера динамики твёрдого тела, которые имеют следующий вид:

$$I \dot{\omega} + \omega \times (I \omega) = M. \quad (2.22)$$

Угловые ускорения относительно вращений вокруг соответствующих осей вычисляются по следующим уравнениям:

$$\begin{cases} I_{xx} \dot{p} = M_\phi - (I_{zz} - I_{yy}) qr, \\ I_{yy} \dot{q} = M_\theta - (I_{xx} - I_{zz}) pr, \\ I_{zz} \dot{r} = M_\psi - (I_{yy} - I_{xx}) pq, \end{cases} \quad (2.23)$$

где $(I_{zz} - I_{yy})qr$, $(I_{xx} - I_{zz})pr$, $(I_{yy} - I_{xx})pq$ – гироскопические члены, возникающие при вращении тела, I – это матрица инерции (тензор инерции) квадрокоптера относительно его центра масс в системе координат корпуса. Для большинства квадрокоптеров с симметричной рамой тензор инерции при равновесном состоянии имеет вид диагональной матрицы:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

где I_{xx} – момент инерции относительно оси x , I_{yy} – момент инерции относительно оси y , I_{zz} – момент инерции относительно оси z . Если квадрокоптер идеально симметричен по горизонтальной плоскости, обычно $I_{xx} \approx I_{yy} \neq I_{zz}$.

На рисунке 2.4 приведены типичные результаты моделирования динамики квадрокоптера при отсутствии измерительных шумов, выполненные в работе [99].

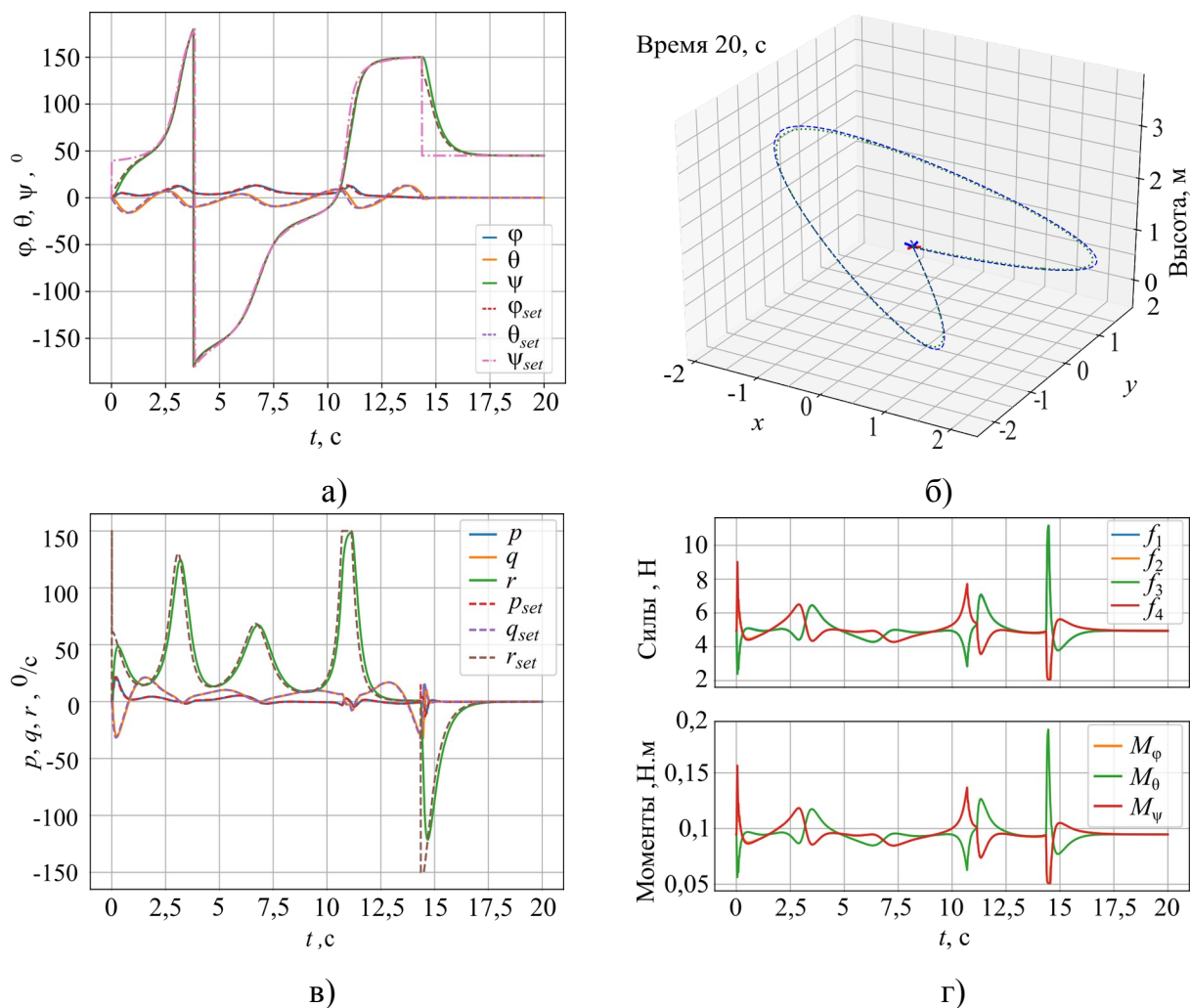


Рисунок 2.4 – Результаты моделирования динамики квадрокоптера при отсутствии измерительных шумов: а) углы ориентации; б) траектория движения; в) угловые скорости; г) моменты и силы тяги

Качественный анализ углов и их производных показывает, что контуры управления могут быть настроены без перерегулирования при достаточно коротких временах переходного процесса. Характер изменения моментов и сил тяги отдельных винтов соответствует форме ПП частоты вращения двигателей. Для канала рыскания время переходного процесса составляет около 2 с. В каналах крена

и тангажа прямые показатели качества ПП оценить затруднительно из-за плавного изменения задающих сигналов. Тем не менее, по задержке между фактическими и задающими углами можно определить, что время ПП лежит в пределах 0,4 - 0,8 с.

Из выражений (2.19), (2.21) и (2.23) следует, что показания гироскопа определяются крутящими моментами, тогда как данные акселерометра зависят от величины силы тяги. Далее результаты моделирования с учётом гауссовских шумов и периодических составляющих в математической модели квадрокоптера приведены на рисунке 2.5. Как видно из графиков, добавление указанных возмущения не приводит к потере устойчивости системы, однако заметно снижает качество переходных процессов.

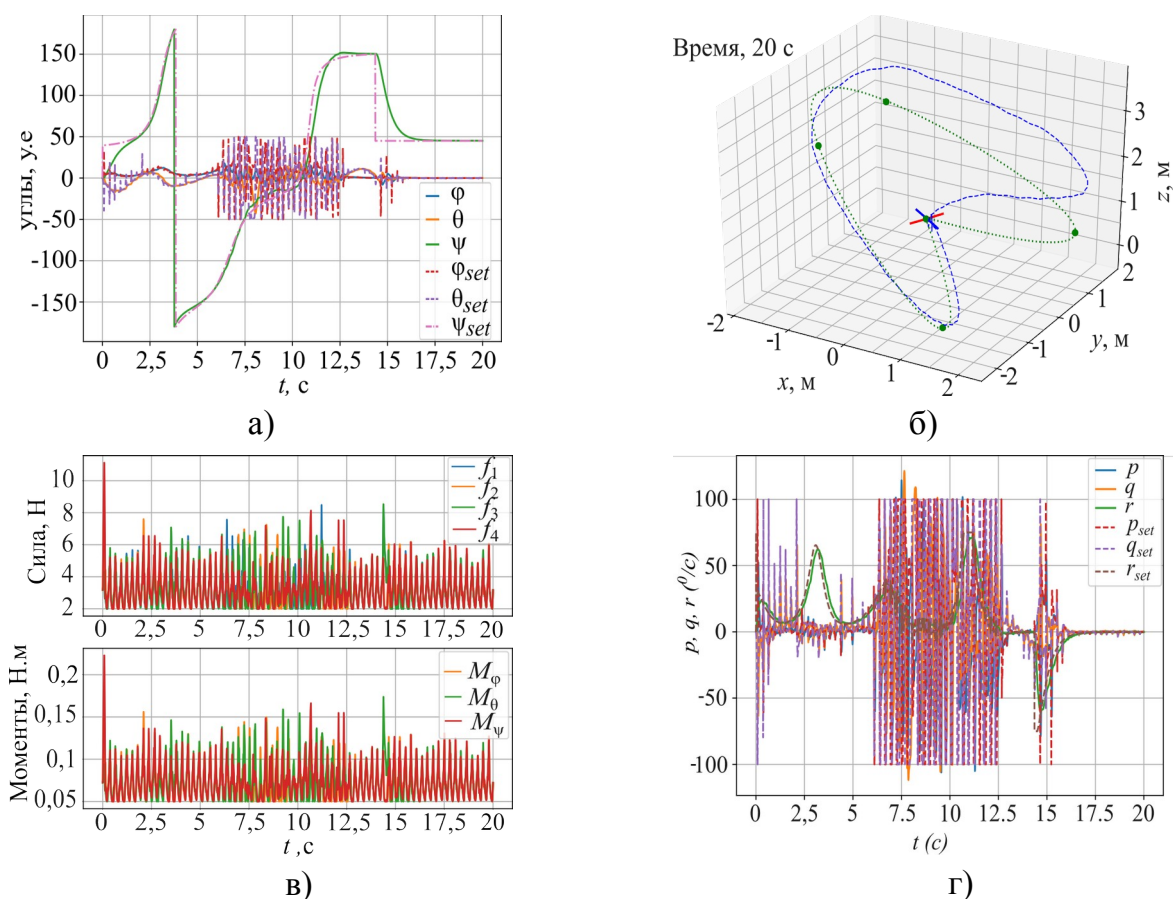


Рисунок 2.5 – Влияние периодической составляющей шумов на динамические параметры квадрокоптера в процессе полёта а) углы ориентации; б) траектория движения; в) моменты и силы тяги; г) угловые скорости

В сигналах момента и тяги наблюдаются выраженные спектральные компоненты. Причина заключается в том, что в замкнутом контуре сигнал частоты вра-

щения содержит помеху, вносимую приводом. Это приводит к значительным колебаниям сигнала заданной скорости вращения двигателя на выходе PID-регулятора (формула 2.11).

2.3 Анализ влияния конструктивной асимметрии корпуса квадрокоптера на динамику его движения

В большинстве классических моделей квадрокоптеров принимается, что корпус обладает симметрией, а двигатели равноудалены от центра масс. Принятое допущение обеспечивает диагональную структуру тензора инерции за счёт отсутствия центробежных моментов, что значительно упрощает синтез алгоритмов управления. Во многих исследованиях, включая работы [5, 7, 10], рассматриваются именно симметричные конфигурации, при которых центр масс совмещён с началом корпусной системы координат, а изменение длины лучей или массы отдельных элементов не нарушает симметрии.

Однако на практике практически невозможно добиться идеальной симметрии всех конструктивных элементов. Даже незначительные отклонения в расположении аккумулятора, креплений моторов или толщины элементов рамы приводят к смещению центра масс (r_c), изменению распределения моментов инерции и различию в характеристиках двигателей. Такие различия формируют асимметрию конструкции, которая проявляется в неравномерном распределении тяги и в возникновении дополнительных моментов, мешающих работе системы стабилизации.

В связи с этим формируется ключевая исследовательская задача – построение математической модели квадрокоптера, учитывающей одновременно деформационные изменения конструкции и геометрическую асимметрию корпуса. Разработка такой модели позволит более точно описать реальные динамические свойства летательного аппарата и обеспечить требуемые показатели устойчивости и точности управления в условиях практической эксплуатации. Проблема учёта

конструктивной асимметрии в динамике квадрокоптеров рассматривалась в ряде научных работ [15, 100, 101], где анализировались различные аспекты влияния несимметричного распределения масс, тяг и геометрии расположения двигателей на динамику полёта. Результаты этих работ показывают, что даже незначительное смещение центра масс относительно геометрического центра корпуса вызывает появление дополнительных перекрёстных моментов, что приводит к взаимному влиянию каналов управления по крену и тангажу и снижению общей устойчивости системы стабилизации.

Для адекватного описания динамики квадрокоптера необходимо учитывать индивидуальные характеристики каждого двигателя и геометрические плечи их расположения. В случае конструктивной асимметрии дополнительно принимаются во внимание смещение центра масс r_c , коэффициенты тяги b_i и сопротивления d_i для каждого двигателя, а также расстояния l_{ij} от двигателей до центра масс. При этом управляющие моменты и суммарная сила тяги, определённые в уравнениях (2.17) и (2.19), принимают следующий вид:

$$\begin{pmatrix} F \\ M_\phi \\ M_\theta \\ M_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ l_{21} & l_{22} & -l_{23} & -l_{24} \\ l_{31} & -l_{32} & -l_{33} & l_{34} \\ d_1 & -d_2 & d_3 & -d_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

При идеальной симметрии расстояния l_{ij} от центра масс до двигателей равны и моменты сопротивления d_i одинаковы. В этом случае перекрёстные влияния между осями управления минимальны. Однако при нарушении симметрии, например, при смещении центра масс, одна пара двигателей создаёт больший момент, чем другая, что вызывает дрейф по углу крена даже при равных сигналах управления.

Силы тяги i -го двигателя квадрокоптера пропорциональны квадрату угловой скорости ротора и определяются эмпирической формулой

$$f_i = \frac{1}{2} \rho \pi R_i^2 c_i^2 \omega_i^2 = b_i \omega_i^2, \quad (2.26)$$

где ρ – плотность воздуха, R_i – радиус пропеллера, c_i – коэффициент, определяемый формой пропеллера.

Хотя в идеальных условиях радиусы и формы пропеллеров предполагаются одинаковыми, в процессе эксплуатации они могут подвергаться повреждениям или деформациям, что приводит к изменению аэродинамических характеристик. Для удобства анализа все указанные параметры объединяются в коэффициенты тяги b_i .

Как следует из уравнения (2.23), при наличии конструктивной асимметрии в модель динамики угловых скоростей необходимо включить гироскопические моменты, а также возмущения, обусловленные несимметрией конструкции, которые оказывают существенное влияние на устойчивость движения. С учётом конструктивной асимметрии (2.25) в уравнениях (2.23) получаем математическую модель квадрокоптера по каналам крена и тангажа в равновесном состоянии:

$$\begin{cases} I_{xx} \dot{p} = (l_{21} b_1 \omega_1^2 + l_{22} b_2 \omega_2^2 - l_{23} b_3 \omega_3^2 - l_{24} b_4 \omega_4^2), \\ I_{yy} \dot{q} = (l_{31} b_1 \omega_1^2 + l_{34} b_4 \omega_4^2 - l_{32} b_2 \omega_2^2 - l_{33} b_3 \omega_3^2). \end{cases} \quad (2.27)$$

Допустим, что при синтезе системы управления динамика квадрокоптера по каналам крена и тангажа рассматривается в предположении малых углов отклонения и постоянной высоты полёта. В данных условиях влияние гироскопических эффектов и перекрёстных связей пренебрежимо мало.

Из уравнения (2.27) видно, что неравенство плеч (l_{ij}) или коэффициентов тяги (b_i) приводит к тому, что даже при одинаковых частотах вращения двигателей ($\omega_i = \omega$) появляются остаточные угловые ускорения. Если корпус является абсолютно симметричным ($I_{xx} = I_{yy}$), то такой частный случай рассматривается во многих работах, где приведены упрощённые аналитические выражения для описания его динамики

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{l b}{I_{xx}} (\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 - \omega_4^2), \\ \dot{q} = \frac{l b}{I_{yy}} (\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2). \end{cases} \quad (2.28)$$

Значения управления двигателями вычисляются из сигналов управления контуров стабилизации по высоте z , тангажу ϕ , крену θ и рысканию ψ для симметричной конструкции следующим образом:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_z \\ u_\phi \\ u_\theta \\ u_\psi \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Это распределение обеспечивает независимость осей управления при идеальной симметрии. Однако при смещении центра масс или различии коэффициентов тяги данная матрица перестаёт быть ортогональной – то есть управление по одной оси вызывает реакцию по другой. Для упрощения рассмотрим частный случай, когда квадрокоптер выполняет вращение только по крену, при этом остальные углы стабилизированы (т.е. $\psi \approx 0$, $\phi \approx 0$), а управление осуществляется исключительно по каналу крена ($\theta \neq 0$). Тогда, в соответствии с выражением (2.29), выполняются следующие условия:

$$u_1 = u_4 = u_z + u_\theta, \quad u_2 = u_3 = u_z - u_\theta. \quad (2.30)$$

Если дополнительно предположить, что конструктивная асимметрия не оказывает влияния на работу контура крена, то управляющий сигнал u_θ в установившемся режиме стремится к нулю, и частоты вращения всех двигателей становятся равными. Тогда, в соответствии с выражением (2.28), динамика по крену описывается следующим соотношением:

$$\ddot{\theta} = \left(\left(\frac{l_1 b_1}{I_{yy}} + \frac{l_4 b_4}{I_{yy}} \right) - \left(\frac{l_2 b_2}{I_{yy}} + \frac{l_3 b_3}{I_{yy}} \right) \right) \omega^2, \quad (2.31)$$

которое не равно нулю при имеющемся различии в параметрах l , b и I_{yy} . Следовательно, конструктивная асимметрия оказывает влияние на управляющий сигнал u_θ , который целесообразно представлять в виде суммы вариационной и постоянной составляющих. При этом именно постоянная компонента формируется на выходе интегральной части регулятора.

Рассмотрим это на примере контура управления креном; аналогичные соотношения справедливы и для контура тангажа. Управляющее воздействие по каналу крена определяет требуемые частоты вращения двигателей через совокупность соотношений, одно из которых – дифференциальное уравнение, связывающее частоты вращения с управляющими сигналами.

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{K_u u_\theta - \omega_i}{T_M}, i \in (1, 2, 3, 4), \quad (2.32)$$

где T_M – постоянная времени двигателя и частотного ESC-преобразователя, K_u – коэффициент передачи канала «сигнал управления – угловая скорость ротора».

Наличие постоянной составляющей в сигнале управления по контуру крена указывает на смещение рабочей точки системы, что приводит к нарушению условий корректного применения ФК. Даже если при этом на реальном квадрокоптере не наблюдаются заметные отклонения, частотные характеристики, рассчитанные относительно исходной точки линеаризации, уже не отражают фактическое поведение системы.

Для построения линеаризованной модели контура управления креном временно пренебрежём инерционностью двигателя, что эквивалентно приближению $T_M \rightarrow 0$. В этом случае уравнение (2.32) в установившемся режиме переходит в алгебраическое соотношение $\omega_i \approx K_u u_\theta$, связывающее частоту вращения двигателя с управляющим сигналом. Данное выражение далее используется в формуле (2.28) для симметричной конструкции квадрокоптера.

Подстановка соотношения из уравнения (2.29) в уравнение (2.32) с последующим предельным переходом и алгебраическими преобразованиями приводит к выражению, описывающему линеаризованную динамику контура управления креном при пренебрежении динамикой двигателя, которое может быть представлено в виде дифференциального уравнения:

$$\dot{q} = \ddot{\theta} = K_v(u_\theta, l_{3i}, b_i, I_{yy}); r_c = \ddot{\theta}(u_\theta = 0) \neq 0; K_v = \frac{2lb}{I_{yy}} 8 K_u^2 u_\theta, \quad (2.33)$$

где K_v – коэффициент, который зависит от параметра объекта и значения сигнала управления u_0 . Показано, что в условиях асимметрии присутствует смещение центра масс r_c и точка равновесия не соответствует $u_0 = 0$. Предполагая монотонность нелинейной зависимости, неопределённость параметров можно задать для линеаризованной системы в виде граничных условий

$$K_v \in \left[f(b_{\min}, l_{\min}, I_{\max}), f(b_{\max}, l_{\max}, I_{\min}) \right]. \quad (2.34)$$

Выводы к главе 2

Построение адекватной математической модели нелинейных динамических систем, таких как квадрокоптер, сопряжено со значительными трудностями. Несмотря на то, что уравнения движения могут быть выведены из фундаментальных физических законов, при моделировании часто вводятся упрощения, игнорирующие влияние аэродинамических сил, гироскопических эффектов и неравномерного распределения масс. Устойчивость и быстродействие квадрокоптера напрямую зависят от точности системы управления, которая, в свою очередь, подвержена воздействию шумов инерциальных датчиков, спектральных составляющих момента BLDC-моторов и конструктивной асимметрии корпуса. Учёт этих факторов необходим для формирования реалистичной и достоверной модели полёта.

В ходе исследования получены следующие основные результаты:

1. Исследована математическая модель BLDC-мотора, позволяющая анализировать спектральные компоненты момента, обусловленные переключением потокосцепления при плавном и быстром пуске. Показано, что плавный пуск обеспечивает более устойчивый переходный процесс и близкое к нулю математическое ожидание шумовой составляющей как в переходном, так и в установившемся режимах, что является необходимым условием корректного функционирования фильтра Калмана.
2. Сформирована математическая модель квадрокоптера с учётом спектральных компонент, генерируемых BLDC-моторами. Численное моделирование

показало её повышенную адекватность по сравнению с классическими подходами.

3. Проведён анализ влияния конструктивной асимметрии корпуса на устойчивость и управляемость квадрокоптера при вращении вокруг оси крена. Показано, что даже незначительные отклонения от геометрической симметрии существенно изменяют динамические характеристики и параметры контура управления.

Таким образом, в данной главе учтены ключевые физические факторы, что позволило повысить точность математического описания квадрокоптера и заложить основу для синтеза и оптимизации контура управления креном, рассматриваемых в следующей главе.

Глава 3. СИНТЕЗ КОНТУРА УПРАВЛЕНИЯ ПО КАНАЛУ КРЕНА (ТАНГАЖА)

Как следует из выражений (2.19) и (2.23), контуры управления по каналам крена и тангажа имеют одинаковую структуру и отличаются лишь численными значениями параметров. Эти различия обусловлены геометрическими особенностями конструкции квадрокоптера, а также возможной асимметрией в размещении оборудования и аккумуляторной батареи на корпусе. Тем не менее, принципиальный подход к синтезу управления в обоих контурах остаётся единым. На основе выражения (2.32) может быть представлена обобщённая математическая модель контура в следующем виде:

$$\frac{d\theta}{dt} = K_f q; \frac{dq}{dt} = K_v M_q; \frac{dM_q}{dt} = \frac{(u_M K_u - M_q)}{T_M}, \quad (3.1)$$

где u_M – управляющий сигнал, подаваемый на двигатели для реализации момента крена; T_M – постоянная времени привода; K_f – коэффициент передачи между углом и угловой скоростью, определяемый параметрами чувствительности и масштабным коэффициентом гироскопического датчика. Параметр K_v определяется функцией

$$K_v = f(b, I, l_i), \quad (3.2)$$

которая зависит от динамических характеристик квадрокоптера таких как коэффициент тяги, длины лучей рамы l_i , момент инерции I . Момент M_q связан с коэффициентом передачи, который в свою очередь зависит от квадрата частоты оборотов (2.19).

Поскольку управление по крену рассматривается при условии сохранения общей тяги, сумма квадратов частот вращения двигателей (2.17) остаётся практически постоянной. В этом случае можно допустить, что в области равновесного состояния контур управления имеет линейный характер. Управление креном формируется за счёт изменения разности частот правых и левых двигателей при неизменной суммарной тяге. Таким образом, контуры управления по крену и тангажу

могут быть представлены в виде структурной схемы, показанной на рисунке на рисунке 3.1.

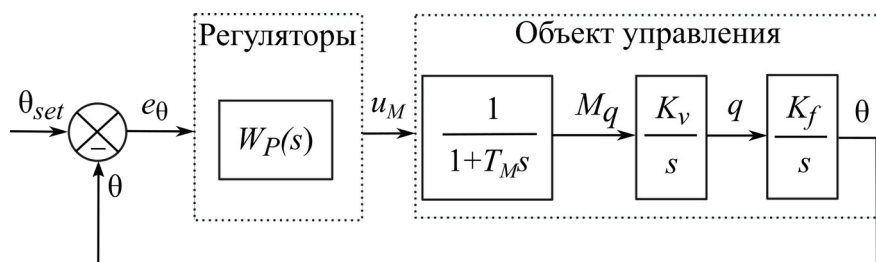


Рисунок 3.1 – Структурная схема контура управления по крену

Если в качестве регулятора использовать классический PID, то замкнутый контур будет обладать астатизмом третьего порядка. Настройка такого контура представляет значительную сложность, а величина перерегулирования может превышать 30 %. По этой причине на практике во внешний контур вводят вложенный внутренний контур, как показано на рисунке 3.2.

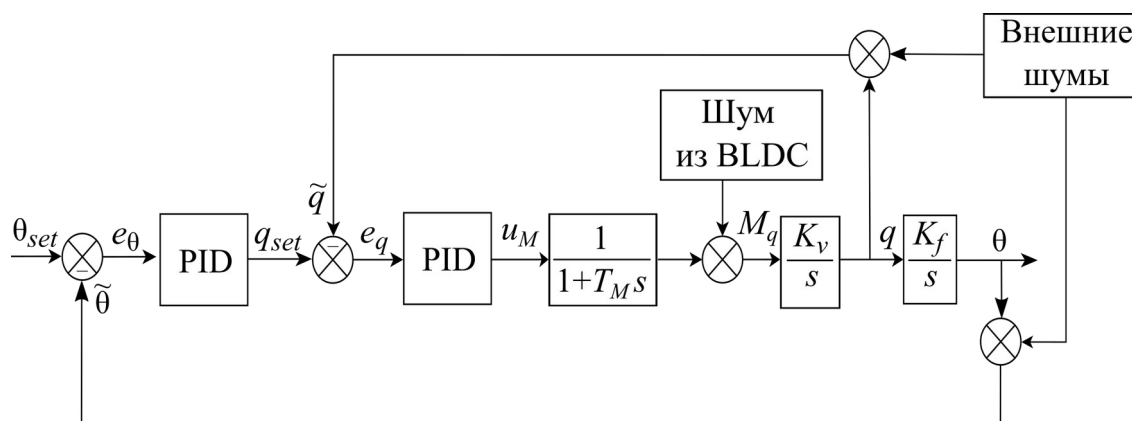


Рисунок 3.2 – Структурная схема управления с вложенным контуром

Переменные $\tilde{\theta}$ и $\tilde{q}$ доступны для измерения с использованием IMU. Эти измерения подвержены гауссовскому шуму и ошибкам, связанным с дискретизацией сигнала. Кроме того, как было показано во второй главе, модель должна учитывать влияние помех, возникающих при переключении потокоцепления, посредством введения возмущающего момента M_q , что необходимо для корректного синтеза и настройки контура управления.

Анализ исходного кода реальных проектов [102-104] показывает, что в окрестности фиксированной рабочей точки (заданный газ/ RPM) связь между

управляющим сигналом (U) и моментом (M_ω) по оси крена может быть адекватно аппроксимирована линейной моделью второго порядка

$$\frac{M_\omega(s)}{U(s)} = \frac{K_u}{(1+T_1s)(1+T_2s)} \quad (3.3)$$

или эквивалентным ей дифференциальным уравнением. Постоянные времени T_1 и T_2 оказываются существенно больше (на один - два порядка), чем T_M , что позволяет рассматривать данный элемент контура как фильтр, эффективно подавляющий помехи, включая механические.

Чрезмерное увеличение параметров T_1 и T_2 приводит к ухудшению временных характеристик системы: время ПП возрастает пропорционально степени превышения T_1 и T_2 над T_M . При этом такие показатели, как перерегулирование и колебательность, могут улучшаться, однако общее качество ПП снижается из-за чрезмерного удлинения времени регулирования.

Альтернативным решением для уменьшения постоянных времени может стать применение ФК, включающего математическую модель контура управления креном и тангажом. При успешной реализации фильтра можно попытаться использовать более прогрессивные методы управления, где формируется фазовая траектория управления. В частности, представляют интерес два подхода: синтез систем управления со скользящими режимами для обеспечения робастности и синтез оптимального по быстродействию управления на основе принципа максимума Понтрягина для объекта второго порядка.

Поскольку эти методы оперируют фазовыми траекториями переключения или более сложными поверхностями в пространстве изменений ошибки (пропорциональная часть) и её производной (дифференциальная часть), то в таких методах предполагается, что интегральная часть присутствует в рамках модели объекта или подключена последовательно регулятору. В этом случае структуры PID-регулятора – может быть представлена дифференциальными уравнениями

$$u_I = K_{pv} e_q - K_{dv} \frac{de_q}{dt}; \frac{du_M}{dt} = K_M u_I; u_{I \min} \leq u_I \leq u_{I \max}, \quad (3.4)$$

крена квадрокоптера, полученные на шаге k ; K_M – ограничение на скорость изменения управляющего сигнала преобразователя частоты, определяемое характеристиками BLDC-мотора; $\tilde{q}, \tilde{\theta}$ – зашумленные измерения.

Важно отметить, что в структурной схеме используются два идентичных PD-регулятора, которые могут быть заменены законами управления: либо на основе метода скользящих режимов для обеспечения робастности, либо на основе принципа максимума для достижения оптимальности по быстродействию.

3.1 Синтез линейной системы в точках равновесного состояния

Предположим, что угол крена θ и его производная q доступны для измерения и не подвержены шуму. Тогда, в соответствии с уравнением динамики вращательного движения при линеализованной модели, момент (M_q) по каналу крена пропорционален угловому ускорению ($\dot{q}$) и также на данном этапе синтеза контура управления креном релейный закон на изменение скорости ESC - преобразователя не учитывается. При этом параметры квадрокоптера T_M , K_f , K_v известны и стационарны при условии, что все контура управления находятся в точке равновесного состояния. Тогда структурная схема на рисунке 3.3 может быть представлена без ФК и ограничителя, как показано на рисунке 3.4.

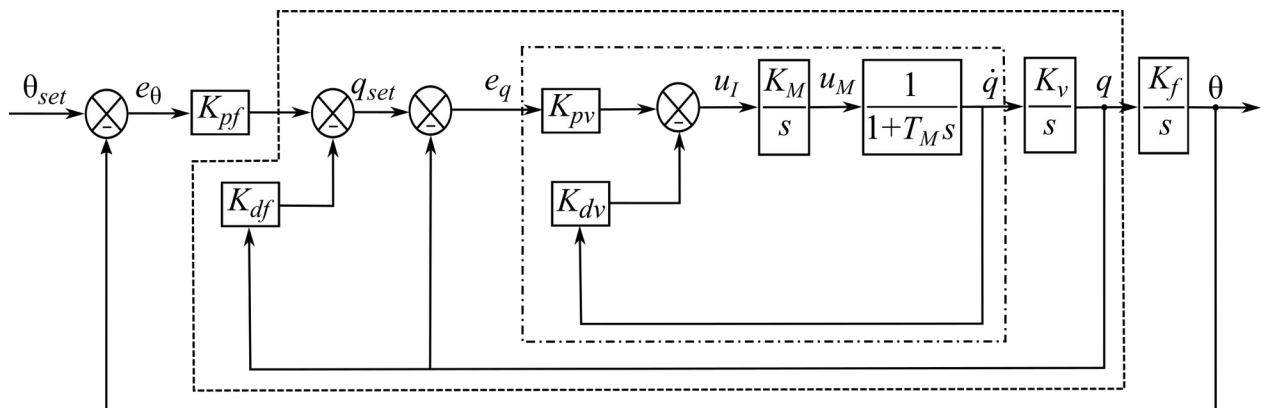


Рисунок 3.4 – Структурная схема линеаризованного контура управления по крену

Как видно из рисунка 3.4, систему управления можно представить в виде трёх последовательно вложенных контуров регулирования. Такая структура упро-

щает процесс настройки, поскольку каждый контур может быть настроен по принципу модульного оптимума.

Передаточную функцию разомкнутой системы внутреннего контура можно привести к виду

$$W_{\text{opt}}(s) = \frac{1}{(1 + T_{\mu} s) T_{\mu} s g}, \quad (3.5)$$

где T_{μ} – эквивалентная постоянная времени объекта, определяемая в соответствии с методом модульного оптимума; параметр g подбирается из условия обеспечения перерегулирования, близкого к 5 %. Можно показать, что этому условию соответствуют корни характеристического уравнения с одинаковыми значениями комплексной и реальной части при $g = 2$. Решение характеристического уравнения

$$1 + g T_{\mu} s + g T_{\mu}^2 s^2 = 0 \quad (3.6)$$

записывается в следующем виде

$$x_{1,2} = \frac{-g T_{\mu} \pm \sqrt{(g T_{\mu})^2 - 4 g T_{\mu}^2 s^2}}{2 g T_{\mu}^2}. \quad (3.7)$$

Из равенства абсолютных значений реальной и комплексной части $(g T_{\mu})^2 = -(g T_{\mu})^2 + 4 g T_{\mu}^2$ можно последовательно $(g T_{\mu} = -g T_{\mu} + 4 T_{\mu})$ выразить параметр $g = 2$, что соответствует значению коэффициента фильтра Баттерворта $a_1 = 1,41421$. Это можно увидеть выполнив нормирование характеристического уравнения (3.6) приняв безразмерный оператор Лапласа $\tilde{s} = s(T_{\mu} \sqrt{g})$, тогда характеристическое уравнение будет представлено выражением $1 + \sqrt{g} \tilde{s} + \tilde{s}^2 = 0$, тогда $a_1 = \sqrt{g} = \sqrt{2} = 1,414213562$. Таким образом, внутренний контур, структура которого представлена на рисунке 3.5

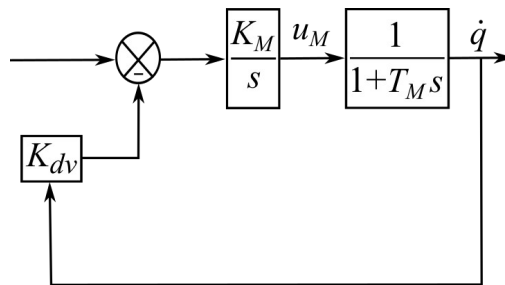


Рисунок 3.5 – Структурная схема внутреннего контура W_{cl} по $\dot{q}$

может быть настроен приведением к соответствию передаточных функций разомкнутых систем

$$W_{opt1}(s) = \frac{1}{(1 + T_{\mu} s) T_{\mu} s g}; W_{c1}(s) = \frac{K_{dv} K_M}{(1 + T_M s) s}. \quad (3.8)$$

Соответствие (3.8) обеспечивается равенствами

$$T_{\mu} = T_M; K_{dv} = \frac{1}{g T_{\mu} K_M}; g = 2, \quad (3.9)$$

параметр K_M – выбирается из условий ограничения скорости нарастания сигнала u_M , которое определяется характеристиками двигателя и ESC-преобразователя.

Для настройки второго контура по переменной q , передаточную функцию выше рассмотренного внутреннего контура замкнутой системы согласно структурной схемы (рисунок 3.5) представим в виде

$$W_{c2}(s) = \frac{1}{K_{dv}} \frac{1}{(1 + g T_M s + g T_M^2 s^2)}. \quad (3.10)$$

В этом случае второй контур по q примет вид согласно рисунку 3.6.

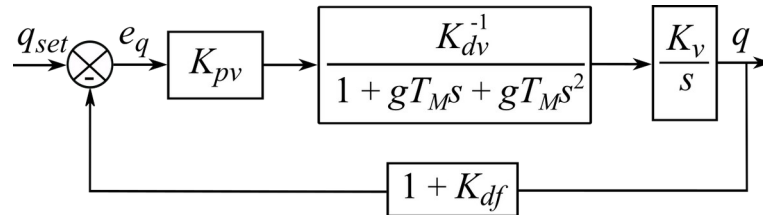


Рисунок 3.6 – Структурная схема второго контура W_{c2} по q

Такому контуру соответствует передаточная функция разомкнутой оптимальной системы вида (3.5) третьего порядка

$$W_{opt2}(s) = \frac{1}{(1 + 2 T_{\mu} s + 2 T_{\mu}^2 s^2) T_{\mu 1} s g_k}, \quad (3.11)$$

для разомкнутой системы (3.10). Значение определяется из значения реальной части корня (3.7) характеристического уравнения (3.6) и связано с выражением

$$T_{\mu 1} = \frac{1}{|\Re(x_{12})|} = 2 T_{\mu}. \quad (3.12)$$

Таким же образом найден параметры для внешнего контура. В структурной схеме (рисунок 3.4) следует определить четыре параметра K_{pf} , K_{df} , K_{pv} , K_{dv} , которые можно перераспределить используя правила структурных преобразований линейных схем. При синтезе регулятора по критерию модального оптимума была выполнена аппроксимация нелинейного элемента с реле, а влияние измерительных шумов в рамках данного этапа не учитывалось. На рисунке 3.7 предложена оптимизированная структурная схема

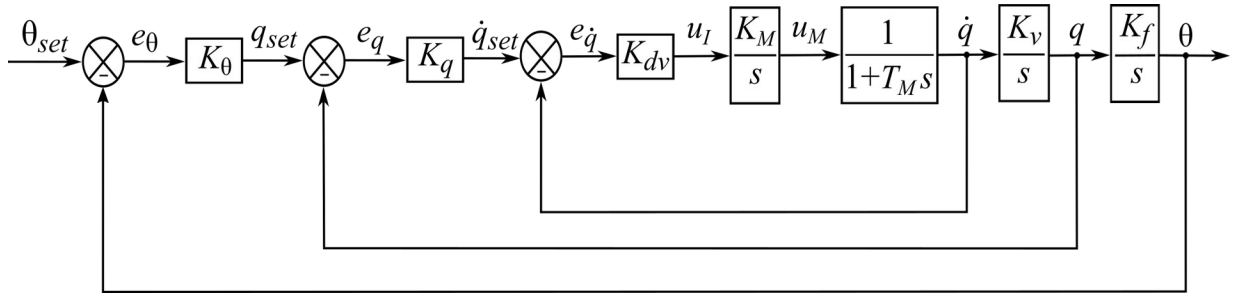


Рисунок 3.7 – Оптимизированная схема распределения управляющих воздействий по каналу крана

Для вышеуказанной схемы, параметры регулятора могут быть определены с использованием функций пересчёта, полученных на основе физических параметров квадрокоптера K_f , K_v , K_M , T_M согласно выражениям (3.8), (3.10) и (3.11), аналогично подходу, описанному в выражении:

$$\begin{aligned} K_{dv} &= \frac{1}{K_M 2 T_M}, \\ K_q &= \frac{1}{K_v g_k 2 T_M}, \\ K_\theta &= \frac{1}{K_f g_k 4 T_M}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Как видно, каждый параметр зависит от времени инерции двигателя и коэффициента передачи только своего контура. Другими словами, все параметры по коэффициентам передачи разделены и могут рассматриваться отдельно.

Параметр $g_k = 2,23$ подобран эмпирическим путём для обеспечения перерегулирования переходного процесса примерно равным 5 %. Программа тестирования переходных процессов представлена в скрипте 3.1.

Скрипт 3.1 – Программа тестирования переходных процессов

```

s=poly(0,'s');
Tm=5;g=2;gk=2.23;
Wb = 1/((1+Tm*s)*Tm*g *s );
Wc1 = Wb/(1+Wb);
Wb = Wc1 * (1/(s*g*Tm*gk));
Wc2 = Wb/(1+Wb);
Wb = Wc2 * (1/(s*g^2*Tm*gk));
Wc3 = Wb/(1+Wb);
Wb = Wc3 * (1/(s*g^3*Tm*gk));
Wc4 = Wb/(1+Wb);
t=0:0.1:500;
plot2d([t',t'],[(csim('step',t,Wc1))',0*t'])
plot2d([t',t'],[(csim('step',t,Wc2))',0*t'])
plot2d([t',t'],[(csim('step',t,Wc3))',0*t'])
plot2d([t',t'],[(csim('step',t,Wc4))',0*t'])

```

Для каждого внешнего контура время ПП увеличивается в два раза в соответствии с соотношением (3.12). На рисунке 3.8 представлены результаты моделирования для двух значений времени: $T_M = 5$ мс и $T_M = 25$ мс в системе из четырёх вложенных контуров.

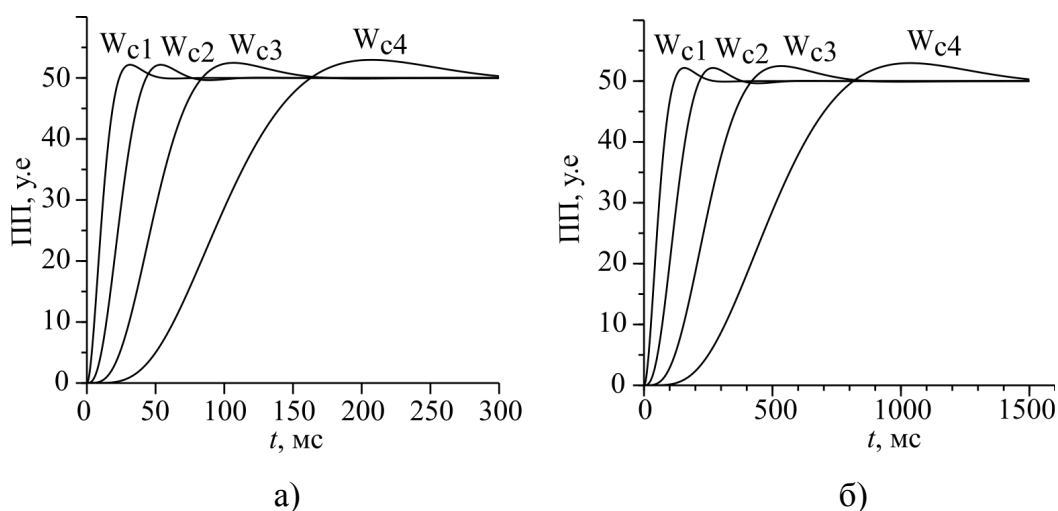


Рисунок 3.8 – Результаты моделирования для времени а) $T_M = 5$ мс и б) $T_M = 25$ мс

Моделирование четвёртого контура выполнено исключительно для проверки работоспособности предложенных методов. Как видно из результатов моделирования 3.8, при изменении постоянной времени инерционности форма переходного

процесса сохраняется неизменной, изменяются лишь временной масштаб и его длительность. При этом время переходного процесса каждого последующего (внешнего) контура вдвое превышает время переходного процесса соседнего внутреннего контура. Такое умеренное увеличение времени регулирования существенно меньше, чем рекомендуется в классической методике проектирования каскадных систем управления, где для обеспечения устойчивости и независимости контуров полосы пропускания (или частоты среза) соседних контуров разнятся приблизительно на декаду, то есть в 10 раз по частоте (что соответствует увеличению времени переходного процесса также примерно в 10 раз).

При использовании трёхконтурной структуры (внешний контур и два внутренних) время переходного процесса для контура $W_{с3}$ превышает время для $W_{с1}$ всего в 4 раза, что демонстрирует более высокую быстродействие предложенной архитектуры.

Параметр K_{dv} обратно пропорционален параметрам K_M , T_M , имеющим определённый физический смысл:

- T_M – постоянная времени привода, которая может быть определена по переходным процессам плавного и быстрого пуска двигателя [105];
- K_M – коэффициент передачи интегрирующего звена, задающий ограничение на скорость изменения управляющего сигнала ESC-преобразователя частоты, рассмотренное в разделе 2.3.

Таким образом, можно утверждать, что параметр K_{dv} полностью определяется параметрами двигателя и привода.

Параметр K_q обратно пропорционален параметрам K_v , T_M . Значение K_v определяется инерционными характеристиками квадрокоптера – массой, моментом инерции и аэродинамическими свойствами корпуса. В процессе полёта эти параметры могут существенно изменяться. Поэтому основная проблема настройки контуров управления тангажом и креном связана именно с необходимостью адаптации коэффициента K_q .

Параметр K_θ обратно пропорционален K_f , T_M . Значение K_f выбирается с учётом динамического диапазона применяемого датчика MPU-6050, что определяет максимально допустимую угловую скорость и, следовательно, влияет на настройку внешнего контура стабилизации.

Параметр K_f определяется на основе масштабного коэффициента гироскопа MPU-6050. Данный датчик выдаёт угловую скорость в виде цифрового кода (целого числа), который требует преобразования в физическую величину (рад/с или °/с) с использованием чувствительности, заданной в технической документации [106].

Для гироскопа с N -битным знаковым выходом (у MPU-6050: 16 бит, значит на край диапазона приходится $2^{N-1} = 32768$ отсчётов):

$$S_{\text{LSB } /(^{\circ}/\text{с})} = \frac{2^{N-1}}{FS_{^{\circ}/\text{с}}}, \quad (3.14)$$

где $S_{\text{LSB } /(^{\circ}/\text{с})}$ – чувствительность в LSB на °/с (например 131; 65,5; 32,8; 16,4), $FS_{^{\circ}/\text{с}}$ – полный диапазон в °/с (например, 250; 500; 1000; 2000).

Обратный коэффициент K_f :

$$K_f(^{\circ}/\text{с}/\text{LSB}) = \frac{1}{S_{\text{LSB } /(^{\circ}/\text{с})}} = \frac{FS_{^{\circ}/\text{с}}}{2^{N-1}}. \quad (3.15)$$

В численном виде значения коэффициента K_f представлены в таблице 3.1:

Таблица 3.1 – Значения K_f в зависимости от диапазона гироскопа MPU-6050

Диапазон (°/с)	Масштабный коэффициент (LSB/°/с)	K_f (°/с на LSB)
± 250	131	≈ 0,0076
± 500	65,5	≈ 0,0152
± 1000	32,8	≈ 0,03
± 2000	16,4	≈ 0,061

Для проверки метода синтеза контура управления тангажом и креном, результатом которого стала структурная схема (рисунок 3.7) и выражения для расче-

та параметров контуров регулирования (3.13), выполнено моделирование на языке Python. Моделирование выполнялось для нескольких вариантов параметров объекта согласно таблицы 3.2 для исследования качества настройки по выражениям (3.13). Результаты моделирования представлены на рисунке 3.9.

Таблица 3.2 – Параметры объекта для четырёх вариантов

	K_f	K_v	T_M	K_M
а	0,06	0,5	0,25	0,003
б	0,03	0,05	0,05	0,03
в	0,02	10	10^{-3}	0,3
г	0,01	100	1	5,0

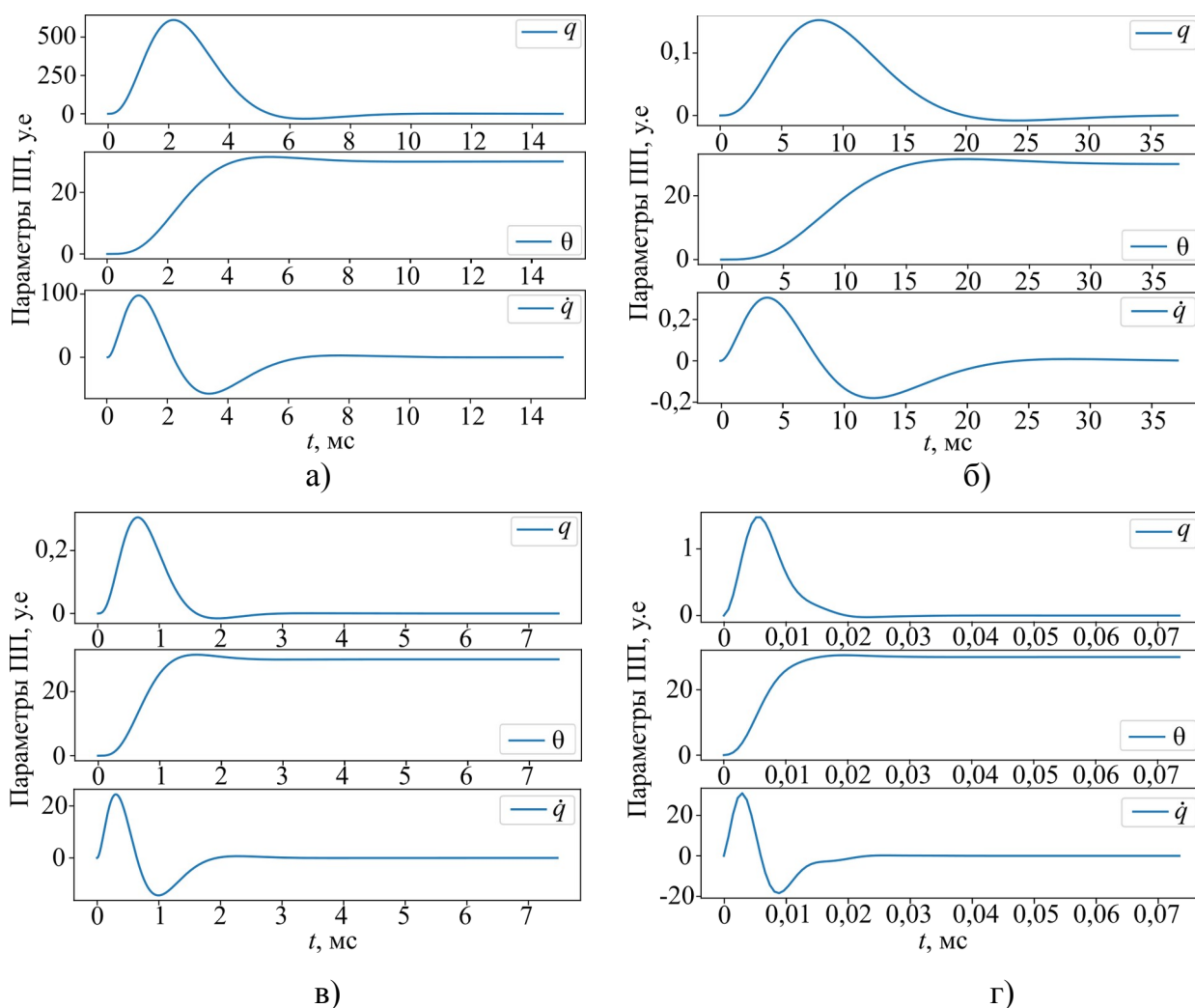


Рисунок 3.9 – Результаты тестирования ПП оптимизированного контура крена для 4-х вариантов

Как видно из рисунков, форма переходного процесса не изменяется во всех вариантах, при изменении коэффициентов меняются только амплитуды сигналов, а при изменении времени меняется шкала времени (варианты а, б в и г). Из этого следует, что для структурной схемы замкнутых контуров управления (рисунок 3.7) существует связь параметров регулятора с параметрами объекта (3.13), которая обеспечивает оптимальное управление с перерегулированием, не превышающим 5 %.

Управление формируется на основании измеренных сигналов с шумом q и θ , что значительно влияет на выход PD-регулятора (u_I). Такой формы сигнал непригоден для управления частотным приводом, поскольку, как показано в главе 2, имеется ограничение на скорость изменения сигнала управления. Роль ограничителя скорости и интегральной части регулятора выполняет блок интегрирования с коэффициентом K_M .

Такой контур управления также устойчив к значительным шумам в цепи измерения угла крена и его скорости в датчике.

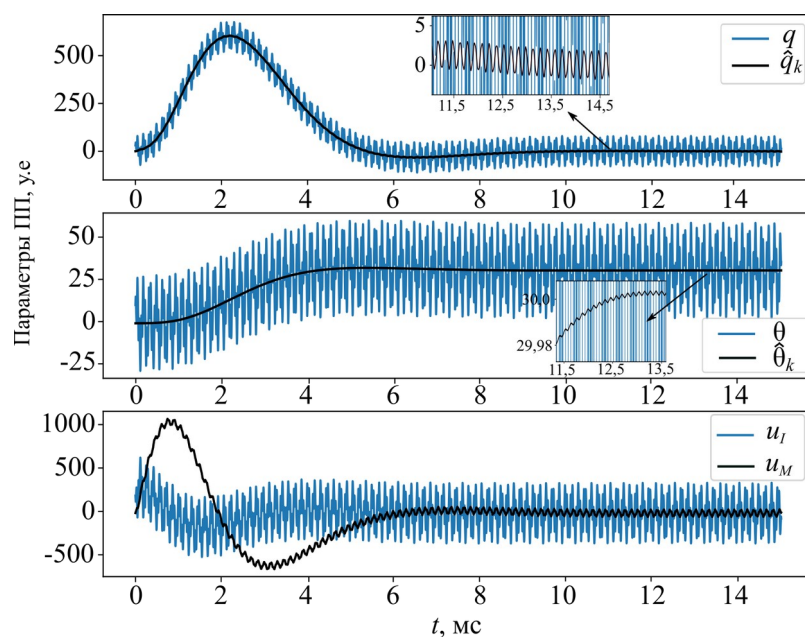


Рисунок 3.10 – Переходные процессы параметров квадрокоптера при воздействии спектральных составляющих помех

В результате сигнал управления u_M имеет приемлемую для частотного преобразователя форму и параметры, при этом форма переходного процесса для переменных q_k и θ_k практически не отличается от процессов на рисунке 3.9.

На этом основании можно предполагать, что использование системы управления креном и тангажом (рисунок 3.7) с настройками (3.13) позволяет обойтись без использования ФК. Экспериментальное исследование этого предположения рассмотрено в главе 4.

3.2 Синтез фильтра Калмана

Для реализации системы управления на основе синтеза фазовых траекторий требуется качественная оценка q и θ на основании измеренных значений, где присутствует сигнал помехи с неприемлемо большой амплитуды. Поэтому предложена структурная схема управления 3.11, в которой внутренний PD-регулятор для угловой скорости заменён фазовой поверхностью, а реконструкция состояния выполнена на основе ФК. Важно отметить, что в подобных системах фильтр уже имеет применение, но, как правило, с учётом модели гироскопа, где параметр времени интегрирования между углом и скоростью известен из руководства пользователя.

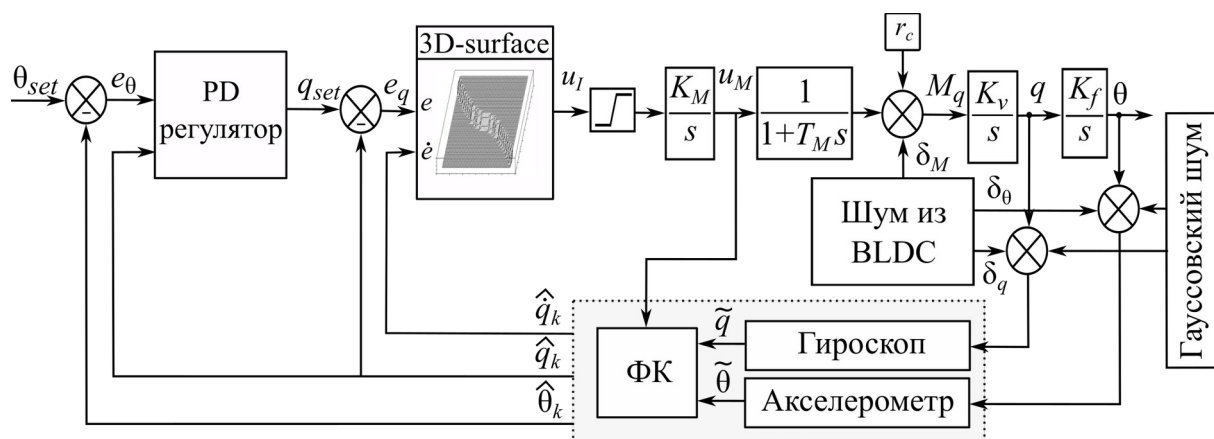


Рисунок 3.11 – Структурная схема управления по каналу крена с заменой PD-регулятора на закон управления, синтезированный на основе фазовых поверхностей

Однако, схема контура управления на рисунке 3.11, содержит еще динамические элементы, которые также можно учитывать в качестве математической модели объекта управления.

Для построения фильтра рассмотрим алгоритм, который реализуется в несколько этапов, подробно описанных в [107-110]:

1. Оценка вектора состояния по математической модели

$$x_k = F x_{k-1} + B u_M ; \quad (3.16)$$

2. Вычисление ковариационной матрицы вектора состояния

$$P_k = F P_{k-1} F^T + Q ; \quad (3.17)$$

3. Определение отклонения оценённых и измеренных значений

$$\hat{y}_k = z_k - H x_k ; \quad (3.18)$$

4. Вычисление ковариационной матрицы вектора отклонения

$$S_k = H P_k H^T + R ; \quad (3.19)$$

5. Вычисление коэффициентов коррекции Калмана

$$K_k = P_k H^T S_k^{-1} ; \quad (3.20)$$

6. Коррекция вектора состояния, полученного на 1-ом этапе

$$\hat{x}_k = x_k + K_k \hat{y}_k ; \quad (3.21)$$

7. Расчёт ковариационной матрицы оценки вектора состояния системы

$$\hat{P}_k = (I - K_k H) P_k . \quad (3.22)$$

Поскольку этапы 2, 4, 5, 7 с их выражениями (3.17), (3.19), (3.20), (3.22) – не зависят от переменных состояния системы, то эти этапы можно рассматривать отдельно для определения коэффициентов Калмана в матрице K_k . Эти коэффициенты определяются параметрами объекта:

- Матрица вектора состояния F ;
- Матрица измерения H ;
- Матрица или коэффициент Q – обуславливающий меру воздействия внешних факторов, влияющих на процесс и математическую модель;
- Матрица или коэффициент R – обуславливающий меру воздействия факторов, влияющих на процесс измерения.

Для представления интервальных параметров используется вероятностный подход, в основе которого лежит замена параметров интервального типа независимыми случайными величинами с равномерным распределением [111-113]. При этом, если ковариационные матрицы шумов (в частности Q и R) предполагаются стационарными, то и соответствующие коэффициенты усиления фильтра устанавливаются один раз и остаются неизменными на всём интервале оценивания, что упрощает вычислительную реализацию алгоритма. В данном случае нет смысла пересчитывать их в процессе управления, выполнив эту часть работы на этапе синтеза. Однако, как показано в главе 2, при изменении скорости вовремя маневрирования качество оценки переменных состояния может сильно ухудшаться, что соответствует увеличению значений матрицы Q . В качестве решения можно выполнить ряд экспериментов с моделью для определения зависимости коэффициентов K_k от Q и R . Вероятно, не все коэффициенты матрицы будут определяющими и, возможно, будет выявлена достаточно простая зависимость, на пример, от изменения сигналов управления на моторы.

Также полагаем, что матричные выражения (3.16), (3.18), (3.21) (на этапах 1, 3, 6) могут быть записаны в виде простых алгебраических выражений. В этом случае можно избежать значительных вычислений в процессе управления, что весьма важно, поскольку решение нужно принимать с дискретизацией от 1 мс до 3 мс.

На основании структурной схемы на рисунке 3.11, можно записать три дифференциальных уравнения первого порядка

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= q K_f, \\ \frac{dq}{dt} &= M_q K_v, \\ \frac{dM_q}{dt} &= \frac{u_M - M_q}{T_M}.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Для получения разностных уравнений запишем их заменив dt на интервал дискретизации

$$\begin{aligned}
\frac{\theta_k - \theta_{k-1}}{\Delta t} &= q_{k-1} K_f, \\
\frac{q_k - q_{k-1}}{\Delta t} &= M_{q,k-1} K_v, \\
\frac{M_{q,k} - M_{q,k-1}}{\Delta t} &= \frac{u_M - M_{q,k-1}}{T_M}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Далее выразим переменные состояния на текущем шаге дискретизации

$$\begin{aligned}
\theta_k &= \theta_{k-1} + K_f \Delta t q_{k-1}, \\
q_k &= q_{k-1} + K_v \Delta t M_{q,k-1}, \\
M_{q,k} &= \left(1 - \frac{\Delta t}{T_M}\right) M_{q,k-1} + \frac{\Delta t}{T_M} u_M.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

На основе (3.25) можно составить матричное уравнение

$$\begin{vmatrix} \theta_k \\ q_k \\ M_{q,k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & K_f \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & K_v \Delta t \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\Delta t}{T_M} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_{k-1} \\ q_{k-1} \\ M_{q,k-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta t}{T_M} \end{vmatrix} u_M, \tag{3.26}$$

для выражения (3.16) векторы и матрицы представлены выражениями

$$x_k = \begin{vmatrix} \theta_k \\ q_k \\ M_{q,k} \end{vmatrix}; x_{k-1} = \begin{vmatrix} \theta_{k-1} \\ q_{k-1} \\ M_{q,k-1} \end{vmatrix}; F = \begin{vmatrix} 0 & K_f \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & K_v \Delta t \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\Delta t}{T_M} \end{vmatrix}; B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta t}{T_M} \end{vmatrix}. \tag{3.27}$$

Поскольку математическая модель построена в безразмерных переменных — а именно, в относительных значениях угла и угловой скорости, нормированных на разрядную сетку аналого-цифрового преобразователя (АЦП) и лежащих в диапазоне от $(2^{-15} \dots (2^{15} - 1))$, то матрица H принимает следующий вид:

$$H = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{3.28}$$

Матрицы либо, коэффициенты Q и R на практике подбираются эмпирически [109, 114, 115], особенно в случаях, когда отсутствуют аналитически обоснованные модели или статистические оценки характеристик шумов и неопределённостей в системе. Как уже было показано выше, коэффициенты передачи фильтра Калмана (матрица усиления K) определяются не только структурой динамической

модели объекта – в частности, матрицами состояния F и управления B , – но и напрямую зависят от значений ковариационных матриц Q и R [116]. Эти параметры задают баланс между доверием к модели и доверием к измерениям. В ходе исследования различных подходов к моделированию системы с ФК было установлено, что для анализа и настройки фильтра достаточно рассматривать отношение абсолютных значений определителей ковариационных матриц процесса и измерений: $Val_{Q/R} \equiv ||Q|| / ||R||$ [109, 117].

- При большом значении $Val_{Q/R}$ преобладает неопределённость в модели объекта по сравнению с уровнем шумов измерений; в этом случае ФК отдаёт предпочтение измеренным данным z_k .

- Напротив, при малом значении $Val_{Q/R}$ модель объекта считается достоверной, а измерения – сильно зашумлёнными; следовательно, фильтр больше доверяет оценкам переменных состояния x_k , полученным на основе модели.

Результаты моделирования показаны на рисунке 3.12 для крайних случаев $Val_{Q/R} = 0$ и $Val_{Q/R} = \infty$

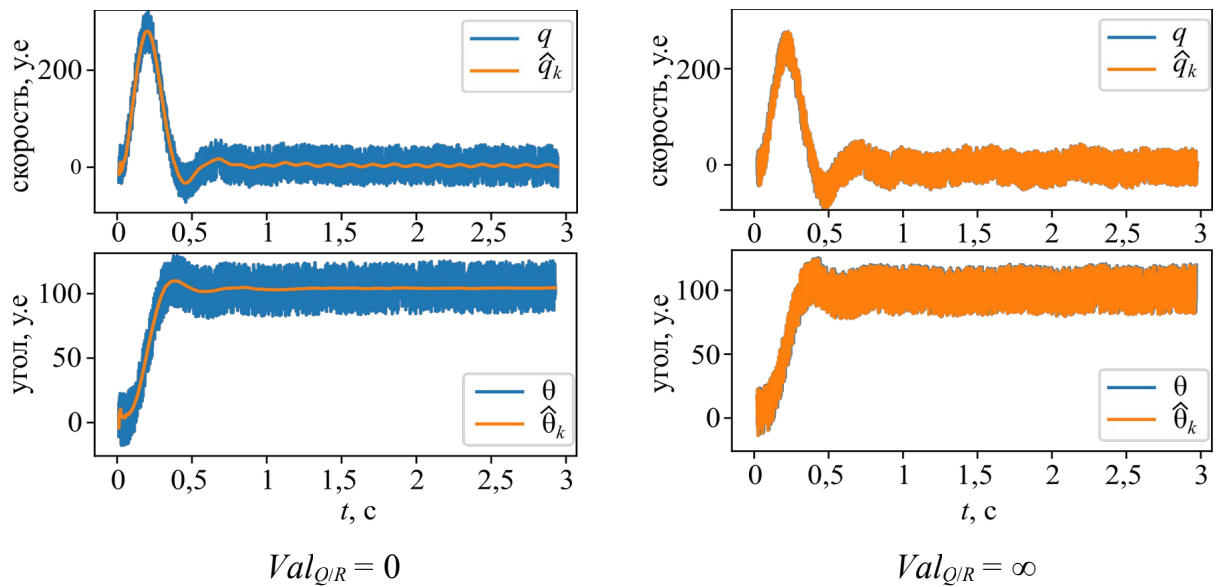


Рисунок 3.12 – Результаты моделирования для значений $Val_{Q/R} = 0$ и $Val_{Q/R} = \infty$

Для значений $Val_{Q/R} = 10^{-3}$ и $Val_{Q/R} = 2 \times 10^{-3}$ результаты показаны на рисунке 3.13

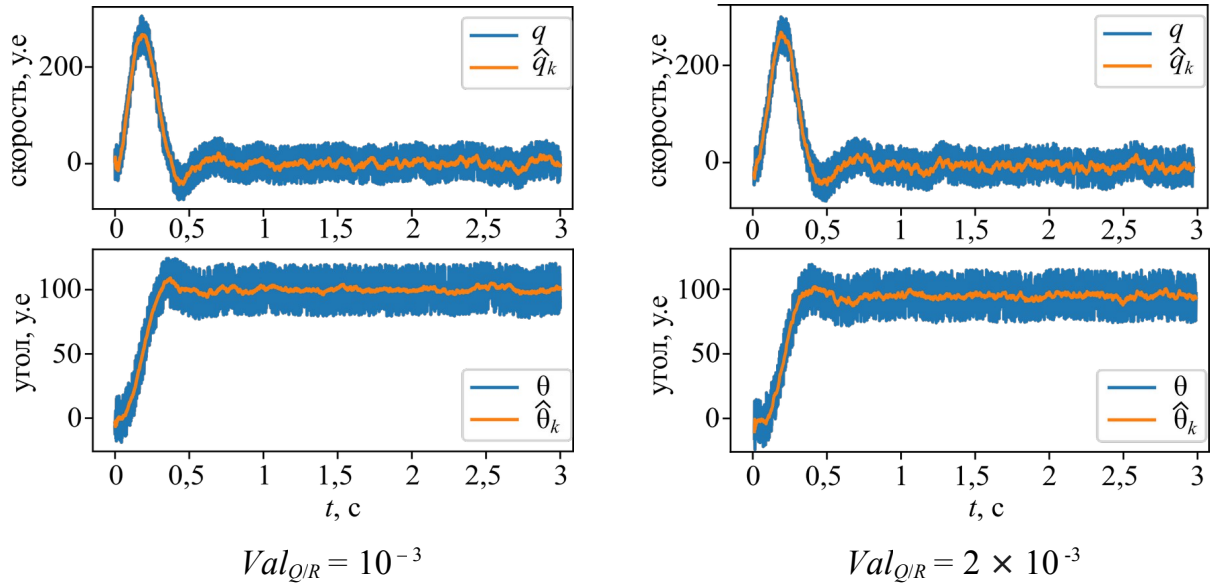


Рисунок 3.13 – Результаты моделирования для значений $Val_{Q/R} = 10^{-3}$ и $Val_{Q/R} = 2 \times 10^{-3}$

Для значений $Val_{Q/R} = 0,02$ и $Val_{Q/R} = 0,2$ результаты показаны на рисунке 3.14

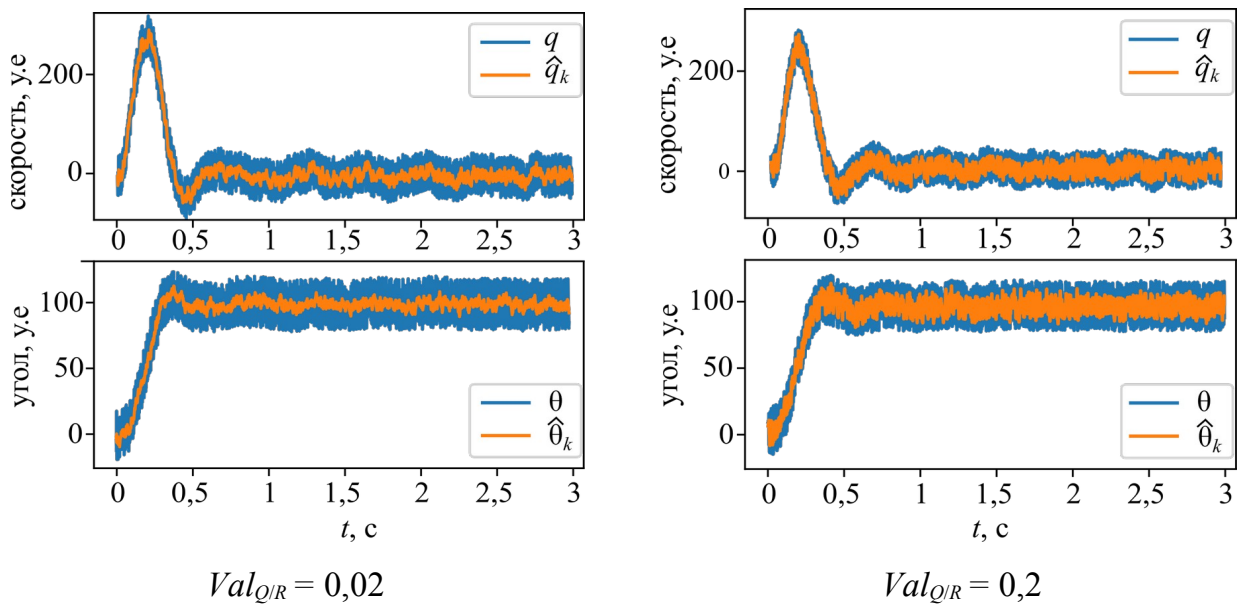


Рисунок 3.14 – Результаты моделирования для значений $Val_{Q/R} = 0,02$ и $Val_{Q/R} = 0,2$

Анализ шести рассмотренных случаев позволяет сделать вывод: характер ПП в замкнутой системе управления существенно зависит от соотношения $Val_{Q/R}$. При малых значениях параметра система склонна к «модельному» поведению с подавлением измерительного шума. При больших значениях система становится чувствительной к шумам измерений, однако быстрее отслеживает изменения состоя-

ния объекта. На основании результатов моделирования выполнен анализ зависимости матрицы усиления фильтра K от отношения $Val_{Q/R}$.

Соответствие отношений Q и R к значениям матрицы усиления Калмана представлены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Соответствие отношений Q и R к значениям матрицы Калмана

$Val_{Q/R}$	K_k				$Val_{Q/R}$	K_k		
0	$K_k =$	0,00114	0,00028		∞	$K_k =$	1 0	
		0,00028	0,001				0 1	
		0	0				0 0,66	
10^{-3}	$K_k =$	0,031	0,001		2×10^{-3}	$K_k =$	0,044 0,001	
		0,001	0,058				0,001 0,075	
		0,000074	0,011				0,0001 0,018	
0,02	$K_k =$	0,13	0,0009		0,2	$K_k =$	0,36 0,00054	
		0,0009	0,176				0,00054 0,4	
		0,0002	0,072				0,00019 0,22	

Из таблицы видно, что коэффициенты матрицы во всех случаях k_{12} , k_{21} , k_{31} – не имеют особой корреляцией между соответствующими значениями измерений и переменных состояния, поэтому ими можно пренебречь. Коэффициент k_{32} – корректирует оценку момента $M_{q,k}$ по величине q_k . Момент датчиком не измеряется, но его можно оценить из сигнала управления, который вычисляется регулятором.

В пересчёте оценок участвуют только коэффициенты k_{11} и k_{22} , которые непосредственно связывают оценку θ_k с её измеренным значением, также и оценка q_k связана с её измеренным значением. Будем обозначать $K_{\theta,k} = k_{11}$ и $K_{q,k} = k_{22}$, чтобы придать им физический смысл связанный с переменной, которую оцениваем.

Диапазон значений этих коэффициентов принадлежит интервалу (0-1) и соответствует физическому смыслу как мера доверия измеренному значению. Значение этих коэффициентов подбирается эмпирическим путём для разных уровней шума измерений и вибраций на валу двигателя. Возможно подобрать функцию аппроксимации этих коэффициентов $f_{\theta}(u_M, du_M/dt)$ и $f_q(u_M, du_M/dt)$ от обобщённой мощности двигателей, поскольку увеличение изменения скорости оборотов

увеличивает влияние помех от процессов потокоцепления на качество измеренного сигнала. Данные функции аппроксимации заменяют этапы 2, 4, 5, 7 алгоритма Калмана с их выражениями (3.17), (3.19), (3.20), (3.22). Вместо 1 этапа с матричным выражением (3.16) можно использовать алгебраически заданные уравнения (3.25), а вместо (3.18) и (3.21) (этапы – 3 и 6) можно использовать сокращённые до двух функций выражения с учётом особенности матрицы K_k .

В результате синтеза ФК, построенного для оценки состояния канала крена, получен алгоритм, реализуемый в два этапа:

1. Этап прогноза состояния на следующий шаг:

$$\begin{cases} \theta_k = \theta_{k-1} + K_f \Delta t q_{k-1}, \\ q_k = q_{k-1} + K_v \Delta t M_{q,k-1}, \\ M_{q,k} = M_{q,k-1} + \frac{\Delta t}{T_M} (u_M - M_{q,k-1}), \end{cases} \quad (3.29)$$

2. Этап коррекции с учётом поступающих измерений:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_k = \theta_k + K_{\theta,k} (\tilde{\theta} - \theta_k), \\ \hat{q}_k = q_k + K_{q,k} (\tilde{q} - q_k). \end{cases} \quad (3.30)$$

Коэффициенты Калмана $K_{\theta,k}$ и $K_{q,k}$ определяются как функции текущего управляющего сигнала u_M и скорости его изменения du_M/dt :

$$\begin{cases} K_{\theta,k} = f_{\theta,k}(u_M(t), du_M/dt), \\ K_{q,k} = f_{q,k}(u_M(t), du_M/dt). \end{cases} \quad (3.31)$$

Спектральные составляющие и шумы влияют на измеряемые датчиком IMU углы и угловые скорости $(\tilde{\theta}, \tilde{q})$, которые задаётся следующим образом:

$$\begin{cases} a_{meas}(t) = R_{wb}^T(t) (a_w(t) - g_w(t)), \\ \theta_{meas}(t) = \arctan 2 \left(-a_{meas x}(t), \sqrt{a_{meas y}^2(t) + a_{meas z}^2(t)} \right), \\ \tilde{\theta}(t) = \theta_{meas}(t) + b_{\theta}(t) + n_{\theta}(t) + \delta_{\theta}(t), \\ \tilde{q}(t) = q_{meas}(t) + b_q(t) + n_q(t) + \delta_q(t), \end{cases} \quad (3.32)$$

где $a_w(t)$ – истинное линейное ускорение объекта в инерционной системе координат, $g_w(t)$ – вектор гравитации в мировой системе координат, $a_{meas}(t)$ – вектор измерений акселерометра в момент времени t , $\theta_{meas}(t)$ – измеренный угол наклона

крена, $b_{\theta,q}(t)$ – смещения акселерометра, гироскопа; $n_{\theta,q}(t)$ – белый гауссовский шум измерения с нулевым средним; R_{wb} – матрица поворота.

Для исследования работоспособности фильтра используем программу, написанную на C++, поскольку в дальнейшем реализация кода на контроллере доступна только на этом языке. Ниже приведены результаты моделирования без использования ФК (рисунки 3.15 и 3.16) и с использованием ФК (рисунки 3.17 и 3.18), где параметры модели и объекта совпадают (рисунки 3.15 и 3.17) и не совпадают (рисунки 3.16 и 3.18).

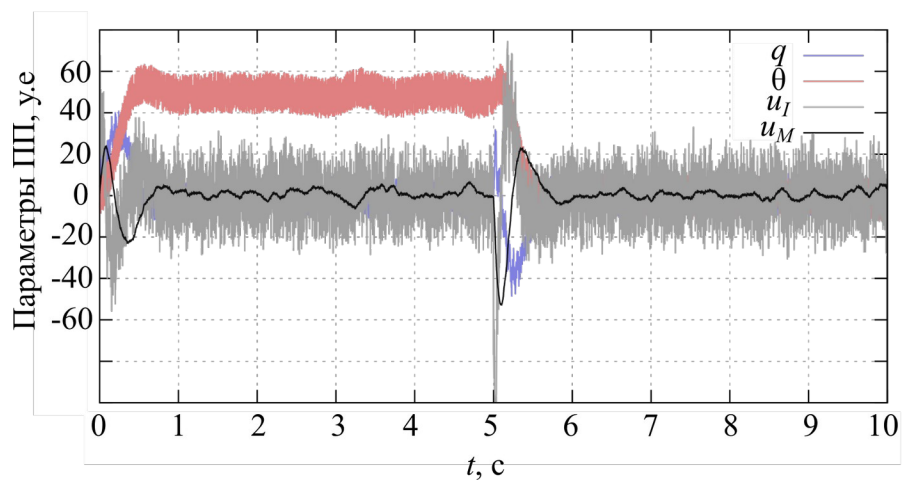


Рисунок 3.15 – Переходные процессы в настроенной системе управления при отсутствии фильтра Калмана

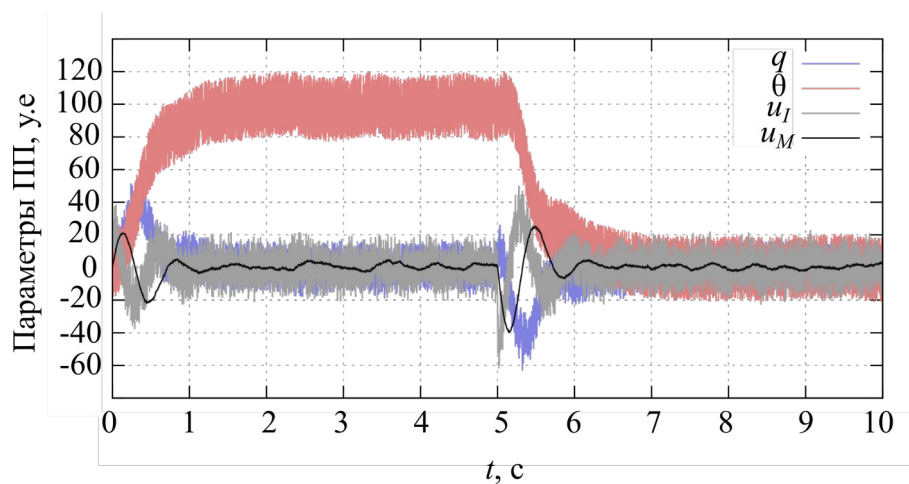


Рисунок 3.16 – Результаты работы системы управления до настройки контуров и без фильтра Калмана

Параметры регулятора рассчитывались согласно выражениям (3.13), где отличие параметров регулятора от объекта соответствует равенствам: $K_{vr} = 0,5 K_{vo}$; $T_{Mr} = 2,0 T_{Mo}$.

Из рисунков 3.15 и 3.16 видно, что сигнал на выходе PD-регулятора u_I имеет значительную составляющую шума, унаследованную от значения скорости изменения угла q . Качество такого сигнала неприемлемо для систем управления, где сигнал управления представлен поверхностью в фазовой плоскости сигналов θ и q . Особенно когда эта плоскость разделена кривой переключения для скользящего режима или оптимального по быстродействию регулятора.

Как уже предполагалось, что линейный регулятор, рассмотренный в разделе 3.1, сохраняет устойчивость и некоторые параметры качества управления, такие как время переходного процесса и перерегулирование. Однако, при этом, можно подчеркнуть наличие флуктуаций сигнала управления u_M , которые вероятно должны отражаться на значениях θ и q . Данный эффект хорошо виден на рисунке 3.15 между 3-ей и 4-ой секундой. Причиной такой флуктуации является наведенный на измеренные значения θ и q .

На рисунке 3.17 приведены результаты моделирования линейной системы управления с примененным ФК, где параметры модели в фильтре соответствуют параметрам объекта. В этом случае отношение абсолютных значений определителей матриц Q к R менее 10^{-3} (таблица 3.3), что соответствует значениям коэффициентов Калмана $K_\theta = 0,04$ и $K_q = 0,05$.

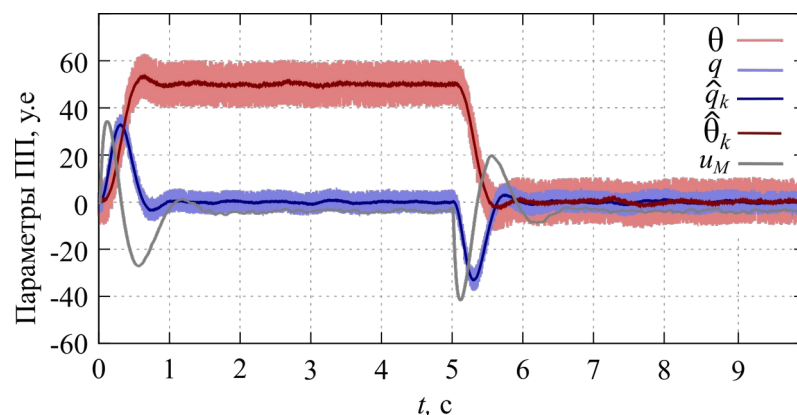


Рисунок 3.17 – Результаты моделирования настроенной системы с фильтром Калмана

Касательно линейной системы управления применение ФК заметно уменьшает флуктуацию сигнала управления u_M , что положительно сказывается на качестве управления. Но самое важное, форма сигнала на выходе PD-регулятора весьма гладкая для настроенного регулятора и достаточно приемлемая для применения в системах, где уже можно формировать управление представленное поверхностью в фазовой плоскости сигналов θ и q .

При отклонении параметра объекта на $\pm (30-50) \%$ и увеличении коэффициентов фильтра Калмана до $K_\theta = 0,07$ и $K_q = 0,08$ получены переходные процессы, результаты моделирования которых представлены на рисунке 3.18.

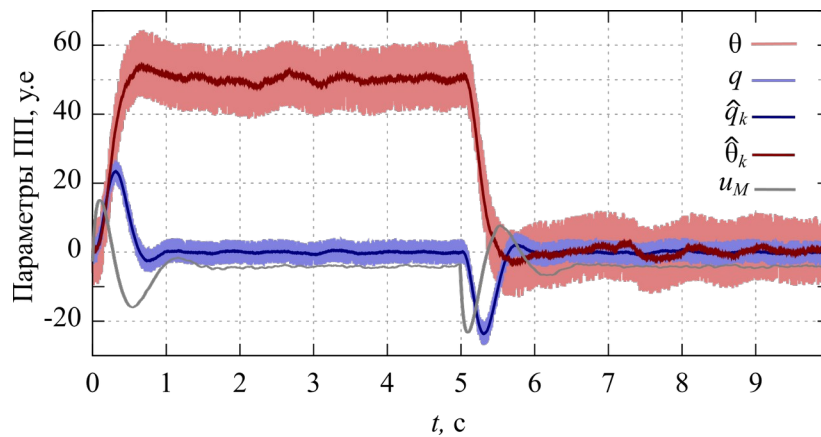


Рисунок 3.18 – Результаты работы системы с ненастроенным ФК при вариации параметров объекта в диапазоне $\pm 30 - 50\%$

При изменении параметров объекта несмотря на удовлетворительную работу системы, наблюдается флуктуация сигналов. Конечно, характер помех, применённый в математической модели, может не совпадать с результатами работы действующей системы. Однако, уже при первых экспериментах на установке с двумя двигателями на штанге подобная флуктуация наблюдалась и является актуальной проблемой качественного управления контуром.

Поскольку подбор коэффициентов ковариационных матриц Q и R рекомендуется выполнять подбором при наблюдении качества оценки процессов измеряемых величин, то для рассматриваемого случая более эффективно непосредственно подбирать коэффициенты K_θ и K_q , которые имеют понятный физический смысл. В

этом случае можно не реализовывать матричные операции с их выражениями (3.17), (3.19), (3.20), (3.22) на микропроцессорном устройстве.

Значения K_θ и K_q изменяются в диапазоне 0-1. Как уже показано в таблице 3.3 при их минимальных значениях фильтр более доверяет показаниям математической модели, при максимальных доверяет показаниям датчиков. Собственно, присваивание значений равным единице равноценно отключению фильтра Калмана. Это можно увидеть из выражения (3.31) на шаге 3.

Для повторения результатов моделирования в этом параграфе опубликован исходный код в [93]. Проект написан на языке C++ и для построения графиков используется пакет GnuPlot, который распространяется бесплатно и может быть установлен кросс платформенно.

3.3 Построение скользящего режима управления

Управление в скользящем режиме может представлять интерес не только для систем управления нелинейными объектами, но и для систем с нестационарными или неизвестными параметрами. При этом основной целью может быть не оптимальное управление, а устойчивая пусть не быстрая стабилизация объекта. Это позволяет построить алгоритмы стабилизации, обеспечивающие нечувствительность к параметрам объекта. Согласно метода синтеза такого класса регуляторов при решении различных прикладных задач можно воспользоваться положениями теории систем с переменной структурой в скользящих режимах. В частности, для нелинейного или не стационарного относительно параметров объекта [70, [118], можно записать математическую модель второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = h(x, t) + g(x, t) \cdot u(t), \end{cases} \quad (3.33)$$

где $h(x, t)$ и $g(x, t)$ – нелинейные гладкие положительные функции. При этом, если выполняются условия, $u(t)$ – сигнал управления из регулятора.

$$\left| \frac{a_1 \cdot x_2(t) + h(t)}{g(x, t)} \right| \leq k_1, \quad (3.34)$$

то можно обеспечить такое управление движением объекта, траектория его движения будет соответствовать уравнению

$$s(x, t) = a_1 \cdot x_1(t) + x_2(t) = 0; a_1 > 0. \quad (3.35)$$

При этом управление представлено выражением:

$$u(t) = -k \cdot \text{sign}(s) \quad (3.36)$$

с ограничением $k > k_1$ гарантирует приближение фазовой траектории объекта к траектории скольжения (3.35), на которой выполняется равенство

$$\dot{x}_1(t) = -a_1 \cdot x_1(t). \quad (3.37)$$

Такое движение не зависит от значений параметров $h(x, t)$ и $g(x, t)$, если выполняется условие (3.34). Это обеспечивает робастность регулятора по отношению к изменениям параметров в определённых условиях (3.34).

Для использования данного метода следует привести к форме (3.33) дифференциальные уравнения объекта. В частности рассмотрим внутренний контур управления (рисунок 3.11), для которого выполним синтез управления в скользящем режиме. Для этого запишем передаточную функцию от сигнала управления u_M к выходу q

$$W_q(s) = \frac{Q(s)}{U_M(s)} = \frac{K_M K_v}{(1 + T_M s) s^2}. \quad (3.38)$$

Выражение (3.38) соответствует дифференциальному уравнению третьего порядка, что не соответствует модели второго порядка (3.33). Однако, на практике можно пренебречь инерционными свойствами полагая, что T_M очень маленькое. При этом может возникнуть *chatter*-эффект [119], который обычно стараются уменьшить или убрать вовсе [120]. В данном случае, если значение T_M влияет на процесс, то исследуя *chatter*-эффект, возможно определить значение T_M из переходных процессов.

И так, если $T_M \rightarrow 0$, то выражение (3.38) примет вид

$$W_q(s) = \frac{Q(s)}{U_M(s)} = \frac{K_M K_v}{s^2}. \quad (3.39)$$

Тогда дифференциальное уравнение объекта представлено выражением $\ddot{q} = K_M K_v u_M$ соответствующие параметры для (3.33) будут равны $g = K_M K_v, h = 0, k = 1000$

$$a_1 < \frac{k g(q, u, t)}{\dot{q}} = \frac{k K_v k_M}{\dot{q}}. \quad (3.40)$$

Физический смысл параметра a_1 обратно пропорционален постоянной времени переходного процесса в решении дифференциального уравнения (3.37), которая представляет собой затухающую экспоненту. Также и контур управления по переменной q может быть представлен обычным инерционным звеном с постоянной времени $T_{sl} = 1 / a_1$.

Для увеличения быстродействия, очевидно, следует выбрать значение параметра a_1 максимально возможным. Тогда следует найти условия ограничения сверху обеспечивающие робастные свойства контура к изменяемым или неизвестным параметрам объекта. Предположим, что таковым параметром является параметр, представляющий геометрические характеристики и массу квадрокоптера, для которого известны границы изменения $K_v \in (K_{v \min}, K_{v \max})$. Тогда параметр можно выбрать из условия

$$a_1 < \frac{k K_v K_M}{\dot{q}}, \quad (3.41)$$

поскольку это условие выполнится для всех $K_v \in (K_{v \min}, K_{v \max})$.

Если функцию (3.35) записать через доступные измерению или оценки переменные M_q и q в выражении (3.25), то получим

$$s(x, t) = a_1 \cdot q_k(t) + K_v M_{q, k}(t) \text{ или } s(x, t) = \frac{a_1}{K_v(t, M_{q, k})} \cdot q_k(t) + M_{q, k}(t). \quad (3.42)$$

С учётом (3.41) для управления (3.36) полагая, что из выражений (3.24) можно оценить $\dot{q}_{\max} = M_{q, k \max} K_{v \max} = u_{M \max} K_{v \max}$ запишем выражение

$$u(t) = -k \cdot \text{sign}(K_{pq} q_k(t) + M_{q,k}(t)); K_{pq} = \frac{k K_M}{\dot{q}_{\max}} = \frac{k K_M}{u_{M \max} K_{v \max}} = \frac{K_M}{K_{v \max}}, \quad (3.43)$$

где коэффициент K_{pq} не зависит от нестабильного параметра K_v , только от его максимального значения. Однако при этом нельзя утверждать о робастных свойствах относительно времени переходного процесса, поскольку время переходного процесса зависит от параметра K_v . При этом полагая, что время процесса должна соответствовать выражению

$$T_{\text{пп}} \approx \frac{3}{K_{pq} K_v}, \quad (3.44)$$

то зная это время можно идентифицировать параметр K_v .

Далее приведены результаты моделирования внутреннего контура управления переменной q . ПП полученные при следующих параметрах объекта:

$$T_M = 0,03; K_M = 10; K_{v \max} = 1/0,015; k = u_{M \max} = 1000, \quad (3.45)$$

представлены на рисунке 3.19. На основании этих параметров вычислен коэффициент траектории скольжения согласно выражению (3.43).

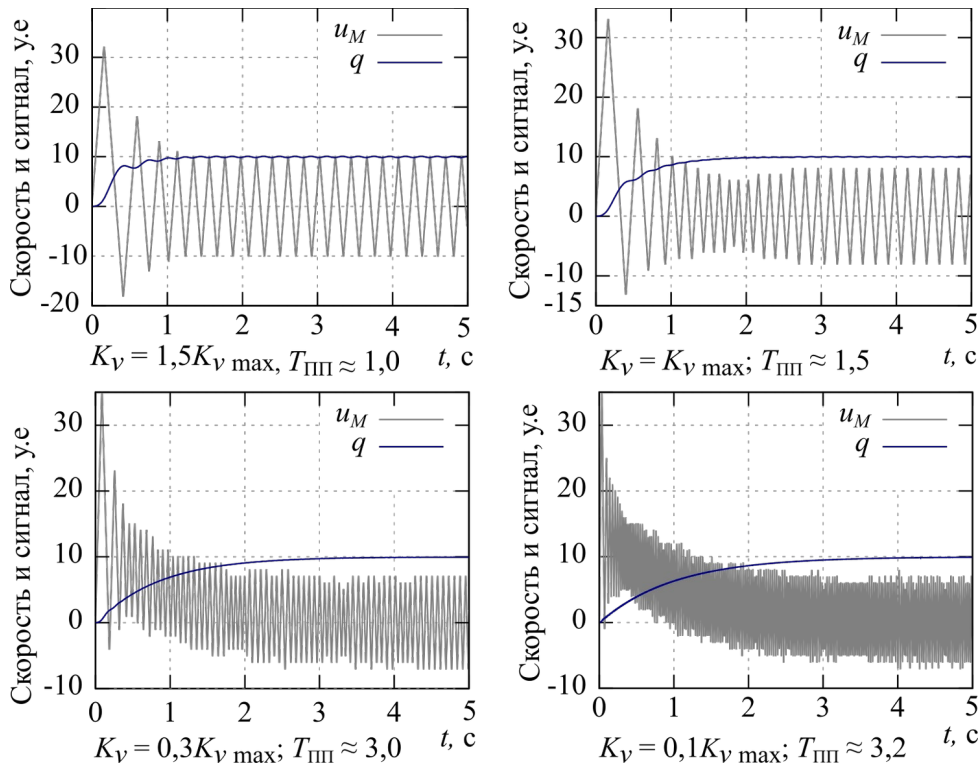


Рисунок 3.19 – Переходные процессы в контуре угловой скорости крена с SMC-регулятором при изменении параметра модели K_v

Оценка изменения параметра K_v и погрешности δ (%) представлены в таблице 3.4 для четырёх случаев, соответствующих выполнению условия притяжения к поверхности скольжения.

Таблица 3.4 – Результаты оценки параметра K_v по переходным процессам

	$K_v=1,5 K_{v \max}$	$K_v=1,0 K_{v \max}$	$K_v=0,3 K_{v \max}$	$K_v=0,1 K_{v \max}$
K_v	100,0	66,7	20,0	6,67
$T_{\text{пп}}, \text{с}$	1,0	1,5	3,0	3,2
$\widehat{K}_v$	20,1	13,4	6,7	6,28
$\delta, \%$	25,1	25,1	50,0	6,2

В таблице (3.4) представлены результаты оценки коэффициента K_v , полученные по переходным процессам, а также соответствующая погрешность вычислений. Анализ данных показывает, что варианты $K_v = 1,5K_{v \max}$ находятся на границе выполнения условия (3.41). Увеличение K_v приводит к ускорению переходного процесса. Однако при $K_v > 1,5K_{v \max}$ система начинает интенсивно колебаться, что сопровождается ростом динамической погрешности до 25%. Напротив, при снижении коэффициента ($K_v = 0,3K_{v \max}$ и $K_v = 0,1K_{v \max}$) время переходного процесса замедляется, но система демонстрирует более спокойное поведение. В частности, при $K_v = 0,1 K_{v \max}$ погрешность снижается до 6%. Это позволяет сделать вывод: если приоритетом является не быстроедействие, а робастность и устойчивость системы, целесообразно использовать пониженные значения коэффициента K_v .

К сожалению, такой эксперимент в режиме полёта выполнить невозможно сохраняя длительное время скорость изменения крена, поскольку квадрокоптер перевернётся и потеряет устойчивость. Однако, можно внешний контур настроить, согласно модального оптимума, рассмотренного в разделе 3.1 изменяя коэффициент K_{pf} для достижения перерегулирования, равного 5 %. В этом случае из равенства полученного подобно (3.8)

$$W_{opt}(s) = \frac{1}{(1+T_{sl}s)T_{sl}s g} = \frac{K_{pf}K_f}{(1+T_{sl}s)s}, \quad (3.46)$$

можно вычислить значение времени T_{sl}

$$T_{sl} = \frac{1}{g K_{pf} K_f} = \frac{1}{K_{pq} K_v}, \quad (3.47)$$

из которого можно оценить K_v

$$\hat{K}_v = \frac{g K_{pf} K_f}{K_{pq}}. \quad (3.48)$$

На рисунке 3.20 приведены результаты моделирования скользящего режима настроенной системы с параметрами, определёнными выражением (3.45).

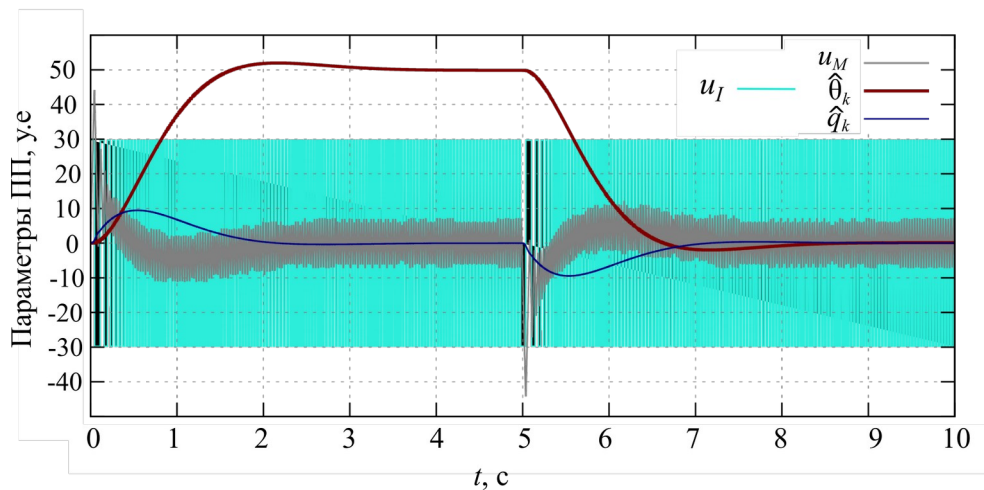


Рисунок 3.20 – Результаты моделирования скользящего режима настроенной системы

Для заданного K_v подобран K_{pf} так, чтобы обеспечить переходный процесс с 5 % перерегулированием. В результате значения соответствуют равенствам

$$K_v = 20,0; K_f = 0,06; K_{pq} = 0,15; K_{pf} = 0,29; \hat{K}_v = 19,4, \quad (3.49)$$

где погрешность оценки K_v не превышает 3 %. Однако не стоит гарантировать такую погрешность при оценке K_v , полагая, что решения принимаются из визуальной оценки значения перерегулирования. В реальных условиях следует учитывать помехи. На рисунке 3.21 представлены результаты моделирования работы регулятора SMC с учётом спектральных составляющих.

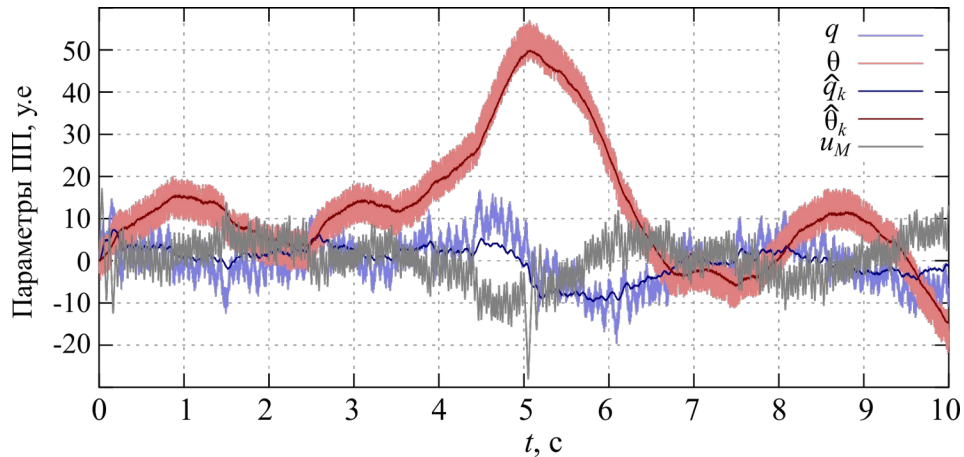


Рисунок 3.21 – Результаты моделирования с учётом спектральных составляющих

Как видно из рисунка 3.21, влияние спектральных составляющих и гауссовских шумов приводит к потере работоспособности контура управления. Причиной может стать некачественная оценка угловой скорости, поскольку видно смещения измеренного значения и оценки.

Особенно это хорошо видно между 4-ой и 6-ой секундой. Для оценки влияния каждого компонента помехи на этапе моделирования исследовалось несколько вариантов формирования помехи. Так, например, на рисунке 3.22 представлены результаты моделирования, в которых исключены периодические шумы и учтены только гауссовские шумы.

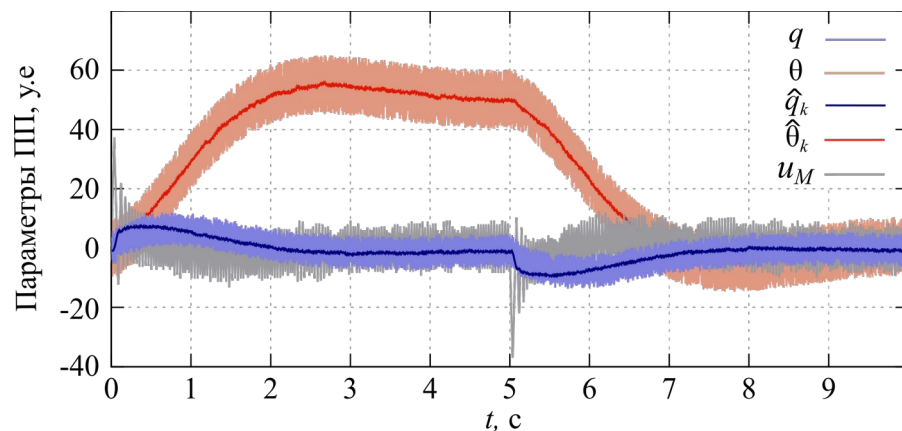


Рисунок 3.22 – Результаты моделирования работы контура крена без учёта периодических шумов

Сравнение рисунков 3.20 и 3.22, показывает, что поведение замкнутой системы лишь незначительно отличается от результатов, полученных на основе идеализированной модели.

Следовательно, основной причиной нестабильной работы контура являются периодические помехи. Для их анализа было проведено моделирование с отдельным введением высокочастотных и низкочастотных помех, соответствующих частоте переключения ключей ESC-преобразователя. Результаты показали, что высокочастотные помехи оказывают незначительное влияние и можно не рассматривать. Наибольшее воздействие на систему оказывают низкочастотные помехи, возникающие на этапе запуска.

Низкочастотная периодическая составляющая, как показано в разделе 2.1, появляется при быстрых стартах, а также при плавных изменениях частоты оборотов. Причём чем медленнее скорость изменения задающего сигнала ESC-преобразователя, тем меньше амплитуда низкочастотной периодической составляющей. Эту скорость изменения можно регулировать параметром K_M .

На рисунке 3.23 представлены результаты моделирования работы контура с учётом низкочастотных периодических помех, вызванных переключением ключей ESC-преобразователя.

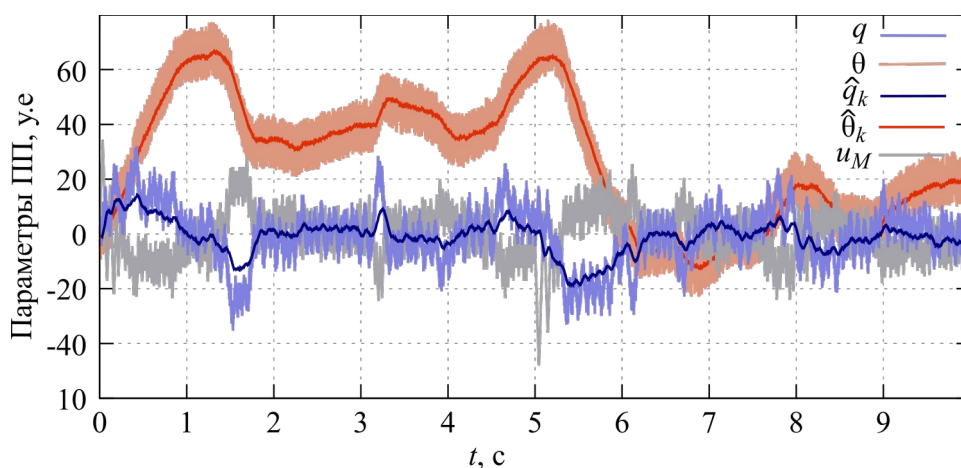


Рисунок 3.23 – Результаты моделирования с учётом низкочастотных периодических помех

На рисунке 3.24, показаны результаты моделирования с учётом высокочастотных составляющих, где амплитуда подобрана.

Полагая, что на практике можно уменьшать низкочастотную периодическую составляющую уменьшением параметра K_M , была подобрана амплитуда этой составляющей так, чтобы процесс в контуре управления был приемлемый.

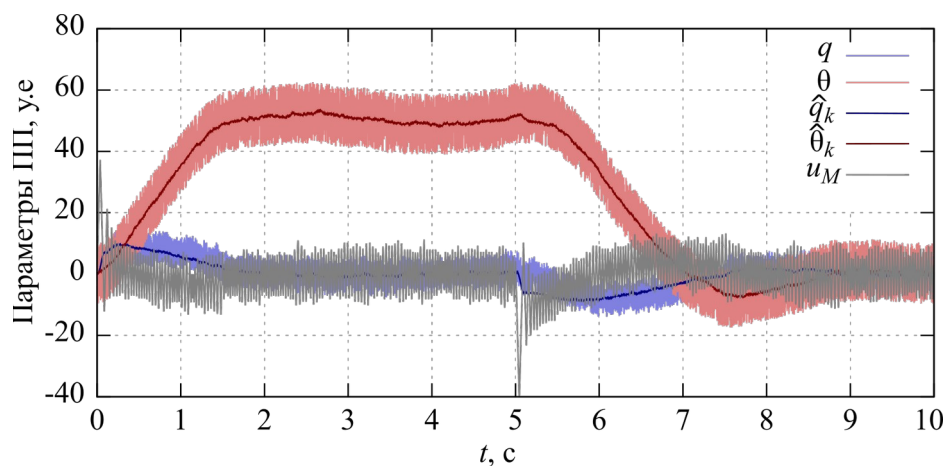


Рисунок 3.24 – Результаты моделирования с учётом высокочастотных периодических помех

Если сравнивать результаты на рисунках 3.20 и 3.24, то можно сделать вывод, что быстродействие контура не изменилось, но, при этом, наблюдается флуктуация в установившемся режиме. Подобная флуктуация наблюдается при работе классических PD-регуляторов в стандартной схеме управления с зависимым контуром (раздел 3.1). Возможно, на этапе практического применения наличие периодической составляющей помехи, связанной со скоростью изменения управления ESC-преобразователя, может стать значительной проблемой для поддержания работоспособности контура управления.

3.4 Реализация оптимального управления по быстродействию

Обычно, оптимальное управление по быстродействию формируется из задачи перевода объекта из одной точки в фазовом пространстве в другую максимально быстро при ограничениях на сигнал управления. При этом работа этого же бы-

стродействующего алгоритма в точке равновесного состояния может быть неудовлетворительной, поскольку сигнал управления имеет разрывы первого рода и в этой точке возникает автоколебательный режим.

Если анализировать и сравнивать рисунок 3.7 для линейной системы управления и рисунок 3.11, то можно полагать, что управление в релейном режиме, которое свойственно скользящему управлению и оптимальному по быстродействию, может удовлетворительно работать только в удалении от точки равновесного состояния на фазовой траектории. При этом в точке равновесного состояния возможно реализовать линейный регулятор.

Вопросы синтеза управления, приводящего к формированию семейств фазовых траекторий, подробно исследованы в многочисленных работах. Так, в работе [121] применяется классический метод анализа поведения замкнутого контура через фазовые портреты динамической системы. Изучение траекторий переключения в скользящих режимах на фазовой плоскости позволяет наглядно визуализировать семейства траекторий с высокой скоростью реакции или с расширенными диапазонами параметров объекта для робастных режимов. Кроме того, авторы данной работы проводят исследования по синтезу оптимальных регуляторов, где регулятор разрабатывается на основе анализа фазовых поверхностей и обеспечивает программное движение системы [122].

Стандартная процедура синтеза оптимального управления с точки зрения быстродействия, согласно принципу максимума, предполагает вычисление функции Гамильтона, при этом результатом является переходный процесс с определёнными моментами переключения управляющего воздействия [123]. Однако такое решение является частным, так как рассматриваются лишь заданные начальные условия. Для разработки алгоритма управления, применимого при произвольных начальных условиях, необходимо исследовать несколько фазовых траекторий и на их основе создать обобщённый алгоритм [83].

В качестве инструмента реализующего сложные алгоритмы, реализующие фазовые траектории совмещающие разные решения, может применён Fuzzy регу-

лятор для подобных объектов с большими постоянными времени инерции. Учитывая современные возможности реализации сложных методов управления, можно выделить актуальное направление исследований и разработки более эффективных и простых в реализации методов. Анализ возможностей инструментов для синтеза в среде математического пакета SciLab позволяет разрабатывать эффективные методы и алгоритмы реализации управления.

Далее рассматривается процедура синтеза метода управления, основанного на фазовой поверхности, применительно к медленному объекту второго порядка с запаздыванием. Граница области релейного управления определяется на основе результатов моделирования. Выбор данной модели обусловлен её структурным сходством с математической моделью крена квадрокоптера.

Процедура синтеза заключается в следующих этапах:

1. решение задачи оптимального управления объектом второго порядка с учётом ограничений сигнала управления;
2. построение кривой переключения для области, находящейся вне окрестности равновесного состояния, выполняется с использованием численного метода обратного интегрирования по времени, предложенного А.А.Фельдбаумом;
3. определение области равновесного состояния, где обеспечивается удовлетворением дифференциального уравнения второго порядка;
4. обобщение полученных решений для формирования совмещённой поверхности средствами аппроксимации в среде Fuzzy-tools;
5. формирование экспертных оценок фазификации и дефазификации Fuzzy-регулятора;
6. реализация полученной Fuzzy-системы на базе микропроцессора.

Построение кривой переключения основано на идее Фельдбаума А.А.: из разностного уравнения объекта управления предыдущее значение выходной переменной выражается через текущее, что соответствует движению во времени в обратном направлении и имеет следующий вид:

$$x_2(t - \Delta t) = x_2(t) - \left(u(t) \frac{1}{T_a} - x_2(t)\right) \cdot \frac{\Delta t}{T_M},$$

$$x_1(t - \Delta t) = x_1(t) - x_2(t) \Delta t,$$
(3.50)

где T_a и T_M – постоянные времени объекта, $x_1(t)$ – выходная переменная объекта, $x_2(t)$ – первая производная x_1 , Δt – время дискретизации.

Полученная траектория переключения приведена на рисунке 3.25а, а поверхность, построенная для её аппроксимации с использованием Fuzzy-регулятора, – на рисунке 3.25б. Анализ результатов моделирования выявил автоколебания в окрестности равновесного состояния.

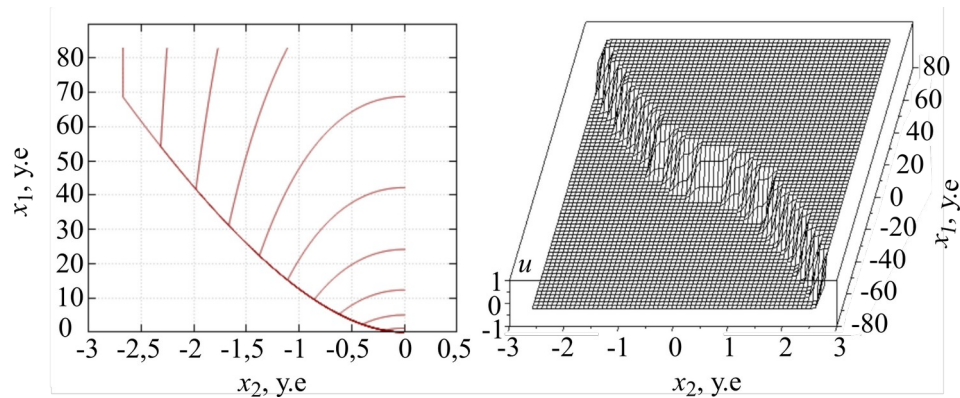


Рисунок 3.25 – Результаты моделирования а) траектория переключения; б) поверхность Fuzzy управления

Фазовая поверхность (рисунок 3.25б) использована при управлении объектами второго порядка с запаздыванием в среде моделирования Xcos пакета Scilab. Функциональная схема замкнутого контура представлена на рисунке 3.26.

В цепь оценки производной, подверженную влиянию шумов АЦП-канала и ошибок дискретизации, введен фильтр с постоянной времени T_f .

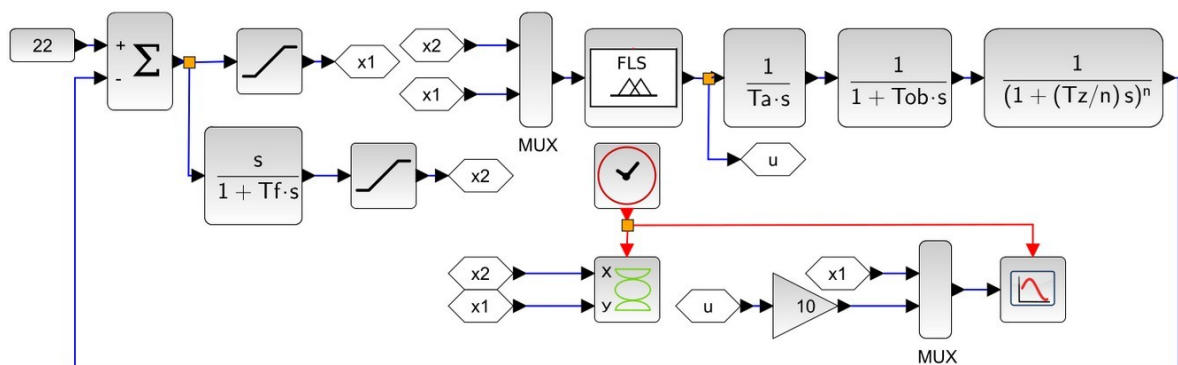


Рисунок 3.26 – Функциональная схема математической модели

Моделирование схемы, представленной на рисунке 3.26, выполнено с целью построения фазового портрета (x_1, x_2) , а также ПП по сигналу управления u и переменной состояния x_1 . Соответствующие результаты приведены на рисунке 3.27.

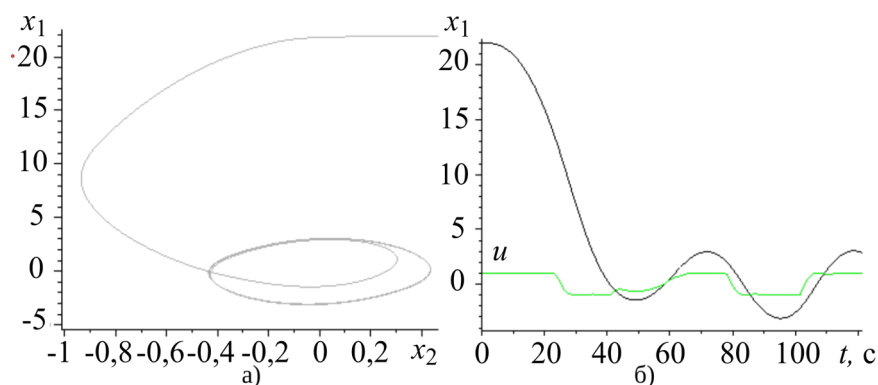


Рисунок 3.27 – Результаты моделирования а) фазовый портрет; б) переходный процесс

На фазовом портрете (рисунок 3.27а) видны автоколебания; соответствующая траектория имеет форму, близкую к эллиптической (рисунок 3.27б). Для их исключения в установившемся режиме предложено совместное использование Fuzzy- и PD-регуляторов, формирующих комбинированную (Fuzzy+PD) поверхность управления согласно методу, изложенному в разделе 3.1. Результаты поверхности Fuzzy+PD-регулятора и Fuzzy-регулятора представлены на рисунке 3.28.

Условие переключения между режимами может быть записано следующим:

$$\Omega = \left(\frac{x_1}{x_{10}} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_{20}} \right)^2 \leq 1; u_M = \begin{cases} u_{PD}, & (x_1, x_2) \in \Omega \\ u_{opt/SMC}, & (x_1, x_2) \notin \Omega \end{cases}, \quad (3.51)$$

где x_{10}, x_{20} выбран из результатов моделирования.

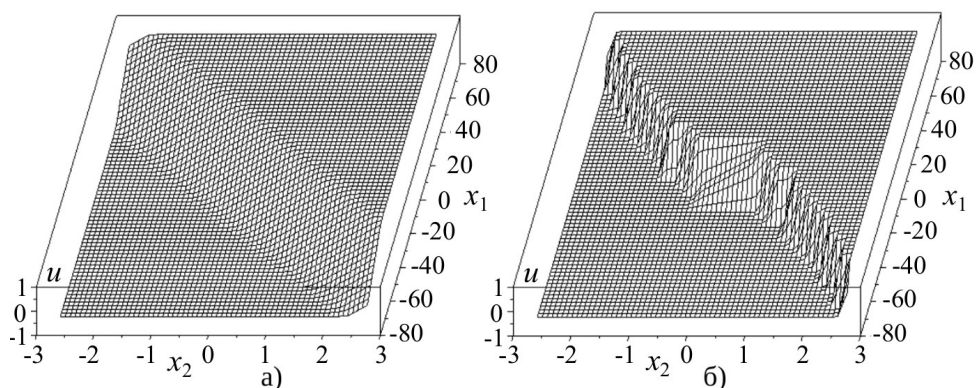


Рисунок 3.28 – Поверхности управления а) Fuzzy+PD-регулятора; б) Fuzzy-регулятора

Если сформировать правила FLS на основе поверхности, представленной на рисунке 3.26, то переходные процессы СУ, полученные с использованием Fuzzy+PD-поверхности и PD-регулятора, показаны на рисунке 3.29.

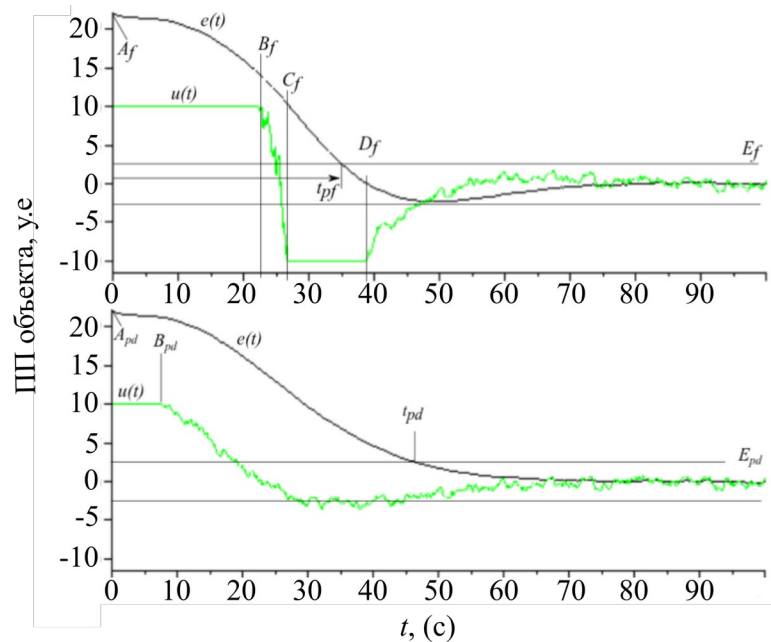


Рисунок 3.29 – Переходные процессы СУ с регуляторами Fuzzy+PD-поверхности и PD-

Но первом переходном процессе можно увидеть характерные оптимальному управлению по быстродействию промежутки времени: до достижения траектории переключения (A_f, B_f) и после достижения (C_f, D_f). Промежуток (D_f, E_f) соответствует линейному управлению в окрестности эллипса. Сам процесс переключения должен быть мгновенным, однако из-за аппроксимирующих свойств Fuzzy-контроллера в окрестности траектории переключения не обеспечивается (рисунок 3.28 б) крутой склон поверхности. По этой причине присутствует небольшой процесс переключения между (B_f, C_f).

Следует отметить, что в работе рассматривается Fuzzy-контроллер как инструмент для быстрой реализации управления, заданного поверхностью в фазовом пространстве, с целью проверки работоспособности идеи. Результаты данного исследования опубликованы в работе [83].

Известен подход к совмещению фазовых поверхностей с линейными регуляторами. В работе предложен метод определения границ совместной работы траек-

тории переключения и PD-регулятора в виде эллиптической области в фазовом пространстве. Предложенный подход применён к контуру управления креном квадрокоптера, в котором традиционное PD-звено заменено комбинированной структурой: вдали от равновесия используется фазовая поверхность, реализующая принцип максимума, а в окрестности точки равновесия – линейный PD-регулятор (см. рисунок 3.11).

Полученные результаты демонстрируют эффективность данного гибридного управления, что позволяет распространить предложенный метод на полную нелинейную математическую модель канала крена. В данном случае задача вычисления траектории переключения упрощается, поскольку для объекта (3.38) при условии $T_M \rightarrow 0$ может быть рассмотрена передаточная функция (3.39), для которой решение задачи оптимального управления по быстродействию решена в аналитической форме [85]. В результате, траектория переключения будет соответствовать стандартной параболе. Параметры эллипса получим таким же методом, что и в работе [83].

На рисунках 3.30 и 3.31 представлены результаты моделирования системы управления квадрокоптером: в идеальном случае и при наличии шумов с применением фильтра Калмана. При этом параметры модели, используемые в фильтре, совпадают с параметрами объекта. Коэффициент Калмана был выбран аналогично коэффициенту, применяемому в регуляторе со скользящим режимом.

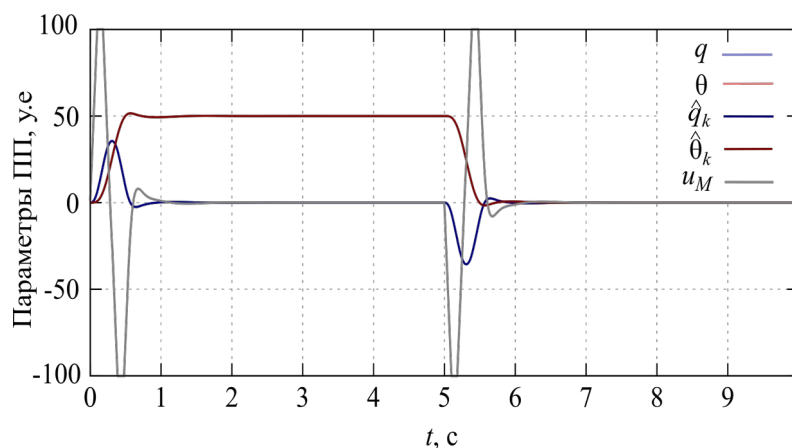


Рисунок 3.30 – ПП системы управления креном квадрокоптера, синтезированной на основе принципа максимума без учёта шумов

По результатам моделирования видно, что управляющий сигнал на моторы u_M изменяется скачкообразно: он мгновенно достигает максимального значения, а затем столь же быстро переходит к минимальному. Такой характер является характерным признаком управления по принципу максимума. Система при этом выходит на установившийся режим менее чем за секунду.

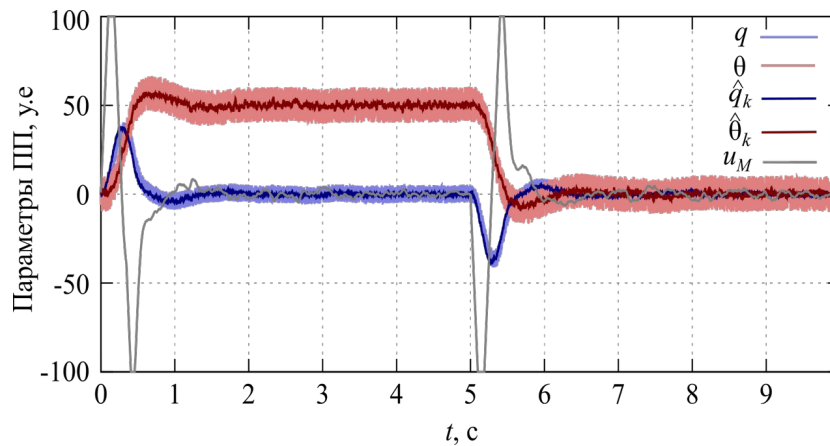


Рисунок 3.31 – ПП системы управления креном квадрокоптера, синтезированной на основе принципа максимума с учётом шумов при использовании фильтра Калмана

В завершение исследований данной главы проведено сравнительное тестирование различных типов регуляторов в контексте предложенной математической модели в среде Gazebo. Это платформа, в которой испытания выполнялись в единой сцене с дифференциальным уравнением (ODE) и фиксированным шагом интегрирования.

Для всех регуляторов использовались одинаковые задания, ограничения и настройки фильтрации, а оценка качества велась по единому набору критериев, включающая (i) ИМО (IAE) – интеграл модуля ошибки $IAE = \int_0^T |(\theta_{set\ i} - \theta_i)| dt$, отражающий суммарное рассогласование по времени; (ii) ЭУС (CSE) – энергия управляющего сигнала $CSE = \int_0^T u_M^2(t) dt$, определяющая затраты энергии на управление; (iii) СКО – среднеквадратичное отклонение выходного сигнала в

установившемся режиме $CKO = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\theta_{set\ i} - \theta_i)^2}$, характеризующее среднюю величину ошибки управления; (iv) процента перерегулирования $T, \% = \frac{\theta_{max} - \theta_{уст}}{|\theta_{уст} - \theta_0|} \cdot 100\%$, отражающее пик переходного процесса; (v) время переходного процесса $T_{пп}$, определяемое как момент достижения полосы $\pm 4-5\%$ от $\theta_{уст}$ с удержанием не менее 0,2 с.

Для всех экспериментов применялся единый тестовый вход (ступенчатое задание), одинаковые окно наблюдения T , дискретизация и фильтрация сигналов, а также единые ограничения/насыщения исполнительных органов. Результаты сравнения показаны в таблице 3.5.

Таблица 3.5 – Сравнительная критериев выходных сигналов регуляторов

	IAE	CSE	CKO	$T, \%$	$T_{пп}, \text{с}$
PD-PI	20,1	721	3,67	4,2	0,85
P-PID	36,0	523	5,61	6,1	0,95
SMC-PI	55,8	445	5,71	2,0	1,7
Fuzzy+PD-поверхности	18,89	952	4,98	3,6	0,5

Сравнительный анализ четырёх регуляторов выявил характерные компромиссы между быстродействием, точностью и устойчивостью.

Предложенный PD-PI-регулятор обеспечивает наиболее сбалансированный результат: второй по быстродействию, минимальное CKO и IAE, близкое к оптимально. Регулятор Fuzzy+PD-поверхности лидирует по быстродействию и IAE, но демонстрирует наибольшее значение CSE. SMC-PI-регулятор минимизирует перерегулирование и CSE (наилучшее подавление пиковых отклонений), однако обладает самым длительным переходным процессом и повышенными IAE и CKO, что указывает на устойчивое малое рассогласование. Классический P-PID-регулятор не имеет выраженных преимуществ: занимает средние позиции по всем метрикам и может служить базовым эталоном.

Выводы к главе 3

Разработан подход к синтезу системы управления креном и тангажом квадрокоптера. Предложена каскадная трёхконтурная структура системы управления. Контур реализован на основе PD-PI-регулятора, параметры которого синтезированы по методу модульного оптимума, что обеспечивает ПП с малым перерегулированием и минимальным временем установления.

Предложенная оптимизированная схема управления каналом крена (рисунок 3.7) обеспечивает стабильное качество ПП при разных значениях параметров объекта. Коэффициенты регулятора рассчитываются по формуле (3.13) в зависимости от характеристики объекта и ESC-преобразователя (T_M , K_f , K_v , K_M). Благодаря этому перерегулирование остаётся на уровне около 5 % даже при значительном разбросе параметров (рисунок 3.9). Кроме того, выходные сигналы регулятора получаются плавными и сглаженными без использования дополнительных фильтров (рис. 3.10).

Для повышения качества оценок при действии шумов синтезирован фильтр Калмана, реализованный в виде двухэтапного алгоритма: прогноз по разностному уравнению (3.29) и коррекция по уравнению 3.30. На основе анализа ковариационных матриц процесса Q и измерений R , а также результатов моделирования, установлено, что достаточно использовать только два коэффициента усиления – K_θ и K_q . Эти коэффициенты адаптируются в зависимости от текущего значения управляющего сигнала u_l и его производной (уравнение 2.31). Такой подход обеспечивает физически обоснованную настройку фильтра: K_θ влияет на оценку угла крена, а K_q – на оценку угловой скорости. Результаты моделирования предложенного фильтра Калмана подтверждают высокое качество оценки состояния как в условиях действия шумов на объект (рисунок 3.17), так и при отклонении параметра объекта на 30-50 % (рисунок 3.18).

Далее синтезирован робастный регулятор скользящего режима для внутреннего контура, обеспечивающий устойчивую стабилизацию угловой скорости q при изменении параметра объекта K_v . Анализ результатов синтеза (рисунок 3.19)

показал, что система управления сохраняет робастность при изменении K_v в диапазоне до десятикратного (в обе стороны от номинального значения). Вместе с тем результаты моделирования (рисунки 3.21-3.24) выявили повышенную чувствительность системы к низкочастотным составляющим сигнала угловой скорости. Для обеспечения устойчивости рекомендуется учитывать этот эффект при настройке регулятора: снижать коэффициент усиления K_M или применять дополнительную фильтрацию для дифференцирующего звена.

Предложен комбинированный алгоритм оптимального по быстродействию управления, основанный на принципе максимума Понтрягина. Вне окрестности равновесия используется релейное управление, а вблизи равновесного состояния – линейный PD-регулятор (регулятор Fuzzy+PD-поверхности). Алгоритм синтезирован и реализован на медленном объекте второго порядка с запаздыванием, динамические свойства которого близки к модели крена квадрокоптера.

Траектория переключения построена на основе разностного уравнения (3.50), полученного методом обратного интегрирования по времени, и представлена на рисунке 3.25. Для гибкого и быстрого формирования произвольной фазовой поверхности переключения применён Fuzzy-регулятор; результат показан на рисунке 3.28. Результаты ПП для предложенного комбинированного алгоритма представлены на рисунке 3.29. Алгоритм апробирован на структуре управления каналом крена (рисунок 3.11). Результат моделирования в идеальных условиях (без шумов) приведён на рисунке 3.30, так и при наличии измерительных шумов – рисунок 3.31. Результаты показывают, что система выходит на установившийся режим менее чем за 1 с, обеспечивает незначительное перерегулирование ($\sim 5\%$) и сохраняет устойчивость при воздействии измерительных шумов при условии использования ФК.

Сравнительный анализ регуляторов PD-PI, P-PID, SMC-PI и Fuzzy+PD-поверхности показал, что SMC-PI характеризуется минимальным перерегулированием и наименьшим значением ISE, тогда как регулятор Fuzzy+PD-поверхности обеспечивает кратчайшее время переходного процесса.

Глава 4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРЕДЛОЖЕННЫХ МЕТОДОВ

На основе структурной схемы, представленной на рисунке 3.3, результаты моделирования показали эффективность различных методов управления, включая компенсацию периодических возмущений с использованием ФК. Однако при практической реализации системы возникают несоответствия между моделируемыми и экспериментальными результатами.

Основными причинами этих несоответствий являются:

- несовпадение реальной динамики объекта управления с принятой математической моделью;
- высокий уровень шумов, воздействующих на сигналы гироскопа и акселерометра, что приводит к искажению измеряемых сигналов и, как следствие, снижению качества стабилизации.

Особую проблему представляет собой асимметрия конструкции летательного аппарата, подробно рассмотренная в разделе 2.3. Эта асимметрия, обусловленная особенностями корпуса, наиболее ярко проявляется при управлении по каналу крена и тангажа. Если её не учитывать, система может потерять работоспособность и не обеспечивать устойчивое управление.

Кроме того, управляющий сигнал, формируемый регулятором, не обладает достаточным быстродействием для поддержания равновесия, поскольку дифференциальная составляющая регулятора особенно чувствительна к измерительным шумам. Это дополнительно усугубляет проблему устойчивости в условиях реальной эксплуатации.

С целью повышения устойчивости и надёжности системы в условиях реальных помех предложена модифицированная структурная схема управления, представленная на рисунке 4.1.

менно учитывать как динамические, так и статические возмущения, улучшая точность и устойчивость управления.

Кроме того, предложенная структура управления создаёт предпосылки для синтеза фазовых траекторий в пространстве сигнала ошибки и её производной. Это открывает альтернативу традиционному подходу, основанному на линейной зависимости между управляющим воздействием и состоянием системы [124].

Настройка параметров PD-регулятора внешнего контура в рамках предложенной структуры остаётся неизменной по сравнению с подходом, описанным в главе 3, и осуществляется по критерию модульного оптимума. Для внутреннего контура, обладающего астатизмом второго порядка, применяется метод симметричного оптимума.

Соответствующие значения параметров регуляторов, полученные после модификации структурной схемы и рассчитанные по критерию симметричного оптимума, приведены в выражении 4.1

$$K_{pf} = \frac{1}{6,5 K_f g_k T_M}; K_{df} = 1; K_{pv} = \frac{1}{55 T_M^2 K_M K_v}; K_{dv} = 12 T_M K_{pv}; g_k = 3. \quad (4.1)$$

где параметр g_k – эмпирический подобранное значение, обеспечивающее перерегулирование около 30 %.

Ниже приведены программная реализация модифицированной структуры управления и результаты тестирования переходных процессов, представленные на рисунке 4.2.

Скрипт 4.1 – Программа моделирования переходных процессов на основе модифицированной структуры управления.

```
clear; s=polynomial(0,'s'); t=0:0.001:100;
s = ct.TransferFunction.s
Km = 2/3; Te = 1/Km;
g=2; gk=3.0; Tm=0.3; Kv=1.25; Kf=1.0;
Kpv = 1/(Kv*Km*55.0*Tm*Tm);
Kdv = 12.0*Tm*Kpv;
Kpf = 1/(Kf*gk*6.5*Tm);
We=1/(1+Te*s); Wi=1+1/(Tv*s); Wm=1/(1+Tm*s);
```

$$\begin{aligned}
 W_b &= W_i * W_e * W_m; \\
 W_{c1} &= W_b / (1 + K_{dv} * W_b); \\
 W_b &= W_1 * (K_v / (s)) * K_{pv}; \\
 W_{c2} &= W_b / (1 + W_b); \\
 W_b &= W_2 * (K_f / s) * K_{pf}; \\
 W_{c3} &= W_b / (1 + W_b);
 \end{aligned}$$

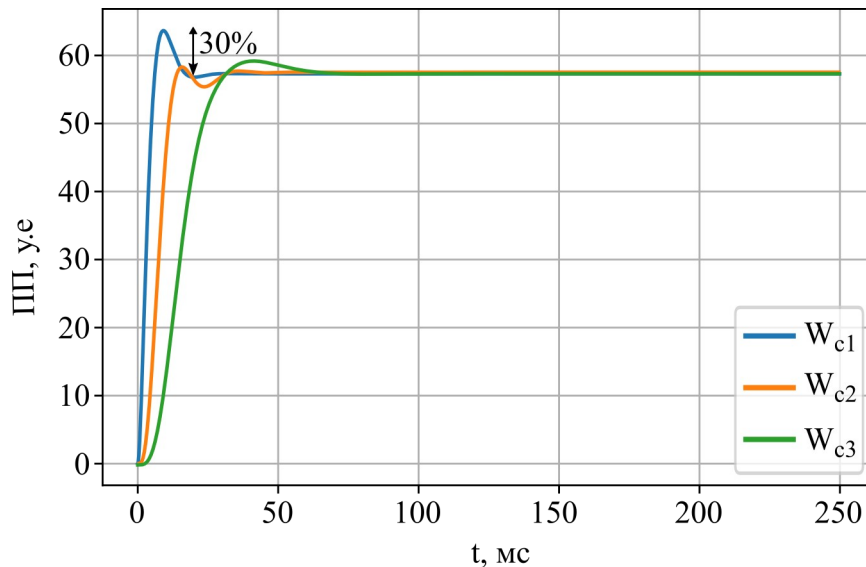


Рисунок 4.2 – Результаты тестирования ПП трёх контуров управления модифицированной структурной схемы

В данной главе на основе модифицированной структуры управления (рисунок 4.1) проведён комплекс экспериментальных исследований, направленных на оценку работоспособности контуров управления углами крена и тангажа квадрокоптера при реализации предложенных методов.

Кроме того, выполнен сравнительный анализ с классическими методами управления, включающий применение модифицированного ФК в условиях измерительных шумов и его сопоставление с традиционной реализацией. Дополнительно проведены эксперименты, подтверждающие наличие выраженных спектральных составляющих в сигналах датчиков (гироскопов и акселерометров), обусловленных вибрациями летательного аппарата.

4.1 Экспериментальное исследование спектральных составляющих выходных сигналов датчиков

Как показано в разделе 2.1, выходные сигналы квадрокоптера содержат выраженные спектральные составляющие, которые могут быть аппроксимированы двумя синусоидальными компонентами. Для их анализа на этапе моделирования была построена математическая модель динамики полёта. В настоящем разделе представлены результаты натурных экспериментов, направленных на верификацию данных, полученных в ходе моделирования.

Экспериментальная установка была собрана с учётом необходимости минимизации влияния радиопомех и электромагнитных наводок на измерительные каналы. Исследования проводились на реальном квадрокоптере, оснащённом платой Arduino UNO и инерциальным измерительным блоком GY-521 (MPU-6050), обеспечивающим регистрацию шести компонент вектора состояния углов их угловых скоростей (см. выражения (2.21), (2.23)).

Поскольку штатный полётный контроллер обладает ограниченным объёмом оперативной памяти (20 КБ), недостаточным для записи полных переходных процессов [125], регистрация данных осуществлялась в режиме реального времени через последовательный интерфейс на персональный компьютер.

Анализ экспериментальных данных не выявил чёткой корреляции между искажениями измерительных сигналов и влиянием радиопомех или резонансных характеристик датчика. Несмотря на то, что наводки по питающей шине оказались незначительными, для повышения достоверности последующих измерений была принята схема раздельного питания: ESC подключался непосредственно к аккумуляторной батарее летательного аппарата, а измерительная плата – к стабилизированному источнику питания персонального компьютера. Внешний вид экспериментальной установки представлен на рисунке 4.3.



Рисунок 4.3 – Экспериментальная установка с датчиком, расположенном на платформе

После демонтажа инерциального датчика с основной платформы и его размещения в непосредственной близости от работающих двигателей форма зарегистрированного сигнала практически совпала с переходными процессами, описанными в работе [126], где помехи не содержат явно выраженных периодических составляющих. Это позволяет сделать вывод, что собственная резонансная частота подвеса датчика не оказывает заметного влияния на показания гироскопа и акселерометра.

Регистрация переходных процессов осуществлялась на персональном компьютере, получающем данные с платы Arduino через последовательный порт. С целью достижения максимально возможной частоты дискретизации при передаче данных по последовательному порту UART было принято решение ограничить передаваемый поток одной переменной. Такой подход позволил повысить частоту сбора данных до 600 - 700 Гц, что обеспечило адекватное отображение быстропротекающих динамических процессов.

В целях упрощения представления результатов и повышения наглядности в настоящей работе рассмотрена только угловая скорость по каналу тангажа q (пояснение согласно в разделе 2.2). Соответствующий экспериментальный результат приведён на рисунке 4.4.

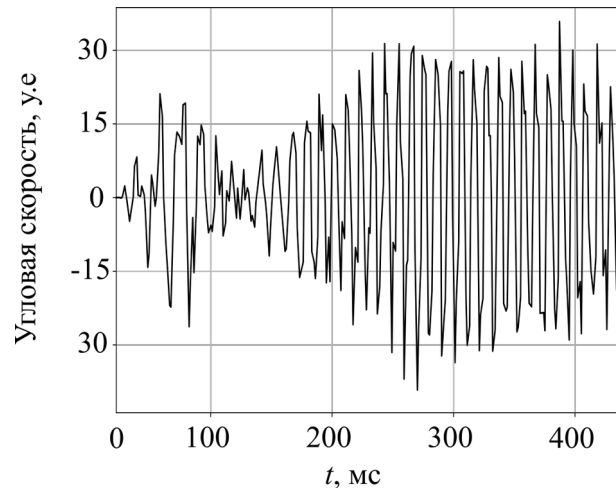


Рисунок 4.4 – Переходный процесс угловой скорости тангажа (p)

На рисунок 4.4 представлен фрагмент ПП, на котором отчётливо выделяется периодическая составляющая, соответствующая спектральным компонентам спектра A_2 и ω_2 , определённым в выражении (2.9). Максимальная амплитуда данной колебательной компоненты достигает приблизительно 20 % от полного диапазона измерений датчика, что в отдельных случаях может превышать уровень полезного сигнала более чем в несколько раз. Наблюдаемая модуляция амплитуды, вероятно, обусловлена незначительными расхождениями в частотах вращения двигателей, что приводит к возникновению биений.

В то же время при изменении задающей частоты в ходе переходного процесса ожидаемая спектральная составляющая с параметрами A_1 и ω_1 (см. выражение (2.9)) либо не обнаруживается, либо проявляется крайне слабо. Для более детального анализа указанного поведения проведён анализ сигнала угловой скорости тангажа p и его спектры, полученные с применением быстрого преобразования Фурье (БПФ) на различных этапах пуска. Результаты для режима быстрого пуска представлены на рисунке 4.5, для плавного пуска – на рисунке 4.6.

Полученные результаты позволяют оценить влияние характера пуска двигателей на формирование спектральных составляющих в измерительных каналах и, следовательно, на качество обратной связи в контурах стабилизации.

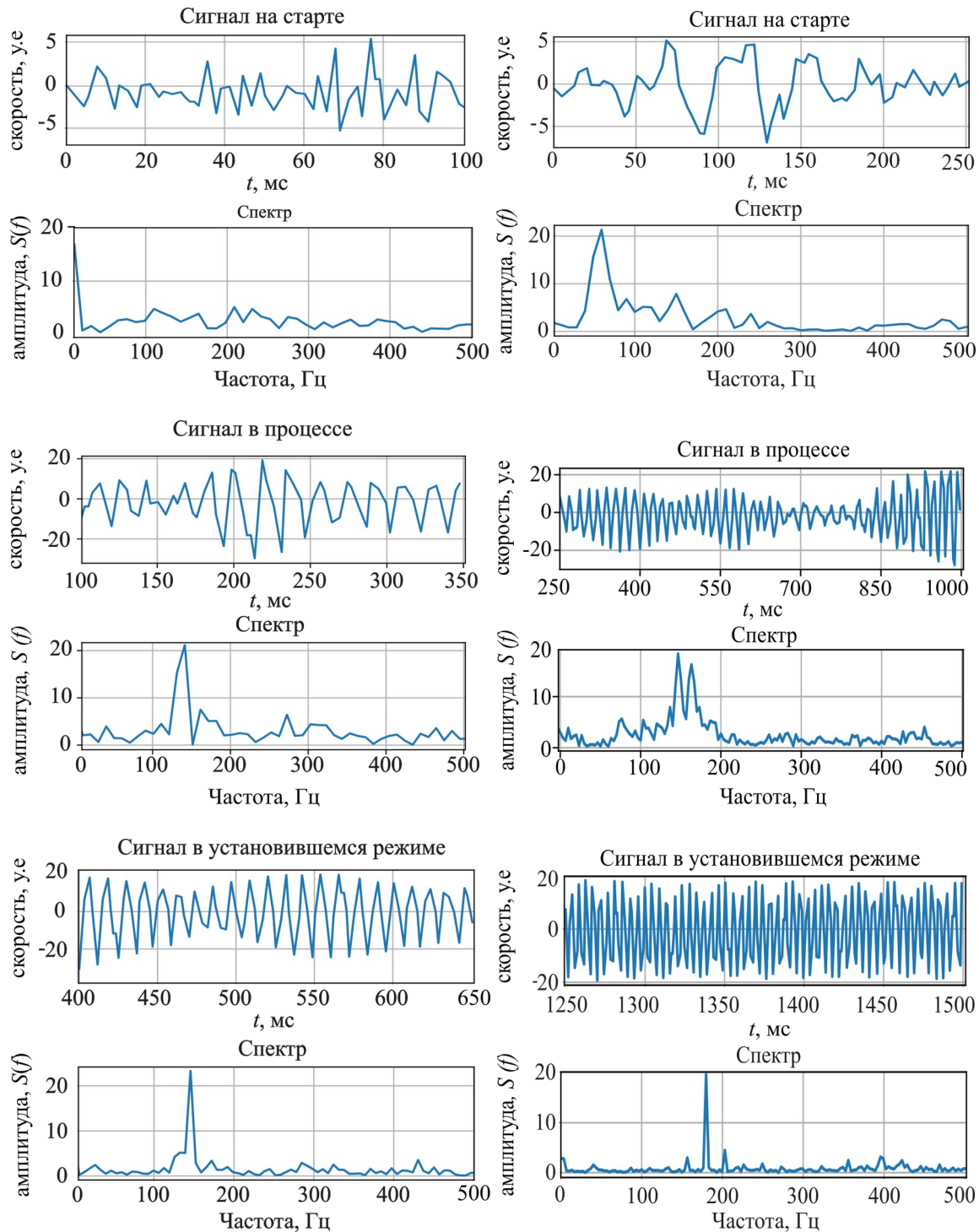


Рисунок 4.5 – Спектры по быстрому пуску Рисунок 4.6 – Спектры по плавному пуску

Анализ результатов показывает, что спектральный состав выходного сигнала существенно зависит от фазы переходного процесса.

При быстром пуске на начальном этапе (до 100 мс) спектр практически отсутствует, однако наблюдается значительное постоянное смещение сигнала, что

может негативно влиять на работу регулятора. В интервале 150 - 200 мс формируется выраженный спектр с доминирующей частотой, совпадающей с частотой переключения ESC, и амплитудой A_1 , определённой в выражении (2.16). На этапе установившегося режима (450 - 500 мс) спектр стабилизируется и чётко проявляется на частоте 150 Гц.

При плавном пуске спектральная компонента присутствует уже на начальном этапе, однако не выявляет выраженных доминирующих частот, что согласуется с малой амплитудой A_2 в выражении (2.16). Данное явление может быть обусловлено как низким уровнем полезного сигнала по сравнению с уровнем гауссовского шума, так и наличием постоянного смещения, проявляющегося в виде повышенного математического ожидания.

В переходном процессе (400 - 550 мс) спектр становится различимым, а в установившемся режиме (1300 - 1400 мс) фиксируется узкополосный спектр с доминирующей частотой 180 Гц. Примечательно, что время нарастания частоты в эксперименте оказалось более чем в три раза больше, чем в модели, представленной на рисунке 2.3 б. Такое расхождение между результатами моделирования и натурных испытаний объясняется особенностями функционирования ESC-преобразователя, в котором программно ограничена скорость изменения управляющего сигнала.

Дополнительно отмечается, что при плавном пуске (рисунок 4.6) математическое ожидание сигнала остаётся близким к нулю, о чём свидетельствует минимальная спектральная плотность в окрестности нулевой частоты. Напротив, при быстром разгоне спектральная плотность вблизи нуля существенно выше, что указывает на наличие начального постоянного смещения. Результаты эксперимента опубликованы в работе [127].

Для количественной оценки спектральных составляющих вибраций, генерируемых силовой установкой квадрокоптера, была выполнена аппроксимация функциональной зависимости между управляющим воздействием на привод,

установившейся частотой вращения ротора и характерными частотами возмущений, регистрируемых инерциальными датчиками [128].

В качестве типового привода квадрокоптера (рисунок 4.10) рассматривался BLDC-мотор A2212/10T с паспортной постоянной скорости $K = 1400$ об/мин·В, питаемый от трёхбаночного LiPo-аккумулятора с номинальным напряжением $U_{bat} = 11,1$ В. Управляющее воздействие задавалось в виде безразмерной величины тяги $u \in [0;1]$, соответствующей 0 - 100 % выходного сигнала регулятора.

Оценка механической частоты вращения ротора имеет вид:

$$RPM(u) \approx K \cdot U_{bat} \cdot u. \quad (4.2)$$

Соответствующая механическая частота вращения в герцах (число оборотов в секунду) равна

$$f_{rotor}(u) = \frac{RPM(u)}{60} \cdot n_p. \quad (4.3)$$

Данная величина $f_{rotor}(u)$ определяет основной низкочастотный пик, наблюдаемый в спектре выходных сигналов акселерометра и гироскопа. Результаты расчёта зависимости между управляющим сигналом на привод и ожидаемой частотой доминирующей спектральной компоненты представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Связь между управляющим воздействием и частотой f_{rotor}

Управление, %	$RPM(u)$	f_{rotor} (Гц)
10	1554	25,9
20	3108	51,8
30	4662	77,7
40	6216	103,6
50	7770	129,5
60	9324	155,4
70	10 878	181,3
80	12 432	207,2
90	13 986	233,1
100	15 540	259,0

Анализ таблицы 4.1 показывает линейную зависимость между командой тяги и механической частотой вращения: приращение управления на 10 % соответствует увеличению f_{rotor} на 25,9 Гц (и n на 1554 об/мин). Это позволяет использовать f_{rotor} как опорную частоту для идентификации доминирующих спектральных составляющих вибраций по данным акселерометра и гироскопа.

В открытых проектах [102, 104], ориентированных на обеспечение высокой скорости и манёвренности FPV-дронов, отмечается существенное влияние спектральных составляющих вибраций на качество стабилизации и точность оценивания состояния. Анализ исходных кодов показал, что для формирования управляющих сигналов, подаваемых на ESC, широко применяются фильтры нижних частот. Такие фильтры снижают уровень высокочастотных компонент, передаваемых в силовой тракт, и уменьшает возбуждение паразитных колебаний. Однако при слишком низкой частоте среза это приводит к сужению полосы пропускания замкнутых контуров управления и замедлению динамических характеристик системы в реальных условиях эксплуатации.

В качестве альтернативы или дополнения к общему низкочастотному ограничению в современных автопилотах также используется режекторные (notch) фильтры, настраиваемые на доминирующие частоты вибраций (например частоту вращения ротора f_{rotor} и её гармоники). Это позволяет избирательно подавлять узкополосные помехи с минимальным влиянием на быстродействие управляющих контуров.

4.2 Разработка установки для проведения эксперимента

Появление доступных технологий 3D-печати позволяет изготавливать корпуса летательных аппаратов, включая квадрокоптеры, с минимальными затратами и высокой геометрической точностью. В настоящей работе корпус квадрокоптера и элементы экспериментального стенда были спроектированы в программной среде OpenSCAD (рисунок 4.7) и последующим образом изготовлены на 3D-принтере.

Конструкция квадрокоптера выполнена в классической Х-образной конфигурации.

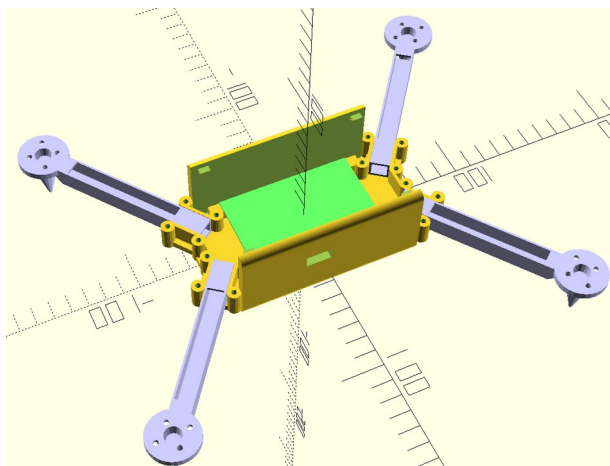


Рисунок 4.7 – Модель квадрокоптера, разработанная в среде OpenSCAD

На основе модели квадрокоптера была разработана экспериментальная платформа, обеспечивающая свободное вращение аппарата вокруг осей крена и тангажа при ограничении поступательных перемещений. Такая конструкция позволяет воспроизводить близкие к реальным ПП в контурах управления в условиях, приближенных к реальному полёту, сохраняя безопасность эксперимента и обеспечивая высокоточное измерение динамических параметров (рисунок 4.8).

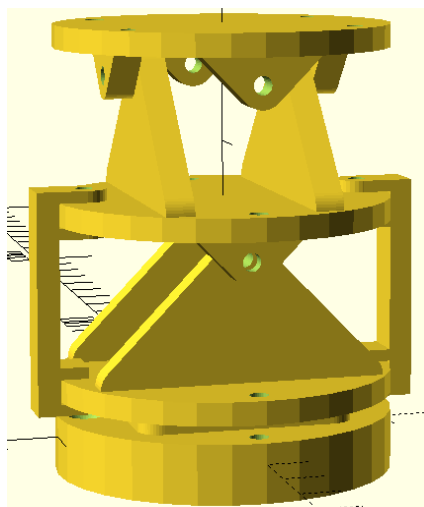


Рисунок 4.8 – Экспериментальный стенд с платформой для исследования вращательного движения квадрокоптера вокруг осей крена и тангажа

С целью верификации работоспособности предложенных методов управления в условиях возмущений, обусловленных вибрациями BLDC-моторов и конструктивной асимметрией, была проведена серия испытаний на базе симулятора Gazebo. В данную среду интегрирована физически достоверная модель квадрокоптера, учитывающая его динамические и геометрические особенности.

Gazebo – это симулятор с открытым исходным кодом, обеспечивающий физически корректное моделирование робототехнических систем и их взаимодействия с окружающей средой. Он широко применяется в связке с ROS (Robot Operating System) для разработки, отладки и верификации алгоритмов управления квадрокоптером. Внешний вид модели квадрокоптера в среде Gazebo представлен на рисунке 4.9.

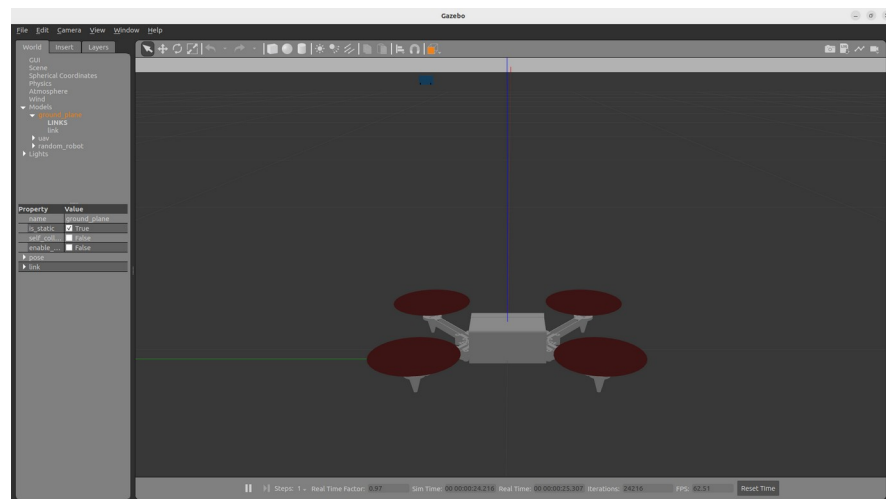


Рисунок 4.9 – Визуальное представление модели квадрокоптера в среде моделирования Gazebo

После верификации работоспособности системы управления в симуляторе Gazebo проведены испытания на физическом экспериментальном стенде.

В состав экспериментального макета квадрокоптера входят следующие компоненты:

- бесконтактные двигатели постоянного тока (BLDC-моторы);
- электронные регуляторы скорости (ESC-преобразователя);
- литий-полимерный аккумулятор;

- инерциальный измерительный модуль MPU-6050, включающий трёхосевые акселерометр и гироскоп;
- барометрический датчик атмосферного давления BMP280;
- микроконтроллер ESP32.

Внешний вид экспериментального макета квадрокоптера представлен на рисунке 4.10.

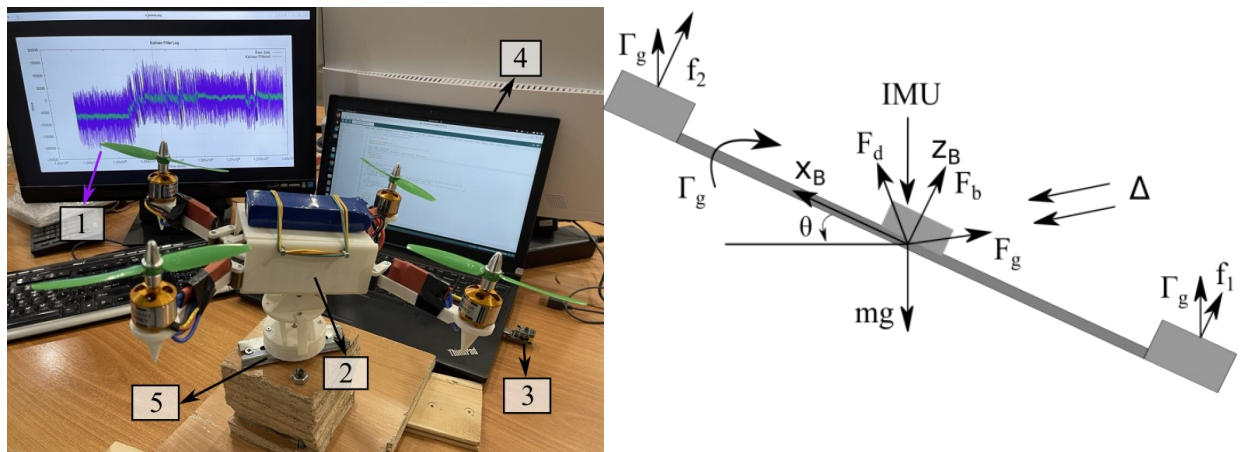


Рисунок 4.10 – Экспериментальная установка с действующим прототипом квадрокоптера

Конструктивно экспериментальная установка включает следующие основные элементы:

1. Программный модуль мониторинга и визуализации, предназначенный для наблюдения ПП в реальном времени.
2. Полётный контроллер, реализованный на базе микроконтроллера ESP32. Он осуществляет сбор и обработку данных с инерциальных датчиков (гироскопа и акселерометра), формирует управляющие сигналы для двигателей и реализует алгоритм стабилизации по каналу крена.
3. Модуль беспроводной связи на микроконтроллере ESP8266, обеспечивающий обмен данными с персональным компьютером по протоколу Wi-Fi. Данный модуль используется для передачи команд управления и приёма телеметрической информации о состоянии системы.

4. Среда разработки Arduino IDE, применяемая для написания, компиляции и отладки управляющего программного обеспечения. Программный код, загружаемый в ESP32, обрабатывает сигналы с датчиков, передаёт их в клиентское приложение на базе Qt5 для визуализации и расчёта управляющих воздействий, а затем формирует ШИМ-сигналы для привода двигателей.
5. Механическая платформа, обеспечивающая вращение квадрокоптера по двум степеням свободы – вокруг осей крена и тангажа. Это позволяет моделировать внешние возмущения и оценивать эффективность работы системы стабилизации в условиях, приближенных к реальному полёту.

Разработанное клиентское приложение на базе Qt5 предназначено для отладки управляющего программного обеспечения, визуализации динамических характеристик квадрокоптера и управления его движением. Основная функция приложения заключается в пошаговой проверке алгоритма стабилизации канала крена и контроле корректности работы управляющих программ, загруженных в микроконтроллер ESP32. Интерфейс мониторинга, реализованный в Qt5, представлен на рисунке 4.11.

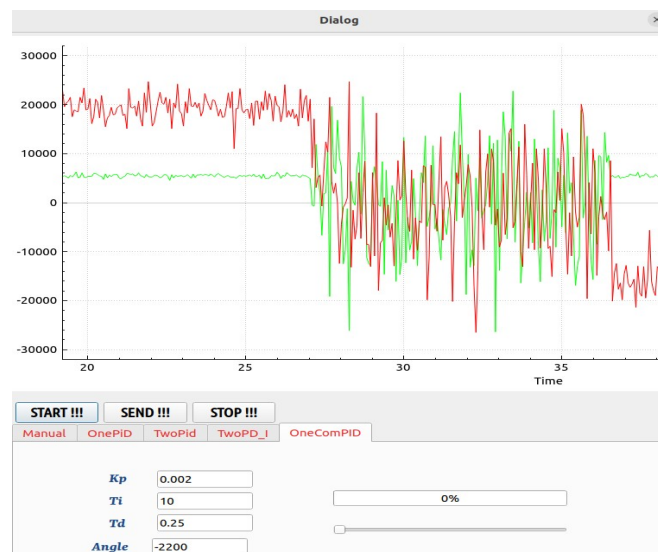


Рисунок 4.11 – Программное приложение Qt5 для визуализации переходных процессов и реализации алгоритмов управления

Таким образом, разработанная экспериментальная установка обеспечивает возможность:

- реализации переходных процессов в контуре стабилизации крена;
- оценки влияния вибраций, генерируемых BLDC-моторами, на качество измерений и устойчивость системы;
- разработки и верификации алгоритмов управления на основе зарегистрированных экспериментальных данных.

На следующем этапе (раздел 4.3) описывается методика проведения экспериментов и обработки полученных данных, направленная на анализ устойчивости системы управления квадрокоптером.

4.3 Результаты экспериментальных исследований по применению фильтра Калмана в сочетании с предложенным PD-PI-регулятором

На основе модифицированной структурной схемы, представленной на рисунке 4.1, в настоящем разделе проведена экспериментальная проверка эффективности предложенного ФК в сочетании с предложенной структурой регулятора.

Основное внимание в эксперименте уделялось сопоставлению поведения системы при использовании классического и предложенного ФК. Для объективной оценки сравнивались статистические характеристики сигналов, в первую очередь СКО угловых координат и их временных производных – угловых скоростей. Такой подход позволяет не только количественно оценить точность восстановления состояния, но и проанализировать влияние структурных изменений на динамику ПП.

В качестве базового варианта для сравнения была реализована классическая версия ФК из открытой библиотеки. Данная реализация является типовой, широко применяется в проектах [104, 129].

Результат эксперимента, представленный на рисунке 4.12а, демонстрирует сравнение измеренного сигнала датчика и оценённого значения угла крена, полу-

ченного с использованием стандартного ФК. Следует отметить, что в рамках данной архитектуры отсутствует возможность прямой оценки угловых скоростей, что существенно ограничивает её применимость при синтезе оптимальных регуляторов на основе принципа максимума Понтрягина, особенно в задачах построения высокоточных контуров управления.

Для сопоставления эффективности был проведён эксперимент с применением предложенной модифицированной структуры ФК, реализованной в сочетании с PD-PI-регулятором. Результаты приведены на рисунке 4.12б.

В отличие от классического варианта, предложенный фильтр обеспечивает не только оценку угла крена, но и прямую оценку его угловой скорости – параметра, принципиально важного для настройки и стабилизации замкнутых контуров управления. Анализ графиков показывает, что, несмотря на сохраняющиеся флуктуации, их амплитуда и спектральные характеристики существенно отличаются от таковых при использовании стандартного ФК. При этом форма сигнала управления u_1 соответствует производной от оценённой угловой скорости, что позволяет достаточно точно восстанавливать вторую производную угла крена. Данная возможность особенно значима при реализации алгоритмов управления в скользящем режиме, где требуется надёжная информация о высших порядках производных состояния.

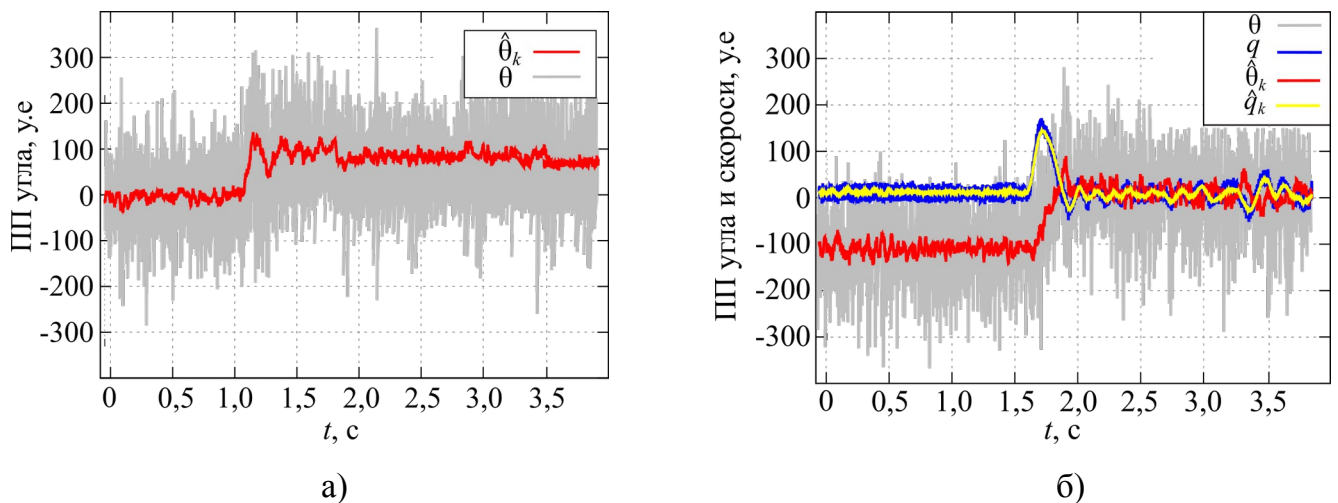


Рисунок 4.12 – Результаты эксперимента по ПП при использовании PD-PI-регулятора: а) с классическим ФК; б) с предложенным ФК

В практических системах управления проблема флуктуаций в измеряемых сигналах, как правило, решается с применением процедур сглаживания или усреднения данных. Такой подход действительно позволяет снизить уровень шумов и повысить стабильность выходных характеристик, однако одновременно вносит значительную инерционность в динамику системы. В результате длительность ПП возрастает и в ряде случаев превышает 2-3 с, что существенно ограничивает динамические возможности объекта управления и затрудняет применение методов оптимального управления по быстродействию. Результаты данного исследования опубликованы в работе [130].

Для повышения качества оценивания состояния в статических условиях были проведены эксперименты с использованием обеих реализаций ФК, а также выполнен сравнительный анализ их работы в установившемся режиме.

Наиболее отчётливо преимущество предложенного фильтра проявляется при удержании квадрокоптером заданного угла крена. Дополнительные материалы, включая расширенные результаты моделирования и экспериментов, приведены в источнике [93]. Визуальный анализ траекторий свидетельствует о более устойчивом поведении системы. Однако для получения объективной количественной оценки использовались как переходные характеристики, так и статистические показатели точности. В частности, для каждого эксперимента рассчитывались СКО оценок угловых координат и угловых скоростей, что позволило количественно охарактеризовать качество стабилизации.

На рисунке 4.13 приведены результаты экспериментов, проведённых при малых оборотах двигателей ($P_{\text{PWM}} = 25 \%$), а на рисунке 4.14 – при высоких оборотах ($P_{\text{PWM}} = 75 \%$). Оптимальные значения коэффициентов ФК были определены экспериментально и составили $K_{k\theta} = 0,13$ и $K_{k\omega} = 0,18$. Эти параметры соответствуют отношению $Val_{QR} = 0,02$, которое можно рассматривать как компромисс между требуемой степенью подавления измерительных шумов и необходимостью сохранения достаточного быстродействия системы.

В отличие от классических реализаций ФК, предложенная модифицированная структура, благодаря рациональному выбору коэффициентов, обеспечивает снижение амплитуды паразитных спектральных составляющих и уменьшение статического смещения оценок в установившемся режиме.

Вследствие указанных особенностей наибольшие флуктуации выходного сигнала наблюдаются при малых оборотах двигателей, что иллюстрируется на рисунке 4.13а, где представлен результат работы классического ФК. Этот эффект обусловлен тем, что при низком уровне мощности ($P_{\text{PWM}} = 25\%$) отношение амплитуды измерительного шума к полезному сигналу возрастает, что делает помеховую компоненту более заметной на фоне общего переходного процесса.

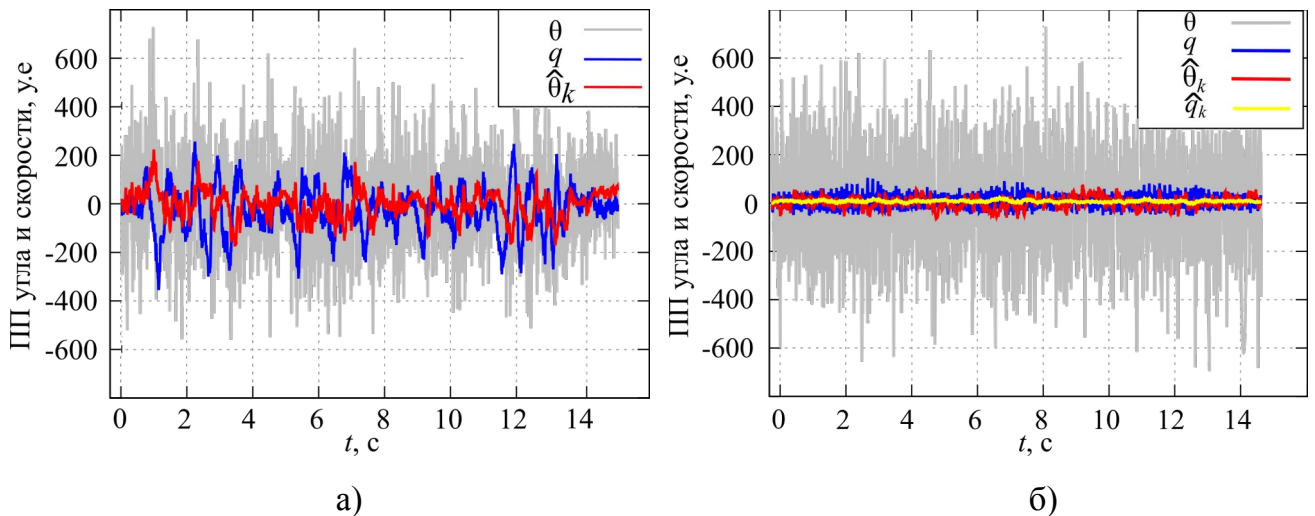


Рисунок 4.13 – Сигналы в установившемся режиме при малых оборотах (25 % от номинальных) а) с классическим ФК; б) с предложенным ФК

Данный эффект объясняется тем, что при малых оборотах двигателей частота периодической помехи становится соизмеримой или даже ниже частоты среза инерционного фильтра в канале измерения. В классических схемах фильтрации это приводит к значительному проникновению помехи в оценки угла крена и, как следствие, к выраженным флуктуациям выходного сигнала. На выходе фильтров по каналу угла и угловой скорости крена наблюдаются выраженные колебания, обусловленные близостью частоты дискретизации к частоте периодической помехи.

В отличие от классического подхода, предложенный в работе ФК обеспечивает не только оценку угла крена, но и совместное восстановление его угловой скорости и углового ускорения за счёт использования управляющего воздействия и математической модели замкнутого контура управления. Такой интегрированный подход позволил существенно снизить амплитуду флуктуаций оценок, что наглядно подтверждается результатами, представленными на рисунке 4.13б.

При увеличении оборотов двигателей до высоких значений частота периодической помехи достигает диапазона 600 - 800 Гц, что существенно превышает частоту среза инерционного фильтра в измерительном канале. В этих условиях амплитуда флуктуаций значительно снижается и становится относительно незначительной для обоих рассматриваемых фильтров, что подтверждается результатами, представленными на рисунке 4.14 .

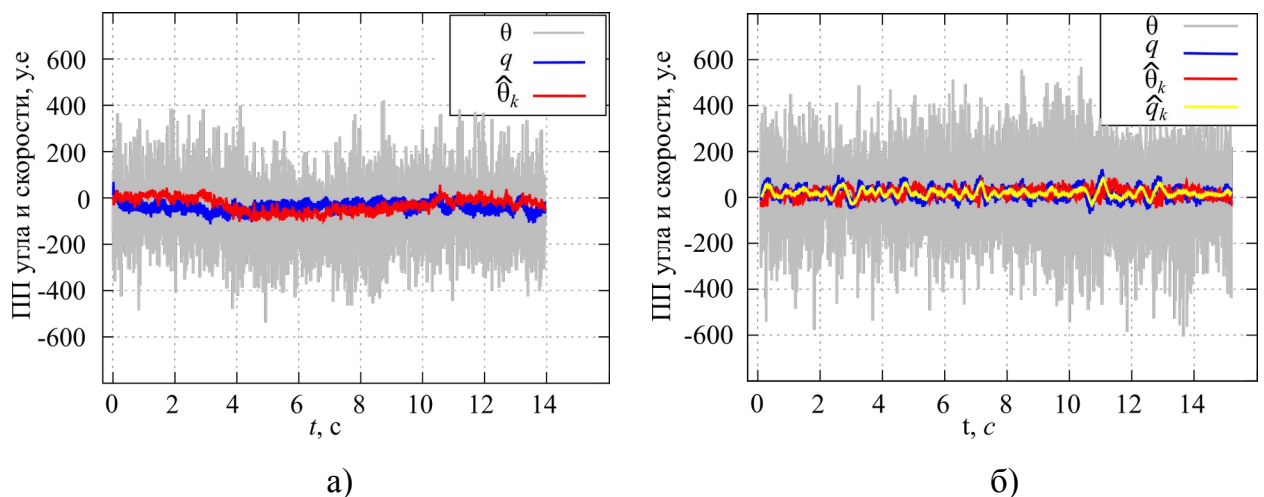


Рисунок 4.14 – Сигналы в установившемся режиме при малых оборотах (75 % от номинальных) а) с классическим ФК; б) с предложенным ФК

Наиболее вероятно, что наблюдаемые колебания обусловлены эффектом биеений, возникающим между частотой дискретизации и помехами, генерируемыми в процессе работы двигателей. Прямая верификация этого предположения – путём сопоставления частоты биеений с рабочими частотами двигателей – затруднена из-за отсутствия возможности с высокой точностью определить фактическую частоту коммутации фаз в ESC-преобразователях. Тем не менее, такая проверка физически возможна при наличии цифрового канала связи между ESC и полётным

контроллером, обеспечивающего передачу точной информации о частоте переключения фаз.

Для объективного сравнительного анализа эффективности алгоритмов фильтрации была проведена количественная оценка на основе расчёта СКО выходных сигналов. Данный подход позволил оценить степень подавления измерительных шумов для каждой из рассматриваемых реализаций ФК. Результаты расчётов сведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2 – Сравнение СКО выходных сигналов двух ФК при различных режимах вращения моторов

Переменные	Среднеквадратическое отклонение (СКО)		
	Предлагаемый ФК	Используемый ФК	Соотношение 2 ФК
С высокой частотой вращения двигателей ($P_{PWM} = 75 \%$)			
СКО ($\hat{\theta}_k$)	594	785	0,7566
СКО ($\hat{q}_k$)	490	–	–
С низкой частотой вращения двигателей ($P_{PWM} = 25 \%$)			
СКО ($\hat{\theta}_k$)	141	535	0,2635
СКО ($\hat{q}_k$)	25	–	–

Проведённые экспериментальные исследования подтверждают статистически значимое улучшение предложенного ФК над классической реализацией в различных режимах работы системы.

Наиболее существенное улучшение точности оценивания наблюдается в режиме малой мощности, где предложенный алгоритм обеспечивает почти 3,5-кратное снижение СКО оценки угла крена по сравнению с традиционным ФК. Данный результат свидетельствует о повышенной устойчивости разработанного алгоритма к изменяющимся динамическим условиям, а также о его способности эффективно функционировать в условиях слабого подавления вибрационных помех.

В режиме высокой частоты вращения, где влияние спектральных составляющих вибрации менее выражено, предложенный фильтр также демонстрирует зна-

чительное улучшение точности – снижение СКО оценки угла на 24,3 %. Это подтверждает универсальность и эффективность разработанного алгоритма в широком диапазоне рабочих режимов.

Следует отметить, что оценка скорости была выполнена исключительно с использованием предложенного фильтра, что подчёркивает его расширенную функциональность по сравнению с классической реализацией. Полученные значения СКО, рассчитанные в течение 4 с в установившемся режиме (рисунки 4.13 и 4.14), дополнительно подтверждают высокую точность и устойчивость разработанного алгоритма оценивания состояния системы.

В таблице отсутствуют данные по отношению СКО для производной от скорости $\dot{q}_k$ (т.е. углового ускорения), хотя соответствующий сигнал присутствует в структурной схеме на рисунке 4.1. Данное отношение, вычисленное как отношение СКО измеренной производной угловой скорости $\dot{q}$ к СКО её $\dot{q}_k$, определяется следующим выражением:

$$\text{СКО}(\dot{q}_k) / \text{СКО}(\dot{q}) = 613211 / 5787963 = 0,105.$$

Это позволяет получить оценку производной $\dot{q}_k$ с СКО, уменьшенным почти в десять раз по сравнению с прямым дифференцированием измеренного сигнала. Кроме того, как отмечалось ранее, форма сигнала u_1 , полученного в соответствии со структурой, представленной на рисунке 4.1, близка к форме $\dot{q}$. Получаемая таким образом оценка оказывается существенно более точной, поскольку сигнал u_1 формируется на основе модели замкнутого контура управления и практически не подвержен влиянию измерительных помех. Вместе с тем практическое использование оценки углового ускорения $\dot{q}$ на основе сигнала u_1 в составе ФК требует дополнительных исследований, связанных с устойчивостью и робастностью алгоритма, и не рассматривается в рамках данной работы. Результаты эксперимента сигнала u_1 и $\dot{q}$ представлены на рисунке.

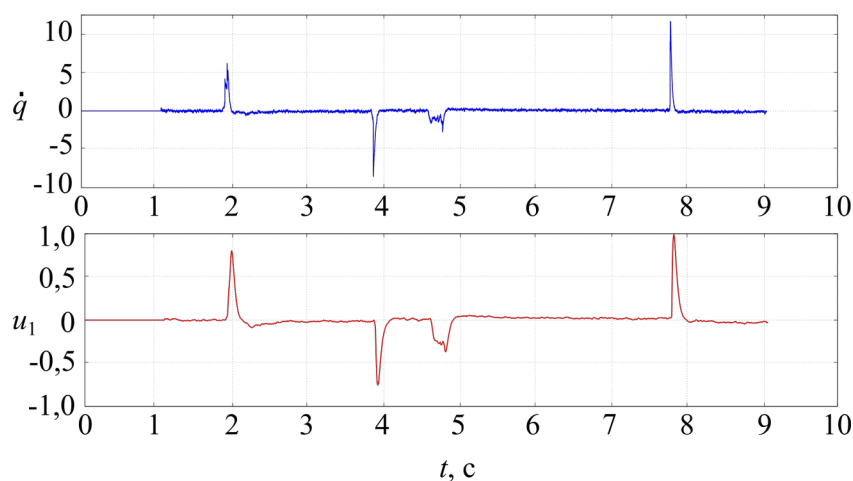


Рисунок 4.15 – Результаты эксперимента: сигнал управления u_1 и производная скорость крена $\dot{q}$

Следовательно, для оценки $\dot{q}$ может быть использован сигнал u_1 . В этом случае отношение СКО, выражается следующим образом:

$$\text{СКО}(u_1) / \text{СКО}(\dot{q}) \approx 0,1.$$

Флуктуации угла крена проявляются уже на этапе моделирования при внесении периодической помехи в контур управления. В экспериментальных данных (рисунок 4.13) они выражены особенно ярко при малых оборотах двигателей, что вполне соответствует результатам, полученным в разделе 3.3. Предлагаемый фильтр, основанный на использовании математической модели и параметров контура управления, обеспечивает более точные оценки θ , q и $\dot{q}$ в условиях влияния гауссовского шума и спектральных составляющих.

Настройка коэффициентов фильтра с учётом управляющего сигнала и его скорости не привели к улучшению качества оценивания, вероятно, из-за наличия встроенного ограничителя скорости изменения управляющего воздействия в ESC-преобразователя. Наилучшие результаты были получены при фиксированном отношении $Val_{Q/R} = 0,02$. Чувствительность фильтра к отклонению коэффициентов $K_{k\theta}$ и K_{kq} в пределах $\pm 30\%$ от оптимальных значений оказалась незначительной – качество фильтрации практически не ухудшалось. Это позволяет в алгоритме

(3.16) отказаться от вычисления шагов 3.17, 3.19, 3.20, 3.22 и использовать фиксированные значения параметров, соответствующие $Val_{Q/R} = 0,02$.

В рамках исследования влияния конструктивной асимметрии определения оптимального диапазона коэффициента Калмана, помимо основного экспериментального стенда (рисунок 4.10), была проведена серия дополнительных испытаний на установке, оснащённой одним двигателем. Внешний вид данной экспериментальной установки представлен на рисунке 4.16. Такая конфигурация позволила верифицировать работоспособность управляющего контура и уточнить оптимальное значение отношения $Val_{Q/R}$ эффективного функционирования фильтра Калмана.

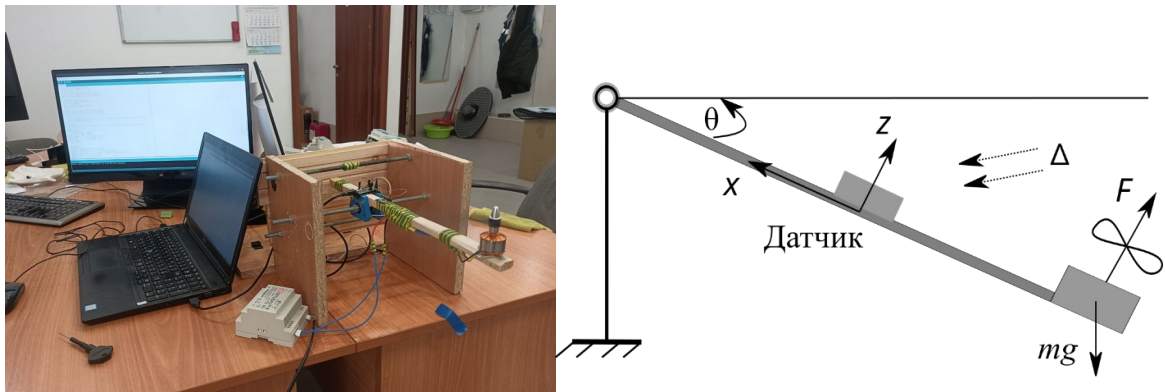


Рисунок 4.16 – Экспериментальная установка с одним BLDC-мотором

Значение отношения $Val_{Q/R}$, существенно влияет на динамическое поведение системы: при его завышении или занижении наблюдаются значительные расхождения как в результатах моделирования, так и в экспериментальных данных. Для обеспечения оптимальной работы предложенной схемы далее рассматривается задача выбора оптимального значения $Val_{Q/R}$ путём минимизации двух критериев:

– среднеквадратическое отклонение

$$\text{СКО} = \sum_{k=1}^N \left[\left(\theta - \hat{\theta}_{k/k} \right)^2 + \left(\dot{\theta} - \hat{\dot{\theta}}_{k/k} \right)^2 \right], \quad (4.4)$$

– время переходного процесса $t_{\text{ПП}}$.

Оптимальное значение (или допустимый диапазон) отношения $Val_{Q/R}$, определяется из условия минимизации целевого функционала:

$$J(Q, R) = \alpha \cdot \text{СКО} + \beta \cdot t_{\text{ПП}}, \quad (4.5)$$

где α и β – весовые коэффициенты, выбираемые в зависимости от приоритетов задачи: либо повышение точности оценки при сохранении приемлемого быстродействия системы, либо сокращение времени переходного процесса при допустимом уровне погрешности.

Минимизация целевого функционала может быть выполнена с использованием стандартных методов решения вариационных задач, реализованных в современных математических пакетах, таких как Matlab. Результаты экспериментального исследования предложенного ФК представлены на рисунке 4.17. Данные результаты опубликованы в работе [131].

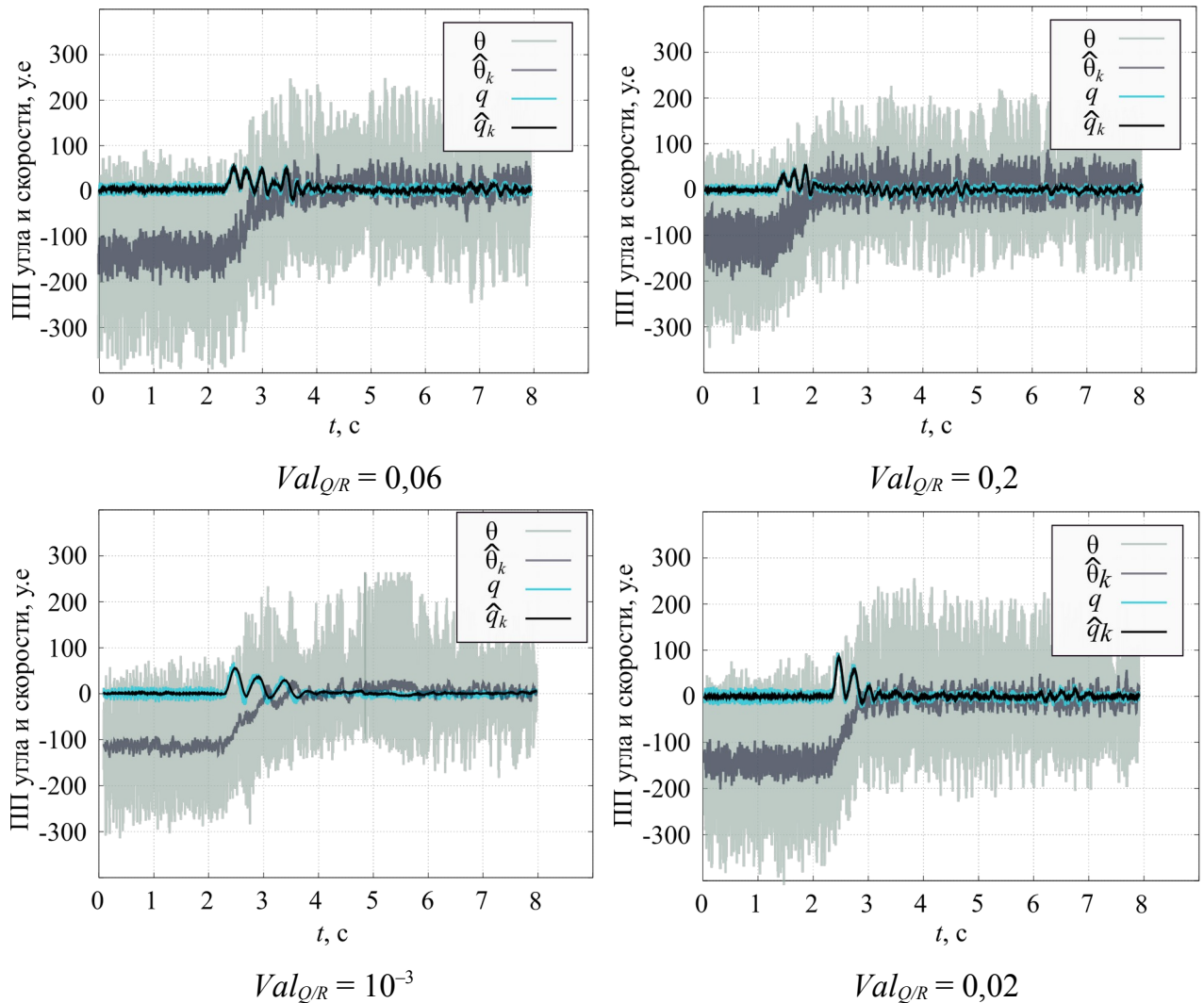


Рисунок 4.17 – Результаты экспериментального исследования ФК при различных значениях отношения $Val_{Q/R}$

Результаты экспериментов по управлению объектом с использованием предложенного ФК показали следующую зависимость качества оценивания от отношения $Val_{Q/R}$:

– При низком значении $Val_{Q/R} \leq 10^{-3}$ фильтр обеспечивает максимальное подавление измерительного шума, однако длительность переходного процесса составляет около $t = 1,6$ с, а на выходе наблюдается статическое смещение оценок относительно истинных значений, особенно по компоненте угловой скорости.

– При увеличении отношения $Val_{Q/R}$ до 0,02 уровень шумовой составляющей незначительно возрастает, но время переходного процесса сокращается до $t = 1$ с, а смещение оценок существенно уменьшается.

– Дальнейшее увеличение $Val_{Q/R}$ до 0,06 длительность переходного процесса $t = 1,3$ с, а при $Val_{Q/R} = 0,2$ время перехода составляет $t = 1,1$ с, однако в этом случае наблюдается значительное усиление шумов, что делает данный вариант наименее предпочтительным.

При выборе весовых коэффициентов α и β в целевом функционале (выражение 4.5) с учётом компромисса между точностью оценивания и быстродействием системы был проведён сравнительный анализ для трёх вариантов расстановки приоритетов:

- равные приоритеты ($\alpha = \beta = 0,5$);
- приоритет точности над быстродействием ($\alpha = 0,7$; $\beta = 0,3$);
- приоритет быстродействия над точностью ($\alpha = 0,3$; $\beta = 0,7$).

Для количественной оценки качества регулирования в установившемся режиме в каждом эксперименте рассчитывалось среднеквадратическое отклонение (СКО) ошибки управления. В качестве исходных данных использовался массив из 4000 последовательных отсчётов сигнала ошибки, зарегистрированных после завершения переходного процесса на временном интервале длительностью 4 с (что соответствует частоте дискретизации 1 кГц). Анализ проводился для четырёх значений отношения $Val_{Q/R}$. Результаты представлены в таблице 4.3.

Таблица 4.3 – Результаты вычисления параметров функционала

$Val_{Q/R}$	СКО	$t_{\text{пп}}(\text{с})$	α	β	$J(Q/R)$
0,2	50333	1,1	0,3	0,7	15100
			0,7	0,3	35233
			0,5	0,5	25167
0,06	54366	1,3	0,3	0,7	16310
			0,7	0,3	38056
			0,5	0,5	27183
0,02	42378	1,0	0,3	0,7	12714
			0,7	0,3	29664
			0,5	0,5	21189
10^{-3}	49137	1,6	0,3	0,7	14742
			0,7	0,3	34396
			0,5	0,5	24569

Минимизация целевого функционала $J(Q/R)$ продемонстрировала, что значение $Val_{Q/R} = 0,02$ обеспечивает наименьшее значение критерия J независимо от выбора весовых коэффициентов α и β , т.е. при любом балансе между точностью и быстродействием. Полученные результаты свидетельствуют, что разработанный подход обеспечивает устойчивую работоспособность системы управления в условиях реальных производственных допусков и конструктивных неидеальностей (в том числе асимметрии корпуса).

Таким образом, выбранное оптимальное значение $Val_{Q/R}$ обеспечивает оптимальный баланс между скоростью сходимости и точностью оценивания, что позволяет эффективно применять предложенный ФК в задачах управления квадрокоптером, включая быстродействующие режимы и режимы скользящего управления, где критически важны высокая точность оценки угловой скорости и углового ускорения.

4.4 Результаты экспериментального исследования системы управления креном на основе скользящих режимов

Результаты численного моделирования, представленные в разделе 3.3, показали, что применение SMC обладает как существенными преимуществами, так и рядом практических ограничений. С одной стороны, данный подход теоретически обеспечивает робастность к параметрическим неопределённостям и внешним возмущениям, гарантируя конечное время сходимости и высокую точность управления. С другой стороны, при реализации на реальных объектах эффективность метода снижается под действием ряда факторов:

- высокочастотных колебаний управляющего сигнала (эффект *chattering*);
- насыщения исполнительных механизмов;
- временных задержек в цепи коммутации;
- повышенной чувствительности к измерительным шумам в каналах обратной связи.

Таким образом, возникает необходимость в экспериментальной верификации применимости SMC-регулятора при управлении квадрокоптером в реальных условиях. В настоящей главе представлены результаты натурных испытаний, проведённых с целью оценки качества стабилизации угла крена квадрокоптера с использованием предложенного SMC алгоритма, а также выявления практических ограничений, не отражённых в имитационных моделях. Особое внимание уделено анализу робастности алгоритма к параметрическим неопределённостям и его способности подавлять высокочастотные колебания («дрожание» – *chattering*), характерные для классических реализаций скользящего режима.

Экспериментальный стенд был реализован на базе лабораторной испытательной платформы, представляющей собой квадрокоптер с жёстко закреплённым кардановым подвесом, обеспечивающим свободу вращения только по одной оси – крена (рисунок 4.18). Управление осуществлялось в соответствии со структурной схемой, приведённой на рисунке 4.1.

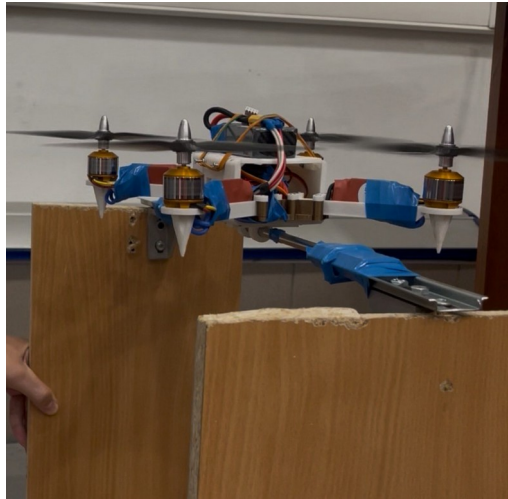


Рисунок 4.18 – Испытательный стенд для экспериментальной верификации SMC-алгоритмов управления креном

На рисунке 4.19 представлены результаты эксперимента по стабилизации угла крена квадрокоптера с использованием SMC-регулятора и предложенного ФК. Сигнал управляющего воздействия, формируемый SMC-алгоритмом, и его обработанная версия, подаваемая на двигатели, представлены на рисунке 4.20. Результаты исследования опубликованы в работе [118].

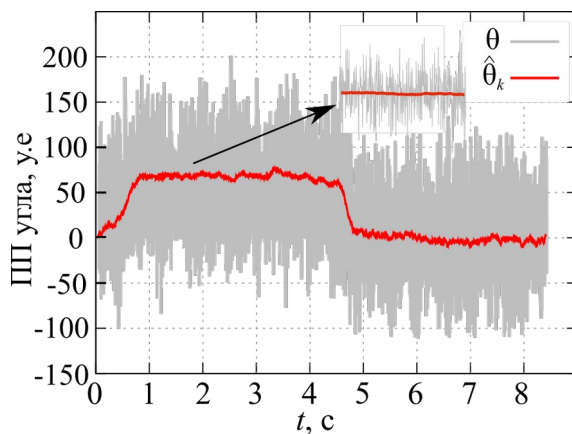


Рисунок 4.19 – Результаты ПП угла системы управления на основе SMC-PI-регулятора

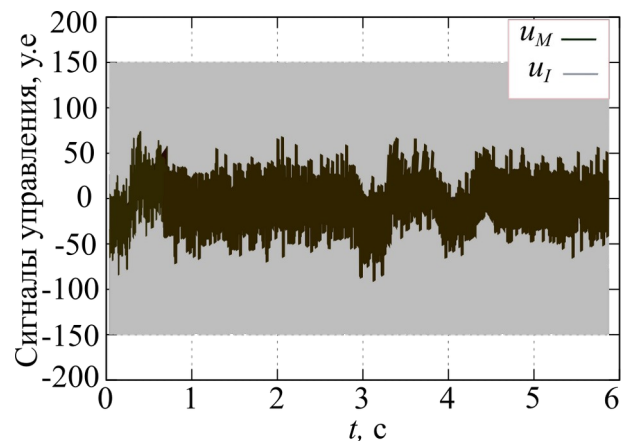


Рисунок 4.20 – Переключающийся сигнал u_I и управляющее воздействие u_M , подаваемое на матрицу распределения

Экспериментальные результаты работы контроллера SMC-PI в сочетании с фильтром Калмана при значении отношения $Val_{Q/R} = 0,07$ показывают, что оценка угла крена характеризуется высокой плавностью, а переходный процесс протекает

без перерегулирования. Длительность переходного процесса составляет около 1,0 с. В установившемся режиме система демонстрирует высокую стабильность и практически не подвержена влиянию измерительных шумов и спектральных возмущений, обусловленных коммутацией фаз BLDC-моторов.

Анализ переключающегося управляющего сигнала подтверждает, что система сохраняет работоспособность даже при резких (скачкообразных) изменениях управляющего воздействия. Данное поведение согласуется с принципом функционирования ESC-преобразователя, в частности с наличием встроенного ограничителя скорости изменения сигнала, и соответствует результатам, полученным в предыдущих исследованиях. Сигнал управляющего воздействия u_M , подаваемый на вход двигателей, имеет пилообразную форму и значительно меньшую амплитуду по сравнению с исходным переключающимся сигналом на выходе SMC-регулятора. Анализ переходных процессов при реализации предложенной структуры управления показал отсутствие характерных признаков *chattering* – высокочастотных колебаний управляющего сигнала и выходных переменных. Это указывает на то, что комбинация модифицированного SMC-PI-регулятора и динамических свойств ESC обеспечивает эффективное сглаживание управляющего воздействия без применения дополнительных методов регуляризации поверхности скольжения.

На основе результатов численного моделирования (см. рисунок 3.19) проведено экспериментальное исследование SMC-регулятора при вариации параметра объекта управления K_v .

Особое внимание уделялось анализу межканального взаимодействия: при отработке заданного воздействия по каналу крена регистрировалось перекрёстное влияние на угол тангажа. Такой подход позволяет количественно оценить степень динамической связи между поперечным и продольным каналами управления, что особенно важно при проектировании многоканальных систем стабилизации квадрокоптера.

Эксперименты выполнены при десятикратном уменьшении ($K_v/10$) и десятикратном увеличении ($10K_v$) номинального значения параметра K_v , что имитирует существенные отклонения характеристик объекта. Результаты натурных испытаний представлены на рисунках 4.21 и 4.22 соответственно.

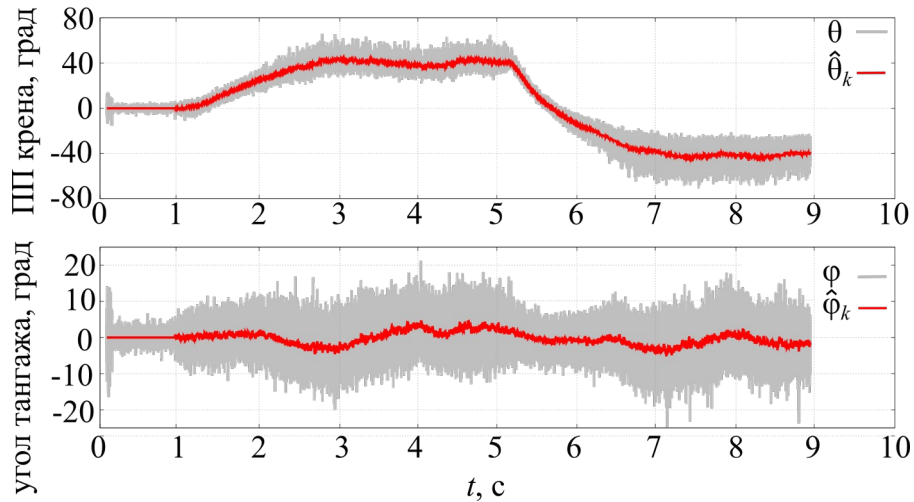


Рисунок 4.21 – Переходные процессы углов ориентации при десятикратном уменьшении параметра объекта K_v

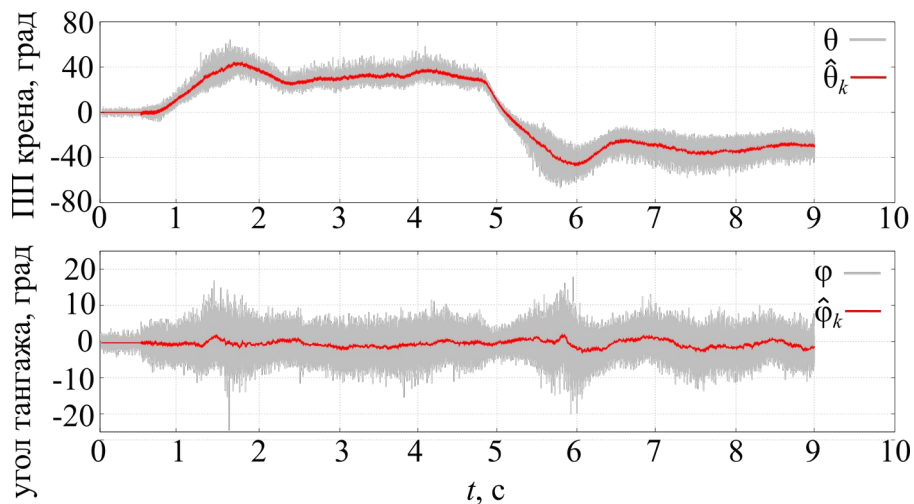


Рисунок 4.22 – Переходные процессы углов ориентации при десятикратном увеличении параметра объекта K_v

Результаты эксперимента подтвердили выводы, полученные в ходе численного моделирования: при увеличении параметра объекта управления K_v ПП ускоряется, однако при его возрастании более чем в 10 раз наблюдается перерегулирование. Для обеспечения устойчивости системы в этом случае необходимо снижать

коэффициенты фильтра Калмана, что позволяет ограничить чрезмерную реакцию на усиленное управляющее воздействие.

Напротив, при уменьшении параметра K , ПП замедляется, но система становится менее чувствительной к шумам, что позволяет увеличить коэффициенты фильтра Калмана и тем самым повысить точность оценки состояния.

Анализ представленных ПП показывает, что при выполнении манёвра по крену в необработанном сигнале угол тангажа испытывает колебания с амплитудой $\pm 10^\circ$. Применение фильтра Калмана позволяет снизить амплитуду перекрёстных возмущений до уровня $\pm 2-3^\circ$ и менее, что свидетельствует о слабом взаимовлиянии между каналами крена и тангажа и подтверждает эффективную развязку этих каналов в предложенной архитектуре системы управления.

Установлено также, что конструктивная геометрическая асимметрия объекта практически не ухудшает качество ПП: замкнутая система сохраняет высокую стабильность и предсказуемость динамики даже при наличии заметных отклонений реальной геометрии от идеальной математической модели.

Однако в ходе серии экспериментов было установлено, что устойчивое функционирование объекта с SMC-PI-регулятором обеспечивается лишь при отношении $Val_{QR} \leq 0,1$. В этом режиме ФК преимущественно полагается на прогноз, основанный на математической модели динамики системы, и слабо корректируется по текущим измерениям от датчиков.

При увеличении отношения Val_{QR} до допустимого предела система сначала демонстрирует повышенную чувствительность к изменениям угла крена. Однако по мере накопления ошибок, вызванных усилением влияния зашумлённых измерений – особенно в дифференциальном канале оценки угловой скорости, возникает расхожимость переходного процесса, приводящая к потере устойчивости замкнутого контура управления (см. рисунок 4.23).

Напротив, чрезмерное уменьшение Val_{QR} приводит к возникновению статического смещения в оценках состояния. Причина заключается в несовпадении реальной динамики объекта и его математической модели, используемой в ФК. Это

приводит к формированию статического смещения оценок относительно истинных значений состояния. Наиболее отчётливо данный эффект проявляется в канале угловой скорости: как видно на рисунке 4.24, между истинным значением q и его фильтрованной оценкой $\hat{q}_k$ наблюдается постоянное ненулевое отклонение, сохраняющееся в установившемся режиме.

Видеозаписи работы системы, изображения экспериментального стенда и дополнительные материалы доступны по ссылке [93].

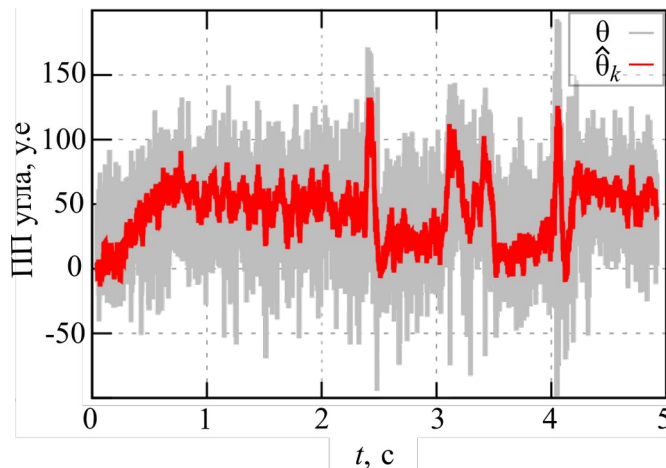


Рисунок 4.23 – Переходный процесс при высоком коэффициенте усиления Калмана

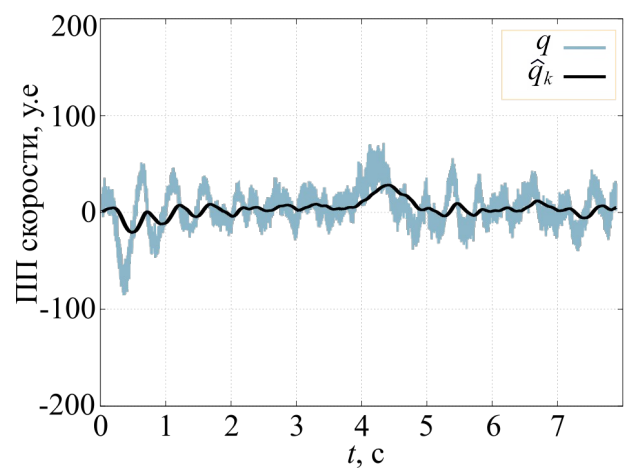


Рисунок 4.24 – Сигнал скорости при низком коэффициенте усиления Калмана

Для проведения сравнительного анализа с регулятором SMC-PI был реализован эксперимент с использованием предложенного PD-PI-регулятора. С целью дополнительной валидации результатов также выполнено сопоставление с классическим подходом на основе P-PID-регулятора, описанным в источнике [103]. Это позволяет наглядно продемонстрировать научную новизну и практическую значимость предложенного решения.

Полные результаты сравнения по следующим критериям качества:

- время переходного процесса ($T_{\text{пп}}$);
- среднеквадратическое отклонение (СКО);
- интегральный квадратичный критерий энергии управления (CSE) – представлены в таблице 4.4.

Таблица 4.4 – Сравнение критериев качества работы регуляторов SMC-PI, PD-PI и P-PID

Критерия	PD-PI	SMC-PI	P-PID
$T_{\text{пп}} \text{ (с)}$	0,7	1,0	0,85
СКО	6,5	4,7	7,7
CSE	663	363	656

Регулятор типа SMC-PI ориентирован на контуры, в которых приоритетом является высокая точность слежения и минимальные энергозатраты в установившемся режиме. В экспериментах он продемонстрировал наилучшее качество стабилизации: СКО оказалось ниже на 28-39 % по сравнению с альтернативными схемами. Дополнительно зафиксировано существенное снижение интегральной энергоёмкости управления: интегральный критерий CSE улучшился на 45 %. Таким образом, данный метод может рассматриваться как предпочтительный для режимов удержания и точного позиционирования при ограничениях по потреблению энергии.

Регулятор PD-PI показал наилучшее быстродействие среди протестированных вариантов. В частности, время ПП оказалось меньше на 30 % по сравнению с SMC-PI и на 18 % меньше, чем у классического P-PID. Это позволяет рассматривать PD-PI как наиболее подходящее решение для задач, в которых определяющим является динамический критерий – минимизация переходного процесса, высокая манёвренность, компенсация возмущений за минимальное время.

Классический регулятор P-PID занимает промежуточную позицию. Он уступает по точности в установившемся режиме (наибольшее СКО среди сравниваемых методов), однако остаётся практически значимым по двум причинам. Во-первых, он обеспечивает приемлемое быстродействие без существенных перерегулирования. Во-вторых, он опирается на хорошо изученную и технологически отработанную методику настройки, что снижает трудозатраты при внедрении. Для подавления высокочастотных шумов, усиливающихся в дифференциальном канале, в структуру P-PID был добавлен фильтр нижних частот, что позволило повысить помехоустойчивость.

Таким образом, система управления обеспечивает низкое СКО при использовании регуляторов SMC-PI и PD-PI. При этом SMC-PI-регулятор проявляет особую эффективность в режимах малых оборотов двигателей, характерных для квазистационарных задач – таких как удержание заданной ориентации и плавная коррекция положения.

В этих условиях алгоритм SMC-PI позволяет минимизировать амплитуду управляющих воздействий, что приводит к снижению энергопотребления силовой установки и, как следствие, уменьшению расхода заряда аккумуляторной батареи. Это, в свою очередь, потенциально увеличивает продолжительность автономного полёта квадрокоптера, что подтверждается данными, представленными в источнике [132].

Вывод к главе 4

- Экспериментально выявлен спектральный характер помех от BLDC-моторов в измерительных каналах датчиков, что необходимо учитывать при синтезе контуров управления квадрокоптером и настройке частотных характеристик фильтров.
- Разработана и верифицирована экспериментальная установка, обеспечивающая проведение испытаний в условиях, приближённых к реальному полёту, с возможностью отдельного анализа переходных и установившихся режимов работы СУ.
- Практическая работоспособность предложенного фильтра Калмана в составе вложенной PD-PI структуры подтверждена экспериментально: достигнуто снижение колебательности оценок состояния и повышение устойчивости системы к спектральным составляющим помех. Кроме того, реализована совместная оценка не только угла, но также угловой скорости и углового ускорения, что имеет значение при синтезе алгоритмов управления на основе метода фазовых поверхностей.

- Установлен диапазон значений отношения $Val_{Q/R}$, обеспечивающий баланс между быстродействием и точностью фильтра Калмана: за пределами данного диапазона наблюдается либо чрезмерная чувствительность к шумам, либо замедление реакции на обновления состояния.
- Эксперименты по реализации скользящего режима на аппаратной установке показали, что система обеспечивает минимальное перерегулирование и наименьшее среднеквадратическое отклонение в установившемся режиме. В то же время метод чувствителен к ограничениям скорости обработки сигнала, параметрам фильтрации и шумам в канале измерения угловой скорости. Устойчивая работоспособность СУ достигается при достаточно низком значении коэффициента усиления Калмана. Робастность системы подтверждена экспериментально при изменении параметра объекта управления.
- Результаты моделирования в Gazebo согласуются с экспериментальными данными на лабораторном стенде, что подтверждает адекватность математической модели и обоснованность методики сравнительных испытаний.
- Сравнительные испытания регуляторов (PD-PI, SMC-PI, P-PID) не выявили однозначного лидера по всем показателям качества управления. При этом структура PD-PI демонстрирует оптимальный баланс между быстродействием и плавностью переходного процесса (низкая колебательность при малом времени регулирования), а SMC-PI – наименьшее среднеквадратическое отклонение в режиме плавного полёта.

Заключение

1. Проведён системный анализ проблем, возникающих при управлении динамикой квадрокоптера, что позволило сформулировать целевые требования к совершенствованию алгоритмов стабилизации и управления.
2. На основе исследования математической модели BLDC-мотора установлено, что момент переключения потокосцепления генерируют вибрационные помехи, которые проникают в сигналы IMU и снижают точность измерений.
3. Построена модель динамики квадрокоптера, учитывающая влияние спектральных составляющих момента на валах двигателей, а также конструктивной асимметрии корпуса квадрокоптера. Данная модель обеспечивает более адекватное описание поведения аппарата в полёте и повышает достоверность последующего синтеза алгоритмов управления.
4. Разработанный алгоритм построения фильтра Калмана, в котором управляющий сигнал разложен на постоянную и вариативную составляющие во вложенной структуре регулятора типа PD-PI, обеспечил корректную оценку угла крена, угловой скорости и углового ускорения. Данный подход позволяет снизить среднеквадратическое отклонение оценки состояния по сравнению с классическим фильтром Калмана примерно в 3,5 раза при низкой частоте вращения двигателей и на 24,3 % при высокой. Это повышает точность и надёжность оценок, используемых при синтезе закона управления на основе фазовых траекторий.
5. Реализованный алгоритм построения фазовых траекторий для системы управления в скользящем режиме обеспечивает высокую робастность замкнутой системы. Предложенное решение гарантирует достижение и устойчивое удержание режима скольжения даже при десятикратном отклонении параметров объекта от номинальных значений.
6. Разработанный алгоритм фазового управления для SMC по сравнению с традиционными регуляторами обеспечивает снижение среднеквадратиче-

ского отклонения на 28-39 % и уменьшение интегральной энергоёмкости управляющего сигнала на 45 %. Полученные результаты свидетельствуют о более высокой точности, устойчивости и энергоэффективности контура стабилизации квадрокоптера.

7. Предложенный регулятор типа PD-PI позволяет сократить время переходного процесса на 30 % по сравнению с классическим P-PID, а также уменьшить среднеквадратическое отклонение ошибки в установившемся режиме на 18 %. Это свидетельствует о более высоком быстродействии при одновременном повышении точности стабилизации.
8. Сочетание оптимального управления по быстродействию на основе принципа максимума вне области равновесия с линейным PD-регулятором в её окрестности, позволило повысить быстродействие системы и исключить автоколебания в установившемся режиме. Результаты моделирования управления креном подтверждают, что предложенный подход обеспечивает быстрое достижение заданного угла и удерживает его с минимальными колебаниями.
9. Результаты диссертационной работы внедрены в следующих областях: в учебный процесс отделения электроэнергетики и электротехники Инженерной школы энергетики ТПУ – в качестве лабораторного стенда по настройке PID-регуляторов для дисциплин «Теория автоматического управления» и «Системы автоматизированного управления»; в контуры управления давлением повышающих насосных станций, разрабатываемых НПО «ВЭСТ» (г. Томск, РФ), где применяется фильтр Калмана; в учебный процесс Томского государственного университета – в качестве методики обучения студентов и магистрантов при синтезе фильтра Калмана.

Список условных обозначений

- PID – пропорционально-интегральный-дифференциальный регулятор;
- БПЛА – беспилотный летательный аппарат;
- у.е – условная единица;
- IMU (MPU) – инерциальный измерительный датчик;
- SMC – регулятор с скользящим режимом;
- BLDC-мотора – бесконтактный двигатель постоянного тока;
- ФК – фильтр Калмана;
- ESC – электронный регулятор скорости;
- САУ – система автоматического управления;
- ССК – связанная система координат;
- ИСК – инерциальная система координат;
- ПП – переходный процесс;
- ПЛК – программируемого логического контроллера;
- СКО – среднеквадратичное отклонение;
- CSE – энергия управляющего сигнала;
- IAE – интеграл модуля ошибки;
- $\phi, \theta, \psi, (rad)$ – углы Эйлера;
- $\phi_{set}(\phi_d), \theta_{set}(\theta_d), \psi_{set}(\psi_d), (rad)$ – желаемые углы Эйлера;
- $x, y, z, (m)$ – линейные положения;
- $p, q, r (rad/c)$ – угловые скорости в корпусной системе;
- $t (ms)$ – время в дифференциальных уравнениях и переходных процессах;
- $L, (Гн)$ – индуктивность фазной обмотки статора;
- $R, (Ом)$ – сопротивление фазной обмотки статора;
- M_e – момент BLDC-мотора;
- A_1, ω_1 – амплитуда и частота спектра в установившемся режиме;
- A_2, ω_2 – амплитуда и частота спектра в начале пуска;

- $d_x(t)$ – дисперсия BLDC-мотора;
- η – шум BLDC-мотора;
- l – длина крыла квадрокоптера;
- $\rho, (кг/м^3)$ – плотность воздуха;
- I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} – моменты инерции;
- $R_i, (см)$ – радиус (длина лопасти) пропеллера;
- c_i – коэффициент, определяемый геометрией пропеллера;
- b_i – коэффициент тяги для i -го двигателя;
- d_i – коэффициент сопротивления для i -го двигателя;
- K_f – коэффициент, который определяется характеристикой гироскопа;
- K_v – коэффициент, зависящий от характеристики объекта;
- K_i – постоянная времени интегрирования PID регулятора;
- K_d – постоянная времени дифференцирования PID регулятора;
- K_p – коэффициент пропорциональности PID регулятора;
- K_{pf} – коэффициент пропорциональности внешнего PD регулятора;
- K_{df} – коэффициент дифференцирования внешнего PD регулятора;
- K_{pv} – коэффициент пропорциональности внутреннего PD регулятора;
- K_{dv} – коэффициент дифференцирования внутреннего PD регулятора;
- K_M – постоянная времени интегратора;
- T_M – коэффициент передачи интегрирующего звена;
- M_q – момент крена;
- $\tilde{q}$ – измеренная скорость;
- $\tilde{\theta}$ – измеренный угол;
- $\hat{\dot{q}}_k$ – оцененное ускорение;
- q_k – оцененная скорость;
- θ_k – оцененный угол;
- T_μ – постоянная времени системы;

- $s, (c^{-1})$ – Лапласовская переменная (комплексная частота);
 - K_k (K_θ, K_q) – коэффициент Калмана (для угла и скорости);
 - T_v – коэффициент интегратор для компенсации асимметрии конструкции;
 - $a_w(t)$ – истинное линейное ускорение;
 - $a_{meas}(t)$ – вектор измерений акселерометра;
 - $g_w(t)$ – вектор гравитации;
 - $n_{\theta, q}(t)$ – белый гауссовский шум в канале угла и скорости;
 - $\delta_{M, \theta, q}(t)$ – спектральные составляющие в каналах момента, угла и угловой скорости;
-
- ω_i – скорость вращения i -ого ротора;
 - u_1 – сигнал управления после интегратора;
 - u_M – сигнал управления, поступающий в моторы;
 - u_2 – сигнал управления после интегратора с коэффициентов T_v ;
 - u_I – сигнал управления перед интегратором с коэффициентов K_M ;
 - Q – ковариационная матрица шума процесса;
 - R – ковариационная матрица шума измерения;
 - $Val_{Q/R}$ – отношения определителей матрицы Q на R ;
 - Δt – время дискретизации;
 - T_{sl} – постоянное время инерции;
 - δ (%) – погрешность;

Список литературы

1. Deepak, B. A survey on design and development of an unmanned aerial vehicle (quadcopter) / B. Deepak, P. Singh // International Journal of Intelligent Unmanned Systems. – 2016. – Vol. 4. – No. 2. – P. 70-106.
2. Peksa, J. A review on the state of the art in copter drones and flight control systems / J. Peksa, D. Mamchur // Sensors. – 2024. – Vol. 24. – No. 11. – 3349 p.
3. Maaruf, M. A survey of control methods for quadrotor UAV / M. Maaruf, M. S. Mahmoud, A. Ma'arif // International Journal of Robotics and Control Systems. – 2022. – Vol. 2. – No. 4. – P. 652-665.
4. Lyu, M. Unmanned aerial vehicles for search and rescue: A survey / M. Lyu, Y. Zhao, C. Huang, H. Huang // Remote Sensing. – 2023. – Vol. 15. – No. 13. – 3266 p.
5. Павловский, В. Е. Моделирование и исследование процессов управления квадрокоптером / В. Е. Павловский, С. Ф. Яцун, О. В. Емельянова, А. В. Савицкий. // Робототехника и техническая кибернетика. – 2014. – № 4. – С. 49-57.
6. Arutiunian, I. Development of a mathematical model for selection and rationale for making optimal construction decisions / I. Arutiunian, N. Dankevych, Y. Arutiunian, D. Saikov, M. Poltavets, A. Maranov, D. Frolov // Advances in Mathematics: Scientific Journal. – 2020. – Vol. 9. – No. 12. – P. 10649-10659.
7. Nguyen, T. A. Proposing a new control method for active stabilizer bars using an intelligent self-learning algorithm / T. A. Nguyen // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering. – 2025. – Vol. 239. – No. 8. – P. 3489-3510.
8. Tanveer, M.H. Stabilized controller design for attitude and altitude controlling of quad-rotor under disturbance and noisy conditions / M.H. Tanveer, et al. // American Journal of Applied Sciences. – 2013. – Vol. 10. – No. 8. – P. 819.

9. Шавин, М. Ю. Численные методы нелинейной фильтрации для оценки состояния квадрокоптера с поворотными роторами / М. Ю. Шавин // Труды Московского физико-технического института. – 2019. – Т. 11. – № 3 (43). – С. 86-95.
10. Kurak, S. Control and estimation of a quadcopter dynamical model / S. Kurak, M. Hodzic // Periodicals of Engineering and Natural Sciences. – 2018. – Vol. 6. – No. 1. – P. 63-75.
11. Nicol, C. Robust adaptive control of a quadrotor helicopter / C. Nicol, C. J. B. Macnab, A. Ramirez-Serrano // Mechatronics. – 2011. – Vol. 21. – No. 6. – P. 927-938.
12. Thanh, H. L. N. N. Quadcopter robust adaptive second order sliding mode control based on PID sliding surface / H. L. N. N. Thanh, S. K. Hong // IEEE Access. – 2018. – Vol. 6. – P. 66850-66860.
13. Tesch, D. A. Pitch and roll control of a quadcopter using cascade iterative feedback tuning / D. A. Tesch, D. Eckhard, W. C. Guarienti // IFAC-PapersOnLine. – 2016. – Vol. 49. – No. 30. – P. 30-35.
14. Nemati, H. Robust attitude control for quadrotors with external disturbances / H. Nemati, A. Naghash, S. Mozafari, A. Jamei // 9th International Micro Air Vehicles Conference and Flight Competition (IMAV). – 2017. – P. 81-88.
15. Barbaraci, G. Modeling and control of a quadrotor with variable geometry arms / G. Barbaraci // Journal of Unmanned Vehicle Systems. – 2015. – Vol. 3. – No. 2. – P. 35-57.
16. Paz, C. CFD analysis of the aerodynamic effects on the stability of the flight of a quadcopter UAV in the proximity of walls and ground / C. Paz, E. Suárez, C. Gil, C. Baker // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2020. – Vol. 206. – 104378 p.
17. Cheng, P. Joint-angle measurement using accelerometers and gyroscopes – A survey / P. Cheng, B. Oelmann // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. – 2009. – Vol. 59. – No. 2. – P. 404-414.

18. Gu, Y. A fault-tolerant multiple sensor fusion approach applied to UAV attitude estimation / Y. Gu, J. N. Gross, M. B. Rhudy, K. Lassak // *International Journal of Aerospace Engineering*. – 2016. – Vol. 2016. – 6217428 p.
19. Pollack, I. Effects of high pass and low pass filtering on the intelligibility of speech in noise / I. Pollack // *The Journal of the Acoustical Society of America*. – 1948. – Vol. 20. – No. 3. – P. 259-266.
20. Li, Z. Development and design methodology of an anti-vibration system on micro-UAVs / Z. Li, M. Lao, S. K. Phang, M. RA. Hamid, KZ. Tang, F. Lin // *International Micro Air Vehicle Conference and Flight Competition (IMAV)*. – 2017. – P. 223-228.
21. ArduPilot. IMU Batch Sampling [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ardupilot.org/copter/docs/common-imu-batchsampling.html?utm_source=chatgpt.com (дата обращения: 29.10.2025).
22. Marantos, P. UAV state estimation using adaptive complementary filters / P. Marantos, Y. Koveos, K. J. Kyriakopoulos // *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. – 2015. – Vol. 24. – No. 4. – P. 1214-1226.
23. Каршов, Р. С. Применение фильтра Калмана в системе стабилизации БПЛА вертолетного типа / Р. С. Каршов // *Проблемы современной науки и образования*. – 2016. – № 9 (51). – С. 23-25.
24. De la Cruz Soto, J. Analysis and assessment of a brushless DC outrunner motor for agriculture drones using JMAG / J. De la Cruz Soto, et al. // *Applied System Innovation*. – 2025. – Vol. 8. – No. 3. – P. 81.
25. Красовский, А. Н. О математической модели управляемого движения дрона-квадрокоптера / А. Н. Красовский, О. А. Сулова // *Аграрный вестник Урала*. – 2016. – № 4 (146). – С. 55-59.
26. Аубакиров, А. А. Исследование нелинейной модели динамики полёта БПЛА с шестью степенями свободы по тангажу с ПИД-регулятором / А. А. Аубакиров, А. Ж. Закарина // *Вестник Восточно-Казахстанского государственного технического университета им. Д. Серикбаева*. – 2021. – № 1. – С. 26-35.

27. Kim, J. A comprehensive survey of control strategies for autonomous quadrotors / J. Kim, S. A. Gadsden, S. A. Wilkerson // Canadian Journal of Electrical and Computer Engineering. – 2019. – Vol. 43. – No. 1. – P. 3-16.
28. Amin, R. A review of quadrotor UAV: control methodologies and performance evaluation / R. Amin, L. Aijun, S. Shamshirband // International Journal of Automation and Control. – 2016. – Vol. 10. – No. 2. – P. 87-103.
29. Gowtham, G. Mathematical modelling and PID control system implementation for quadcopter frame Tarot FY650 / G. Gowtham // Aircraft Engineering and Aerospace Technology. – 2024. – Vol. 96. – No. 2. – P. 273-284.
30. Lopez-Sanchez, I. PID control of quadrotor UAVs: A survey / I. Lopez-Sanchez, J. Moreno-Valenzuela // Annual Reviews in Control. – 2023. – Vol. 56. – 100900 p.
31. Salih, A. Flight PID controller design for a UAV quadrotor / A. Salih, M. Moghavvemi, H. A. F. Mohamed // Scientific Research and Essays. – 2010. – Vol. 5. – No. 23. – P. 3660-3667.
32. Баранов, О. В. Алгоритм настройки стабилизирующего ПИД-регулятора квадрокоптера / О. В. Баранов // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2021. – Т. 64. – № 10. – С. 829-838.
33. Kazemi, M. H. PID-based attitude control of quadrotor using robust pole assignment and LPV modeling / M. H. Kazemi, R. Tarighi // International Journal of Dynamics and Control. – 2024. – Vol. 12. – No. 7. – P. 2385-2397.
34. Guardedeño, R. MIMO PID controller tuning method for quadrotor based on LQR/LQG theory / R. Guardedeño, M. J. López, V. M. Sánchez // Robotics. – 2019. – Vol. 8. – No. 2. – 36 p.
35. Hanif, A. Towards high-precision quadrotor trajectory following capabilities: modelling, parameter estimation, and LQR control / A. Hanif, IE. Putro, A. Riyadl, O. Sudiana, HY. Irwanto // Latvian Journal of Physics and Technical Sciences. – 2024. – Vol. 61. – No. 2. – P. 89-104.

36. Demirhan, E. N. LQI control design with LQG regulator via UKF for a fixed-wing aircraft / E. N. Demirhan, K. Ç. Coşkun, C. Kasnakoğlu // 2020 24th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC). – IEEE, 2020. – P. 25-30.
37. Nan, F. Nonlinear MPC for quadrotor fault-tolerant control / F. Nan, et al. // IEEE Robotics and Automation Letters. – 2022. – Vol. 7. – No. 2. – P. 5047-5054.
38. Abdolhosseini, M. An efficient model predictive control scheme for an unmanned quadrotor helicopter / M. Abdolhosseini, Y. M. Zhang, C. A. Rabbath // Journal of Intelligent & Robotic Systems. – 2013. – Vol. 70. – No. 1. – P. 27-38.
39. Bellahcene, Z. Adaptive neural network-based robust H_∞ tracking control of a quadrotor UAV under wind disturbances / Z. Bellahcene, M. Bouhamida, M. Denai, K. Assali. // International Journal of Automation and Control. – 2021. – Vol. 15. – No. 1. – P. 28-57.
40. Bellahcene, Z. Observer-based adaptive neural network robust H_∞ control of quadrotor aerial robot / Z. Bellahcene, A. Laidani, M. Bouhamida // International Journal of Automation and Control. – 2025. – Vol. 19. – No. 4. – P. 412-436.
41. Noordin, A. Position and attitude tracking of MAV quadrotor using SMC-based adaptive PID controller / A. Noordin, M. A. Mohd Basri, Z. Mohamed // Drones. – 2022. – Vol. 6. – No. 9. – 263 p.
42. Eltayeb, A. Robust adaptive sliding mode control design for quadrotor unmanned aerial vehicle trajectory tracking / A. Eltayeb, M. Rahmat, M. Eltoum, M. Basri // International Journal of Computing and Digital Systems. – 2020. – Vol. 9. – No. 2. – P. 249-257.
43. Santos, M. Intelligent fuzzy controller of a quadrotor / M. Santos, V. Lopez, F. Morata // 2010 IEEE International Conference on Intelligent Systems and Knowledge Engineering. – IEEE, 2010. – P. 141-146.
44. Raza, S. A. Fuzzy logic based quadrotor flight controller / S. A. Raza, W. Gueaieb // ICINCO-ICSO. – 2009. – P. 105-112.

45. Han, B. A review of control algorithms for quadrotor / B. Han, Y. Zhou, KK. Deveerasetty, C. Hu // 2018 IEEE International Conference on Information and Automation (ICIA). – IEEE, 2018. – P. 951-956.
46. Mo, H. Nonlinear and adaptive intelligent control techniques for quadrotor UAV – a survey / H. Mo, G. Farid // Asian Journal of Control. – 2019. – Vol. 21. – No. 2. – P. 989-1008.
47. Kuroda, E. Efficient autonomous design of cascade structure feedback controller parameters realizing robust stabilization / E. Kuroda, Y. Maeda, M. Iwasaki // IEEJ Journal of Industry Applications. – 2024. – Vol. 13. – No. 1. – P. 34-40.
48. Willis, M. J. Proportional-integral-derivative control / M. J. Willis // Dept. of Chemical and Process Engineering, University of Newcastle. – 1999. – Vol. 6. – 28 p.
49. Liu, J. Non-fragile multivariable PID controller design via system augmentation / J. Liu, J. Lam, M. Shen, Z. Shu // International Journal of Systems Science. – 2017. – Vol. 48. – No. 10. – P. 2168-2181.
50. Yurkevich, V. D. Resonant PID controller design for a three-phase four-wire voltage inverter with split DC buses / V. D. Yurkevich // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2022. – Vol. 58. – No. 4. – P. 381-390.
51. Araki, M. PID control / M. Araki // Control Systems, Robotics and Automation: System Analysis and Control: Classical Approaches II. – 2009. – P. 58-79.
52. Borase, R. P. A review of PID control, tuning methods and applications / R. P. Borase, D. K. Maghade, S. Y. Sondkar, S. N. Pawar // International Journal of Dynamics and Control. – 2021. – Vol. 9. – No. 2. – P. 818-827.
53. Johnson, M. A. PID Control / M. A. Johnson, M. H. Moradi. – London: Springer-Verlag London Limited, 2005. – P. 47-107.
54. Vavilov, O. A. Synthesis of an automatic control system for a voltage inverter as part of an autonomous power supply system with a hydrogen module / O. A. Vavilov, V. D. Yurkevich, D. V. Korobkov // International Journal of Hydrogen Energy. – 2024. – Vol. 86. – P. 742-750.

55. Hu, M. Stabilization and tracking of a quadrotor using modified sigmoid sliding mode control / M. Hu, K. Lee, H. Ahn, A. Choi, H. Kim, K. You // *Sensors*. – 2022. – Vol. 22. – No. 10. – 3618 p.
56. Yurkevich, V. D. PIR-controller design based on time-scale separation method and internal model principle for harmonics disturbances suppression / V. D. Yurkevich // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. – 2021. – Vol. 57. – No. 4. – P. 363-370.
57. Xia, D. A robust inner and outer loop control method for trajectory tracking of a quadrotor / D. Xia, L. Cheng, Y. Yao // *Sensors*. – 2017. – Vol. 17. – No. 9. – 2147 p.
58. Баканов, М. В. Исследование модального способа построения Simulink-моделей ПИД-регуляторов для динамических систем / М. В. Баканов, А. В. Данеев, В. Н. Сизых // *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. – 2022. – №. 12. – С. 167-175.
59. Docekal, T. Advanced PID tuning based on the modulus optimum method for real systems / T. Docekal, S. Ozana // *AIP Conference Proceedings*. – AIP Publishing LLC, 2017. – Vol. 1836. – No. 1. – P. 020060.
60. Кояин, Н. В. Оптимизация контуров регулирования систем электропривода по типовым методикам / Н. В. Кояин, О. П. Мальцева, Л. С. Удут // *Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов*. – 2005. – Т. 308. – №. 7. – С. 120-125.
61. Papadopoulos, K. G. Extending the symmetrical optimum criterion to the design of PID type-p control loops / K. G. Papadopoulos, N. I. Margaritis // *Journal of Process Control*. – 2012. – Vol. 22. – No. 1. – P. 11-25.
62. Preitl, S. An extension of tuning relations after symmetrical optimum method for PI and PID controllers / S. Preitl, R. E. Precup // *Automatica*. – 1999. – Vol. 35. – No. 10. – P. 1731-1736.
63. Utkin, V. I. Variable structure systems with sliding modes / V. I. Utkin // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 1977. – Vol. 22. – P. 212-222.

64. Емельянов, С. В. Скользящие режимы высших порядков в бинарных системах управления / С. В. Емельянов, С. К. Коровин, Л. В. Левантовский // Доклады Академии наук. – 1986. – Т. 287. – №. 6. – С. 1338-1342.
65. Шилин, А. А. Исследование оптимального и скользящего режимов управления с релейным элементом, охваченным обратной связью / А. А. Шилин, В. Г. Букреев // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – №. 3(28). – С. 12-19.
66. Уткин, В. И. Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой / В. И. Уткин. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1974. – 272 с
67. Коровин, С. К. Применение скользящего режима в задачах статической оптимизации / С. К. Коровин, В. И. Уткин // Автоматика и телемеханика. – 1972. – №. 4. – С. 50-60.
68. Емельянов, С. В. Новый класс алгоритмов скольжения второго порядка / С. В. Емельянов, С. К. Коровин, Л. В. Левантовский // Математическое моделирование. – 1990. – Т. 2. – №. 3. – С. 89-100.
69. Emelyanov, S. V. A method to obtain complex regulation laws using only the error signal or the regulated coordinate and its first derivatives / S. V. Emelyanov // Avtomatika i Telemekhanika. – 1957. – Vol. 18. – No. 10. – P. 873-885
70. Халил, Х. К. Нелинейные системы / Х. К. Халил; под ред. А. Л. Фрадкова. – М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика (Институт компьютерных исследований), 2009. – 832 с. – 591 с.
71. Kuang, J. Adaptive sliding mode control for trajectory tracking of quadrotor unmanned aerial vehicles under input saturation and disturbances / J. Kuang, M. Chen // Drones. – 2024. – Vol. 8. – No. 11. – 614 p.
72. Mofid, O. Adaptive terminal sliding mode control for attitude and position tracking control of quadrotor UAVs in the existence of external disturbance / O.

- Mofid, S. Mobayen, W. K. Wong // IEEE Access. – 2020. – Vol. 9. – P. 3428-3440.
73. Bouzerzour, H. Vision-based Sliding Mode Control with Exponential Reaching Law for Uncooperative Ground Target Searching and Tracking by Quadcopter / H. Bouzerzour, M. Guiatni, M. Hamerlain, A. Allam // ICINCO. – 2022. – P. 555-564.
 74. Xiong, J. J. Position and attitude tracking control for a quadrotor UAV / J. J. Xiong, E. H. Zheng // ISA Transactions. – 2014. – Vol. 53. – No. 3. – P. 725-731.
 75. González-Vázquez, S. Motion control of a quadrotor aircraft via singular perturbations / S. González-Vázquez, J. Moreno-Valenzuela // International Journal of Advanced Robotic Systems. – 2013. – Vol. 10. – No. 10. – 368 p.
 76. Edardar, M. Design and analysis of sliding mode controller under approximate hysteresis compensation / M. Edardar, X. Tan, H. K. Khalil // IEEE Transactions on Control Systems Technology. – 2014. – Vol. 23. – No. 2. – P. 598-608.
 77. Levant, A. Accelerated high-order MIMO sliding mode control / A. Levant, Y. Dvir // 2014 13th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS). – IEEE, 2014. – P. 1-6.
 78. Wu, H. Sliding Mode Control Approach for Vision-Based High-Precision Unmanned Aerial Vehicle Landing System Under Disturbances / H. Wu, W. Wang, T. Wang, S. Suzuki // Drones. – 2024. – Vol. 9. – No. 1. – 3 p.
 79. Sun, C. Optimised sliding mode control of a hexacopter: simulation and experiments / C. Sun, S. A. Agha, Z. Mohamed, M. H. Shaheed // Electronics. – 2022. – Vol. 11. – No. 16. – 2519 p.
 80. Ahn, H. Sliding-mode control for flight stability of quadrotor drone using adaptive super-twisting reaching law / H. Ahn, M. Hu, Y. Chung, K. You // Drones. – 2023. – Vol. 7. – No. 8. – 522 p.
 81. Liu, K. Observer-based adaptive fuzzy finite-time attitude control for quadrotor UAVs / K. Liu, P. Yang, R. Wang, L. Jiao, T. Li, J. Zhang // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. – 2023. – Vol. 59. – No. 6. – P. 8637-8654.

82. Ключев, А. С. Оптимизация автоматических систем управления по быстродействию / А. С. Ключев, А. А. Колесников // М.: Энергоиздат, 1982. – 240 с.
83. Фам, Ч. Х. Синтез Fuzzy-регулятора объектом второго порядка с запаздыванием / А. А. Шилин, Ф. Ч. Хай, В. Н. Вонг // Информатика и автоматизация. – 2024. – Т. 23. – №. 5. – С. 1505-1531.
84. Шилин, А. А. Оптимальное релейное управление с программно реализуемой обратной связью / А. А. Шилин, В. Г. Букреев // XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014). – 2014. – С. 471-481.
85. Pikina, G. A. Some Problems of Implementing Optimal Control Theory in Automated Control Systems / G. A. Pikina, F. F. Pashchenko, A. F. Pashchenko // Automation and Remote Control. – 2022. – Vol. 83. – No. 10. – P. 1630-1638.
86. Фельдбаум, А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1966. – 623 с.
87. Пупков, К. А. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 4: Теория оптимизации систем автоматического управления / К. А. Пупков, Н. Д. Егупов, А. И. Баркин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 742 с. – 57 с.
88. Шилин, А. А. Методы, алгоритмы и элементы релейного управления системами теплopotребления с запаздыванием: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.xx / А. А. Шилин. – Томск: Национальный исследовательский Томский политехнический университет, 2014. – 150 с.
89. Pontryagin, L. S. The Mathematical Theory of Optimal Processes / L. S. Pontryagin; transl. D. E. Brown. – Oxford: Pergamon Press, 1964. – 340 p.
90. Oloo, J. O. Design of extended Kalman filter optimized fuzzy PID controller for a quadcopter in the event of one rotor failure: Diss. – JKUAT-COETEC, 2021. – 71 p.
91. Калачев, Ю. Н. SimInTech: моделирование в электроприводе. – М.: ДМК Пресс, 2022. – С. 26-33.

92. Tashakori, A. Modeling of BLDC motor with ideal back-EMF for automotive applications / A. Tashakori, M. Ektesabi, N. Hosseinzadeh // *Proceedings of the World Congress on Engineering*. – 2011. – Vol. 2. – P. 6-8.
93. Фам, Ч. Х. Материалы к диссертационному исследованию [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://drive.google.com/drive/folders/1ttrEPdr69ptfY5OroG1MA7x1hTqXJJ7W?usp=drive_link (дата обращения: 18.09.2025).
94. Najm A. A. Nonlinear PID controller design for a 6-DOF UAV quadrotor system, A. A. Najm., I. K. Ibraheem // *Engineering Science and Technology, an International Journal*. – 2019. – Vol. 22. –No. 4. – P. 1087-1097.
95. Labbadi M., Robust integral terminal sliding mode control for quadrotor UAV with external disturbances, M. Labbadi, M. Cherkaoui // *International Journal of Aerospace Engineering*. – 2019. – Vol. 2019. –No. 1. – 2016416 p.
96. Лысухо, Г. В. Квадрокоптер: динамика и управление / Г. В. Лысухо, А. Л. Масленников // *Политехнический молодежный журнал*. – 2020. – № 05. – 46 с.
97. Abdelhay, S. Modeling of a quadcopter trajectory tracking system using PID controller / S. Abdelhay, A. Zakriti // *Procedia Manufacturing*. – 2019. – Vol. 32. – P. 564-571.
98. Фам, Ч. Х. Динамическое моделирование квадрокоптера по высоте с учетом динамических свойств BLDC-мотора / Ч. Х. Фам, А. М. Гунько // *Цифровизация, декарбонизация и децентрализация современной электроэнергетики: Всерос. школа молодых ученых: сб. науч. трудов, Севастополь*, – 2024. – С. 9-17.
99. John, B. Quadcopter Simulation and Control. Dynamics generated with PyDy [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://github.com/bobzwik/Quadcopter_SimCon (дата обращения: 05.10.2024).

100. Hamzeh, F. Continuously Variable Geometry Quadrotor: Robust Control via PSO-Optimized Sliding Mode Control / F. Hamzeh, et al. // *Actuators*. – 2025. – Vol. 14. – No. 7. – 308 p.
101. Sun, Y. C. Design and control of deformable quadrotor with varying length arms / Y. C. Sun, M. N. Xie, Y. H. Li, W. Y. Ng, H. Zhang, Z. Li // *Science China Technological Sciences*. – 2023. – Vol. 66. – No. 5. – P. 1225-1234.
102. Betaflight. Betaflight: Open-source flight controller firmware [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://github.com/betaflight/betaflight> (дата обращения: 14.09.2025).
103. Kalachev, O. Flix: Open-source ESP32-based quadcopter made from scratch [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://github.com/okalachev/flix> (дата обращения: 14.09.2025).
104. PX4 Autopilot. PX4/PX4-Autopilot repository [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://github.com/PX4/PX4-Autopilot> (дата обращения: 25.03.2025).
105. Фам, Ч. Х. Исследование влияния электромагнитных процессов BLDC-мотора на показания гироскопа / Ч. Х. Фам, А. А. Шилин, М. Т. Нгуен // *Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН*. – 2025. – Т. 27. – № 3. – С. 55-72.
106. InvenSense. MPU-6000 and MPU-6050 product specification (Rev. 3.4), 19 Aug. 2013 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://invensense.tdk.com/wp-content/uploads/2015/02/MPU-6000-Datasheet1.pdf> (дата обращения: 14.09.2025).
107. Simon, D. Kalman filtering / D. Simon // *Embedded Systems Programming*. – 2001. – Vol. 14. – No. 6. – P. 72-79.
108. Becerra, V. M. Applying the extended Kalman filter to systems described by nonlinear differential-algebraic equations / V. M. Becerra, P. D. Roberts, G. W. Griffiths // *Control Engineering Practice*. – 2001. – Vol. 9. – No. 3. – P. 267-281.

109. Alfian, R. I. Noise reduction in the accelerometer and gyroscope sensor with the Kalman filter algorithm / R. I. Alfian, A. Ma'arif, S. Sunardi // *Journal of Robotics and Control (JRC)*. – 2021. – Vol. 2. – No. 3. – P. 180-189.
110. Фам, Ч. Х. Стенд для исследования фильтра Калмана в системе управления мультикоптером, смоделированным в среде MATLAB / Ч. Х. Фам, А. М. Гунько, Б. И. Батомункуев, А. И. Салмин // *Бутаковские чтения: сб. статей III Всерос. с междунар. участием молодежной конф.* – 2023. – С. 549-552.
111. Смагин, В. И. Фильтрация в дискретных системах со случайными и интервальными параметрами / В. И. Смагин, К. С. Ким, В. А. Зыков // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2024. – №. 66. – С. 69-75.
112. Смагин, В. И. Робастная фильтрация для дискретных систем с неизвестным входом и интервальной неопределенностью / В. И. Смагин, К. С. Ким // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2023. – №. 64. – С. 113-119.
113. Смагин, В. И. Идентификация в дискретных системах со случайными и интервальными параметрами с использованием EKF / В. И. Смагин, К. С. Ким // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2025. – №. 71. – С. 112-119.
114. Chotikunnnan, P. Comparative analysis of sensor fusion for angle estimation using Kalman and complementary filters / P. Chotikunnnan, et al. // *International Journal of Robotics and Control Systems*. – 2025. – Vol. 5. – No. 1. – P. 1-21.
115. Singh, Y. Relative study of measurement noise covariance R and process noise covariance Q of the Kalman filter in estimation / Y. Singh, R. Mehra // *IOSR Journal of Electrical and Electronics Engineering*. – 2015. – Vol. 10. – No. 6. – P. 112-116.
116. Bukreev, V. G. State estimation accuracy analysis of an induction electric drive by the algorithms of Luenberger and Kalman / V. G. Bukreev, E. B. Shandarova, F.

- V. Perevoshchikov // Journal Scientific and Technical Of Information Technologies, Mechanics and Optics. – 2023. – Vol. 147. – No. 1. 35 p.
117. Assimakis N. I/O SNR and Noise Covariances Norm Ratio Relation in Kalman Filter / N. Assimakis, M. Adam // WSEAS Transactions on Systems and Control. – 2024. – Vol. 19. – P. 373-378.
 118. Pham, T. H. Investigation of sliding mode controller operation in quadcopter attitude control / T. H. Pham, A. A. Shilin, D. Y. Lyapunov, M. T. Nguyen // Journal of Robotics and Control (JRC). – 2025. – Vol. 6. – No. 5. – P. 55-72.
 119. Suleiman, H. U. Methods of chattering reduction in sliding mode control: a case study of ball and plate system / H. U. Suleiman, et al. // 2018 IEEE 7th International Conference on Adaptive Science & Technology (ICAST). – IEEE, 2018. – P. 1-8.
 120. Boiko, I. Analysis of chattering in systems with second-order sliding modes / I. Boiko, L. Fridman, A. Pisano, E. Usai // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2007. – Vol. 52. – No. 11. – P. 2085-2102.
 121. Хорошавин, В. С. Оптимальное программное движение с изменяемым временем регулирования / В. С. Хорошавин, В. С. Грудинин // Радиопромышленность. – 2020. – Т. 30. – № 3. – С. 40-49.
 122. Долятовский, В. А. Оптимальное управление динамическим объектом на основе принципа максимума / В. А. Долятовский, Б. Рауль // Системный анализ в проектировании и управлении. – 2020. – Т. 24. – № 2. – С. 37-45.
 123. Костоглотов, А. А. Синтез оптимального управления на основе объединенного принципа максимума / А. А. Костоглотов, А. И. Костоглотов, С. В. Лазаренко, Л. А. Шевцова // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. – 2010. – № 2. – С. 31-37.
 124. Shilin, A. A. Synthesis and implementation of λ -approach of slide control in heat-consumption system / A. A. Shilin, V. G. Bukreev, F. V. Perevoshchikov // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2022. – Т. 22. – № 3. – С. 501-508.

125. Фам, Ч. Х. Устройство для исследования переходных процессов беспилотного летательного аппарата / К. М. Сыздыков, Ч. Х. Фам // Бутаковские чтения: сб. статей IV Всерос. с междунар. участием молодежной конф., Томск. – 2024. – С. 392-396.
126. Жмудь, В. А. Акселерометр и гироскоп MPU6050: первое включение на STM32 и исследование показаний в статике / В. А. Жмудь, К. А. Кузнецов, Н. О. Кондратьев и др. // Автоматика и программная инженерия. – 2018. – № 3(25). – С. 9-22.
127. Фам, Ч. Х. Исследование связи показаний гироскопа с электромеханическими процессами бесколлекторного двигателя постоянного тока / Ч. Х. Фам, А. М. Гунько, А. А. Шилин // Электронные средства и системы управления: Материалы докладов Международной научно практической конференции, Томск, ТУСУР. – 2024. – № 1. – С. 338-341.
128. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025689505 (RU); заявка № 2025689115 от 29.10.2025; дата рег.: 29.10.2025; Бюл. № 43 от 29.10.2025 // Фам Ч. Х., Шилин А. А. Вычисление момента на валу BLDC-двигателя с учетом спектральной составляющей.
129. ArduPilot. ArduPilot repository [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://github.com/ArduPilot/ardupilot.git> (дата обращения: 15.09.2025).
130. Pham, T. H. Synthesis of Kalman filter in quadcopter roll control loop based PD-PI controller / T. H. Pham, A. A. Shilin, D. Y. Lyapunov, S. V. Shidlovskiy, M. T. Nguyen // Power System Technology. – 2025. – Vol. 49. – No. 01. – P. 99-107.
131. Фам, Ч. Х. Синтез фильтра Калмана для управления асимметричным квадрокоптером с оптимизацией отношения ковариационных матриц / Ч. Х. Фам, А. А. Шилин, А. С. Гирник, М. Т. Нгуен // Инженерный вестник Дона. – 2025. – № 10. – С. 255-266.
132. Фам, Ч. Х. Исследование регулятора со скользящим режимом в управлении квадрокоптером при малооборотном вращении / Ч. Х. Фам // XVI Научно-

практическая конференция «Планирование и управление электроэнергетическими системами». – Новосибирск: НГТУ, 2025. – С. 250-255.

133. Soon, C. C. Efficiency and performance of optimized robust controllers in hydraulic system / C. C. Soon, R. Ghazali, S. H. Chong, C. M. Shern, Y. M. Sam, Z. Has // International Journal of Advanced Computer Science and Applications. – 2020. – Vol. 11. – No. 6. – P. 1-8.

Приложение А. Акты внедрения диссертационной работы

УТВЕРЖДАЮ

проректор по образовательной деятельности
Томского государственного университета



/Е. В. Луков /

» _____ 2025 г.

АКТ

внедрения результатов диссертационной работы
на соискание учёной степени кандидата технических наук

Фам Чонг Хай

«Методы построения фильтра Калмана в управлении квадрокоптером»

Комиссия в составе:

Председатель комиссии:

декан ФИТ, д-р техн. наук

Шидловский Станислав Викторович

И.о. зав. каф. ИТС, канд. техн. наук,

Шашев Дмитрий Владимирович

Члены комиссии:

зам. декана ФИТ по учебной работе

Нестерова Наталья Владимировна

составила настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы «Построение фазовой поверхности контура управления креном квадрокоптера с учётом вибрации от синхронных двигателей» Фама Ч.Х. используются на факультете инновационных технологий Томского государственного университета в учебном процессе с 2025/2026 уч. года для студентов направления подготовки 09.04.02 – «Информационные системы и технологии» по магистерской программе «Компьютерная инженерия: искусственный интеллект и робототехника» по дисциплинам «Математические основы информационных систем» и «Навигационные системы».

– по решенным в диссертационном исследовании подзадачам построения фильтра Калмана в контуре управления креном и тангажем сформированы типовые индивидуальные домашние задания по теме «синтез фильтра Калмана»;

– в процессе решения задачи студент исследует работу замкнутого контура управления в условиях значительных помех и обосновывает актуальность применения ФК;

– после применения ФК оценивается повышение точности оценки углов, угловых скоростей и угловых ускорений при определении ориентации квадрокоптера в пространстве.

Председатель комиссии:

С. В. Шидловский /

Члены комиссии:

Д. В. Шашев /

Н.В. Нестерова /

TOMSK
POLYTECHNIC
UNIVERSITY



ТОМСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Томский политехнический университет» (ТПУ)



УТВЕРЖДАЮ

Директор Инженерной школы энергетики

А.С. Матвеев

« » 2026 года

Акт

внедрения результатов диссертационной работы
Фам Чонг Хая в учебный процесс

Комиссия в составе:

Председатель: заместитель директора по развитию ИШЭ ТПУ, к.т.н. Ивашутенко А.С., члены комиссии: и.о. руководителя ОЭЭ ИШЭ ТПУ, к.т.н. Сайгаш А.С., профессор ОЭЭ ИШЭ ТПУ, д.т.н., профессор Гарганеев А.Г., доцент ОЭЭ ИШЭ ТПУ, к.т.н., Кладиев С.Н. составили настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы

Фам Чонг Хая. «Синтез контура управления креном квадрокоптера с бесконтактным двигателем постоянного тока», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 2.3.1 - Системный анализ, управление и обработка информации, статистика, стали основой поданного гранта по редизайну дисциплины «Прототипирование мехатронных систем». Разработанный им экспериментальный стенд может использоваться в качестве лабораторного стенда для дисциплин «Теория автоматического управления», «Системы автоматизированного управления» в учебном процессе отделения электроэнергетики и электротехники инженерной школы энергетики, а также при выполнении выпускных квалификационных работ бакалавров и магистров и научно-квалификационных работ аспирантов.

Председатель

Члены комиссии

А.С. Ивашутенко

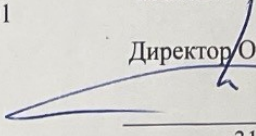
А.С. Сайгаш

А.Г. Гарганеев

С.Н. Кладиев.



ООО «НПО ВЭСТ», 634009, Томская область,
г. Томск, ул. Мельничная, дом 45А, пом. Ц001
Тел.: (3822) 400-733
Факс: (3822) 400-887
e-mail: info@npowest.tom.ru,
www.npowest.ru

ИНН/КПП 7020032645/701701001
Р/сч. 40702810600000010775
Филиал Банка ГПБ (АО) в г. Томск
К/сч. 30101810800000000758
БИК 046902758
Директор ООО «НПО ВЭСТ»

Кривошеин Ю.О.
«31» Октября 2025 г.

АКТ
о внедрении результатов диссертационной работы
аспиранта Национального исследовательского Томского политехнического
университета
Фам Чонг Хай

Комиссия в составе:

Председатель: Кривошеин Юрий Олегович, директор ООО «НПО ВЭСТ»

Члены комиссии:

Чебучаков Максим Витальевич, главный инженер проектного отдела
Афанасьева Валентина Николаевна, начальник сервисного отдела

составили настоящий акт о том, что по результатам научно-исследовательской квалификационной работы Фам Чонг Хая, представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук, был успешно применен фильтр Калмана в контурах управления давлением повышающих насосных станций в компании НПО «ВЭСТ». Постановили:

1. Реализация системы управления с фильтром Калмана для управления процессами поддержки давления в повышающих насосных станциях (ПНС), что позволило уменьшить шум в каналах измерения давления и обеспечить более стабильное управление.
2. Предложенная методика построения фильтра Калмана для управления креном квадрокоптера оказалась пригодна для контуров управления ПНС, поскольку их динамические математические модели по структуре совпадают и имеют похожую природу возникновения шумов в каналах измерения от электрических трехфазных двигателей.
3. Выполненный анализ влияния значений ковариационных матриц на матрицу коэффициентов Калмана позволил реализовать работу фильтра с непосредственным определением этих коэффициентов на этапе настройки фильтра, что позволило исключить сложные матричные вычисления из основного цикла работы контуров.

Председатель комиссии:

/ Кривошеин Ю.О. /

Члены комиссии:

/ Чебучаков М.В., /

/ Афанасьева В.Н. /

